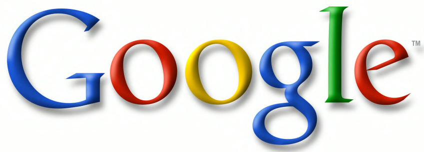


G. Decher,

Handbuch der Mechanik.

Erster Band.

Handbuch

der

rationellen und technischen

Mechanik.

Von

G. Decher,

Professor der Physik und Mechanik an der k. polytechnischen Schule zu Augsburg.

Erste Abtheilung:

Rationelle Mechanik.



Augsburg.

Verlag der Matth. Rieger'schen Buchhandlung.

1851.

Handbuch

der

rationellen Mechanik.

Von

G. Decher,

Professor der Physik und Mechanik an der k. polytechnischen Schule in Augsburg.

Erster Band.

Einleitung. Mechanik des materiellen Punktes.

Mit 8 Steintafeln.

Augsburg.

Verlag der Matth. Rieger'schen Buchhandlung.

1851.



Vorwort.

Das vorliegende Werk verdankt seine Entstehung zunächst dem Wunsche, meinen Schülern einen Leitfaden für meine Vorträge über reine und angewandte Mechanik in die Hand zu geben. Diesen Plan ließ ich jedoch wegen der fortdauernd sehr geringen Frequenz unserer Schule, durch welche dem Verleger eines solchen Leitfadens nur geringe Aussicht auf einen genügenden Absatz geboten war, bald wieder fallen, und faßte, von einem innern Streben nach einer umfassenden strengen Behandlung meines Gegenstandes getrieben, den wohl etwas kühnen Entschluß, ein vollständiges Handbuch der reinen und angewandten Mechanik nach meiner Anschauungs- und Darstellungsweise auszuarbeiten. Für die reine Mechanik wählte ich dazu einen ziemlich allgemeinen Standpunkt, ohne jedoch die besondere Rücksicht auf die uns umgebenden irdischen Verhältnisse aus den Augen zu verlieren; die angewandte Mechanik wird sich dagegen ausschließlich auf dem Gebiete der Technik, des Bau- und Maschinenwesens bewegen, und das ganze Werk demnach als **Handbuch der rationellen und technischen Mechanik** in drei Abtheilungen erscheinen, von denen die erste die reine oder **rationelle Mechanik** enthalten wird, während die zweite für denjenigen Theil der **technische Mechanik** bestimmt ist, welcher den **Bauwissenschaften** zur Grundlage dient, und die dritte Abtheilung dem Mechaniker eine vollständige **Maschinenlehre** bieten soll. Jede Abtheilung sollte nach diesem Plane einen Band ausmachen; es hat sich aber durch den Druck der vorliegenden Lieferung gezeigt, daß die erste Abtheilung die Grenzen **eines** Bandes weit überschreiten würde, weßhalb dieselbe nun aus **drei** Bänden, jeden von etwa 30 Bogen, bestehen wird. Nach diesem

Maaßstabe wird übrigens die zweite Abtheilung jedenfalls nur **einen** Band geben; die dritte dagegen mag **wohl zwei** Bände ausmachen. — Diese Abtheilungen sollen nach meinem jetzigen Dafürhalten soviel als möglich unabhängig von einander gehalten werden, so daß jede ein Werk für sich bildet, und einzeln erworben werden kann. Es werden aber bei dieser Einrichtung einerseits Wiederholungen nicht zu vermeiden sein, und auf der andern Seite dürfte der durch das Ganze laufende Faden meiner Darstellungsweise für Denjenigen, welcher die erste Abtheilung nicht besitzt, doch einige Schwierigkeiten verursachen; es soll deßhalb die Aufnahme, welche die erste Abtheilung finden wird, über die Art der weitern Ausführung dieses Planes entscheiden. — Soviel über die beabsichtigte Einrichtung des Werkes im Allgemeinen.

Was nun den Zweck betrifft, welchen ich mir bei der Ausarbeitung dieses Werkes zu erreichen, vorgesetzt habe, so besteht er einfach darin, Denjenigen, welche sich mit den Lehren der rationellen und der technischen Mechanik mehr als nur oberflächlich bekannt machen wollen und sich schon einige Kenntnisse in der höhern Analysis erworben haben, ein Buch in die Hand zu geben, in welchem sie jene Lehren nicht nur **klar und anschaulich und der Natur der Verhältnisse entsprechend dargestellt** und **strenge geordnet**, sondern auch in einer bisher gänzlich entbehrten **strengen Weise begründet** finden, und durch das sie namentlich befähigt werden sollen, jene Lehren auf die Aufgaben der Technik **sicher anzuwenden.**

In diesen letzten Beziehungen war es daher vor Allem nothwendig, die höhere Analysis selbst auf eine klare und strengwissenschaftliche Grundlage zu stellen, und ihren Grundformen eine Bedeutung zu unterlegen, welche einfach aus der Natur der Sache hervorgeht und demnach auch für die Anwendung in jedem Falle einen anschaulichen Begriff gibt. — Der bisher selbst in der reinen Analysis größtentheils, in der angewandten Mathematik aber ausschließlich festgehaltene Begriff und die Methode des **Unendlichkleinen** mußten daher gänzlich beseitigt werden, weil diese, so bequem sie auch für die Anwendung scheinen mögen, nie einer strengen Anforderung genügen können. Denn einmal kann eine Größe, welche absolut genommen kleiner sein soll, als jede gegebene Größe, nur Null sein, und kann nicht mehr in verschiedenen Abstufungen, als Unendlichkleines oder Null der ersten, zweiten, dritten, etc. Ordnung gedacht werden, wenn man nicht mit Begriffen spielen, und diese so dehnbar

machen will, wie es jetzt manche Rechtsbegriffe sind. Versteht man aber unter dem sogenannten, aber nicht existirenden Unendlichkleinen ein ehrliches Sehrkleines, in welchem Falle solche Abstufungen allerdings denkbar werden, so erscheinen alle Lehrsätze der Geometrie und Mechanik nur als angenähert richtige, da sie nur durch Vernachlässigung erhalten werden, und sind dabei auf eine Menge falscher Vorstellungen und Voraussetzungen gegründet. Ein Vieleck von unendlich vielen Seiten ist ein Unding, eine Tangente hat nicht zwei, der Krümmungskreis nicht drei Punkte mit einer Curve gemeinschaftlich, sondern nur einen; zwei aufeinanderfolgende Tangenten einer doppeltgekrümmten Curve schneiden sich im Allgemeinen gar nicht, man kann also auch nicht eine Ebene durch sie legen; eine stetig beschleunigte Bewegung ist auch im kleinsten Zeitraume nicht gleichförmig, u. s. f. Wie darf man bei solchen Vorstellungen, und wenn man Gleichungen, wie die folgenden:

$$ds = v\,dt$$

und

$$ds = v\,dt + \frac{1}{2}\frac{d^2s}{dt^2}dt^2 + \text{etc.}$$

hinter einander auf derselben Seite eines Buches aufführt, noch von mathematischer Strenge reden?

Aber auch die Begriffe, welche der sogenannten **Grenzenmethode** zu Grunde liegen, mußten durch andere ersetzt werden, welche in dem Zweck der höhern Analysis selbst begründet und mit einer strengmathematischen Vorstellungsweise vereinbar sind. Denn einmal ist nach strengen Begriffen die Grenze einer veränderlichen Größe ein solcher Werth, welchem diese letztere so nahe gebracht werden kann, als man will, ohne daß sie denselben jemals wirklich erreicht. So ist der Kreisumfang die Grenze für den Umfang eines hinein- oder herumbeschriebenen Vieleckes, wenn dieser Umfang als eine Function der Seitenzahl betrachtet wird. Mit welchem Rechte man aber die Tangente an einer Curve, oder den Winkel, welchen sie mit einer festen Geraden einschließt, als Grenze für die veränderliche Lage der Sekante hinstellen will, d. h. für die Lage einer Geraden, welche durch einen bestimmten Punkt einer Curve geht, und um diesen Punkt gedreht wird, vermag ich nicht einzusehen; denn diese veränderliche Gerade wird nicht nur einmal die Lage der Tangente wirklich annehmen, sondern auch durch diese Lage hindurch-

und darüberhinausgehen. Die Lage der Tangente ist nur eine besondere Lage jener Geraden, welcher besondere Eigenschaften zukommen, aber keine Grenze, oder man müßte auch, und mit noch größerm Rechte, die Senkrechte, die Grenze der von einem Punkte gegen eine Gerade hinlaufenden Schiefen nennen, u. s. f. Ferner kann, wenn man auch davon Umgang nehmen will, der Werth: Null doch nur für absolute Größen als Grenze angenommen werden, und dann ist ein Verhältniß zweier Größen, welche absolut Null sind, nicht denkbar; man scheut sich deßhalb auch, die sogenannten **Incremente** frischweg gleich Null zu nehmen, man nähert sich diesem Werthe nur ganz sachte, hütet sich aber ja, bis dran hinzukommen. Man bleibt also im Grunde doch auch bei dem **Unendlichkleinen** stehen, und dabei bringt dieses fortwährende **Noli me tangere** jener Grenzen eine Aengstlichkeit und eine sophistische Spitzfindigkeit in die höhere Analysis, welche jeden einfachen Sinn davon zurückschrecken muß, und welche selbst einen Meister der Analysis, wie **Cauchy** sowie seine Jünger zu Trugschlüssen verleitet hat *). Und endlich was nützt diese Grenzentheorie, auf welcher die höhere Analysis, namentlich was die Principien der Integralrechnung betrifft, wie auf einer Nadelspitze balancirt, wenn man in der Anwendung immer wieder auf das Unendlichkleine zurückkommt, und zu Flächen-, Körper-, Zeit-Elementen, unendlich dünnen Lamellen, u. s. f. seine Zuflucht nehmen muß?

Ich habe deßhalb in meinem Werke eine neue, der Natur der Verhältnisse entstammende, und wie ich glaube, in jeder Beziehung klare und streng mathematische Anschauungsweise für die **Differential- und Integral-Rechnung,** sowohl was die Ableitung und Bedeutung der Differentialquotienten, als die der Integrale betrifft, zu Grunde gelegt, und dieselbe in der **Einleitung,** in welcher außerdem die der Mechanik zu Grunde liegenden Begriffe allgemein angedeutet und auf ihren wahren Sinn zurückgeführt werden, und worin zugleich mehrere oft zur Anwendung kommende Beziehungen aus der analytischen Geometrie abgeleitet sind, der Hauptsache nach erörtert. Ich habe daselbst gezeigt, wie einfach und klar sich durch die Anwendung dieser Anschauungsweise auf die Geometrie alle Beziehungen zwischen den räumlichen Größen

*) Man vergleiche §. 42 der Einleitung.

ergeben, wie einfach und natürlich die Beziehung ist, in welcher die Integralien ihrer wahren Bedeutung nach zu den Differentialquotienten stehen, wie einseitig und irrig dagegen die bisher den Integralien unterlegten Begriffe gewesen sind; ich habe endlich nachgewiesen, worin eigentlich die Schwierigkeit für die Integration besteht, wenn der Differentialquotient zwischen den Grenzen des Integrals durch den Werth: Unendlich geht, und darauf aufmerksam gemacht, daß dieselbe Schwierigkeit eintritt, wenn der Differentialquotient beim Durchgange durch den Werth: Null das Zeichen wechselt. Ich glaube mir deßhalb mit der Hoffnung schmeicheln zu dürfen, durch diese neue Grundlage für die höhere Analysis den nebligen Pfad zu diesem Felde erhellt, und zugleich die Bahn für eine strenge Anwendung der höhern Mathematik auf die Mechanik und die Physik überhaupt gebrochen zu haben. Die Grundzüge für diese Anwendung werden schon in dem vorliegenden Bande bei der Lehre von der Bewegung des materiellen Punktes dargelegt werden; es wird aber erst in den folgenden Bänden Gelegenheit geben, von dieser strengen Anwendung einen umfassenden Gebrauch zu machen, und die Vortrefflichkeit meiner Theorie auch in dieser Beziehung im hellsten Lichte zu zeigen. — Den Schluß der Einleitung, welche durch die vorher genannten Untersuchungen allerdings einen beträchtlichen Umfang erhalten hat, bildet die Erläuterung von der **Homogeneität** der Gleichungen, ein Satz, welcher Denen, die Fortschritte in der Mechanik machen wollen, nicht genug zu empfehlen ist, da er nicht nur dazu dienen kann, die Form einer Function zu suchen, welche gegebenen Bedingungen zu entsprechen hat *), sondern auch dazu, sich bei der Umwandlung der Gleichungen zu überzeugen, ob dabei nicht ein oder der andere Factor übersehen wurde.

In der **Mechanik** selbst waren nicht nur die Grundbegriffe zu läutern, sondern auch die Lehren der Natur der Verhältnisse entsprechend darzustellen und nach klaren Vorstellungen zu ordnen, wenn sich dieses Feld dem Jünger der Wissenschaft zur klaren Anschauung erschließen, und ihn das Studium derselben auch zur sichern Anwendung befähigen

*) Ich habe dieselbe z. B. zum Beweise des Satzes angewendet, daß die Curve, auf welcher sich ein schwerer materieller Punkt bewegen muß, um große und kleine Schwingungsbogen in derselben Zeit zu durchlaufen, also die sogenannte **Tautochrone** nur die Cykloide sein kann.

soll. Daß diese Sorge keine eitle sein dürfte, zeigen die verschiedenen, oft geradezu entgegengesetzten Theorien und Resultate, welche nicht nur über Maschinen, sondern auch über sehr einfache Fälle der technischen Mechanik von den berühmtesten Lehrern dieser Wissenschaft, wenn man diese überhaupt schon so nennen darf, aufgestellt und abgeleitet werden, gerade als wenn sie, etwa wie die Medicin, eine rein empirische Lehre wäre und jeder strengen Grundlage entbehrte. In der That findet man auch in den meisten Lehrbüchern der technischen Mechanik die Untersuchungen so einseitig, so klebend an speziellen Betrachtungsweisen durchgeführt, als wenn das stolze Gebäude der reinen Mechanik gar nicht vorhanden wäre, und so wie vor hundert Jahren noch die Lehren dieser Wissenschaft behandelt wurden. Gewöhnlich behilft man sich mit einer einseitigen Zerlegung der gerade wahrgenommenen, oder in der Vorstellung vorhandenen Kräfte, und nimmt davon, was man eben braucht, ohne sich um das Uebrige weiter zu bekümmern, wozu schon die theoretischen Untersuchungen über die **Reibung** genügende Belege liefern *). — So stattlich indessen auch das Gebäude der reinen Mechanik sich ausnimmt, so läßt dasselbe in seiner bisherigen Einrichtung doch sehr Vieles zu wünschen übrig, namentlich was seine Begründung, seine Anordnung und Eintheilung betrifft; man sieht überall, daß man über die Bedeutung der einzelnen Theile noch nicht zur Klarheit gekommen war. Denn man findet nicht nur in der Statik die Lehre von der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte mit den Bedingungen des Gleichgewichts unter einander geworfen, als wenn die Kenntniß der Resultirenden, die Lage des Schwerpunktes, u. s. f. nur für diese Gleichgewichtsbedingungen nothwendig wäre, und nur durch diese selbst wieder gefunden werden könnte, und gleich darauf in der Dynamik ohne Weiteres dieselben Lehrsätze, welche ihrer Darstellungsweise nach nur für die als Druck sich

---

*) Ueberhaupt ist diese **Reibung** nicht nur dem practischen Mechaniker, sondern auch dem theoretischen eine unwillkommene Erscheinung, da ihre Wirkung keine unabhängige und von ganz anderer Art ist, wie die der bewegenden Kräfte, und wie wenig sich selbst ein **Poisson** und Andere nach ihm, wie Professor **Burg** und Dr. **Broch**, über diese Wirkung klar zu machen wußten, zeigen die bisher gänzlich verfehlten Untersuchungen über die unter dem Einflusse der Reibung statthabende Bewegung einer Kugel oder eines Cylinders auf einer horizontalen oder geneigten Ebene, für welche man die richtigen Gesetze am Ende des zweiten Bandes finden wird.

äußernden Wirkungen der Kräfte gelten können, auch auf die als Bewegung sich äußernden Wirkungen angewendet, man hat auch unter dem Namen: **Mechanik fester Körper** sowohl die Gesetze für das Gleichgewicht und die Bewegung eines materiellen Punktes, welche doch für die Mechanik der Flüssigkeiten nicht weniger nothwendig sind, dann diejenige für starre unveränderliche Körper, und diejenige für elastische, biegsame und überhaupt für veränderliche Körper und Verbindungen von Körpern zusammengestellt, obgleich die Verhältnisse je nach dieser verschiedenen Beschaffenheit ganz verschieden sind, so daß man darnach nicht mehr einsieht, warum man überhaupt noch eine Abtheilung macht, und die Mechanik der Flüssigkeiten von der Mechanik der festen Körper trennt. Der Aggregatzustand allein kann an und für sich für die Mechanik ebenso wenig einen Eintheilungsgrund abgeben, wie für die andern Zweige der Naturlehre; nur insofern sich aus ihm eine wesentliche Verschiedenheit in den Gesetzen des Gleichgewichts und der Bewegung ergibt, kann derselbe als Eintheilungsgrund mit auftreten. So wie man daher die beiden Aggregatzustände der flüssigen Form, die früher getrennt waren, wieder vereinigt hat, weil sie im Allgemeinen derselben Betrachtungsweise unterliegen, so muß man die festen Körper und ihre Verbindungen gerade in zwei verschiedene Klassen trennen, je nachdem man sie als starre und unveränderliche betrachtet, oder der Gestalt nach als veränderlich, als biegsam und elastisch annimmt, weil sie nach diesen verschiedenen Annahmen ganz verschiedenen Betrachtungsweisen unterworfen werden müssen, umsomehr als schon die Forderungen, welche unter der letztern Voraussetzung an die Mechanik gestellt werden, meistens ganz anderer Art sind, als die, welche man bei der ersten Annahme machen kann.

Von diesen Ansichten ausgehend, habe ich es denn für nothwendig gefunden, die rationelle Mechanik in **vier Bücher** einzutheilen, und unter folgenden Gesichtspunkten zu betrachten.

Das **erste Buch**, welches mit der Einleitung den vorliegenden ersten Band unseres Werkes bildet, enthält die **Mechanik des materiellen Punktes**, und vereinigt darin diejenigen durch Abstraction gewonnenen Lehrsätze welche den drei folgenden Büchern zur Grundlage dienen, wie in der Geometrie die aus den räumlichen Verhältnissen abstrahirten Lehrsätze über die Gerade und die Winkel den Untersuchungen der räumlichen Verhältnisse selbst zu Grunde gelegt sind.

Das **zweite Buch**, für sich allein den zweiten Band einnehmend, wird die **Mechanik fester Systeme von materiellen Punkten** enthalten, insofern die Bezeichnung: fest nicht dem flüssig entgegensteht, sondern die Bedeutung: unwandelbar oder unveränderlich hat; es untersucht demnach die Gleichgewichtsbedingungen und die Bewegungsgesetze für solche Körper und unter der Einwirkung solcher Kräfte, bei welchen und durch welche die ursprüngliche Gestalt keine wesentliche Aenderung erleidet.

Das **dritte Buch** dagegen ist der **Mechanik veränderlicher Systeme** gewidmet, d. h. solchen Untersuchungen über Gleichgewicht und Bewegung eines Systems von materiellen Punkten, bei welchen gerade die Aenderung der Gestalt des Systems besonders berücksichtigt wird, oder doch von wesentlichem Einflusse ist, bei denen jedoch noch vorausgesetzt wird, daß diese Aenderung in der Gestalt nur nach bestimmten Gesetzen und Bedingungen statthaben kann, also namentlich durch die Cohäsion bedingt wird. Es wird daher zuletzt

das **vierte Buch** in der **Mechanik flüssiger Systeme** solche Systeme von materiellen Punkten betrachten, bei welchen die gegenseitige Lage dieser letztern an keine Bedingung gebunden und die Cohäsion unwahrnehmbar geworden ist. Diese beiden letzten Bücher wird der dritte Band in sich vereinigen.

Das erste Buch, von dessen Inhalt und Anordnung ich hier noch Rechenschaft zu geben habe, zerfällt in drei Abschnitte. — Im ersten derselben habe ich, immer vom Einfachen zum Zusammengesetzten fortgehend, die Lehre von der **Zusammensetzung und Zerlegung der an demselben Punkte angreifenden Kräfte**, welche ich **fördernde Kräfte** genannt habe, weil sie nur eine **fortschreitende** Bewegung erzeugen, vorgetragen, und dieselbe, wie auch die folgenden Lehren, durch einige Beispiele unterstützt, wie ich sie meinen Schülern von Monat zu Monat um das Vorgetragene einzuüben, zur Auflösung vorlege, welche nämlich nicht nur geeignet sind, diese vorgetragenen Lehren durch die Anwendung zu erläutern und das Verstehen derselben zu fördern, sondern auch Gelegenheit geben, die Lehren der reinen Mathematik und selbst der darstellenden Geometrie anzuwenden, und die Berechnung gegebener Fälle einzuüben. Denn ich weiß aus der Erfahrung, wie unfruchtbar die Vorträge solcher Lehrer sind, welche sich damit begnügen, die Lehren der Mechanik allgemein vorzutragen,

ohne sie auf gegebene Fälle anzuwenden und anwenden zu lassen, wie wenig die Schüler derselben zur Erkenntniß des Gebrauches jener Lehren gelangen und welchen Schrecken denselben in Zahlen ausgedrückte Aufgaben einflößen, während doch gerade die Berechnung solcher Aufgaben der Endzweck der angewandten Mathematik und besonders der technischen Mechanik ist. Es dürfte deßhalb selbst Mancher eine noch größere Anzahl solcher Aufgaben wünschen; dazu war aber der Raum zu beschränkt, und ich habe deßhalb später nur von Zeit zu Zeit solchen Aufgaben Zahlenbeispiele beigefügt, bei deren Berechnung wieder neue Umstände zu beachten sind.

Der zweite Abschnitt enthält die Untersuchung der **Gleichgewichtsbedingungen** eines materiellen Punktes und zwar mit steter Rücksicht auf die **Reibung** und die Anschaulichkeit der Ergebnisse in einer Ausführlichkeit und Allgemeinheit, welche ich wenigstens in den bisherigen Lehrbüchern sehr vermißte, welcher zwar von Manchem, der über die Sache hinaus zu sein glaubt, der Vorwurf der Breite gemacht werden dürfte, welche aber Denjenigen, die mein Werk zum Selbststudium gebrauchen wollen, sehr zu Gute kommen wird. Am Schlusse dieses Abschnittes habe ich denn auch das **Princip der virtuellen Geschwindigkeit**, das ich wegen seiner wissenschaftlichen Bedeutung aufzunehmen für nothwendig hielt, obgleich ich demselben im Allgemeinen, wegen seiner geringen Anschaulichkeit, für die Anwendung nur einen geringen Werth beizulegen vermag, insoweit es den materiellen Punkt betrifft, auf seinen wahren Ausdruck zurückgeführt.

Im dritten Abschnitte habe ich ebenso umfassend die Lehre von der **Bewegung** des materiellen Punktes behandelt, und denselben zur größern Uebersichtlichkeit und klaren Anschauung der Verhältnisse in vier Kapitel eingetheilt, von denen das erste wieder mit der einfachsten Bewegung, nämlich der **geradlinigen** beginnt, da sich durch diese die Beziehungen zwischen der Beschleunigung der Bewegung und der Kraft am einfachsten ergeben, und sich auf sie auch die folgenden Untersuchungen stützen. Ich habe hier, wie ich glaube zuerst, für die Beziehungen zwischen den Functionen, welche die Lage, die Geschwindigkeit des Bewegten und die bewegende Kraft ausdrücken, eine strenge Ableitung, und diesen Beziehungen selbst durch meine den Differentialquotienten unterlegte natürliche Bedeutung eine Anschaulichkeit gegeben, welche bisher

gänzlich gefehlt hat, und wie ich hoffe, dem angehenden Mechaniker das Verstehen derselben wesentlich erleichtern wird.

Im zweiten Kapitel folgt die **freie, unbeschränkte Bewegung** des materiellen Punktes. Auch hier habe ich es für nothwendig erachtet, einen neuen Gang einzuschlagen, um zu den allgemeinen Beziehungen zwischen der bewegenden Kraft, der Geschwindigkeit und der Lage des Bewegten zu gelangen. Dazu ging ich von dem Satze aus, daß die Wirkung der Kraft in der Aenderung der Bewegung bestehe, und zwar bei der freien Bewegung sowohl in der Aenderung der Richtung, als in der Aenderung der Geschwindigkeit derselben, daß es also, um die Verhältnisse natürlich zu betrachten, und die Gesetze auf natürlichem Wege abzuleiten, vor Allem nothwendig sei, zu untersuchen, welcher Theil der Kraft auf die Aenderung der Geschwindigkeit, und welcher auf die Aenderung der Richtung verwendet wird, weil sich damit die Gesetze der Bewegung unmittelbar ergeben müssen. In der geradlinigen Bewegung war schon der Fall untersucht worden, wo die Richtung der Bewegung ungeändert blieb und die Kraft nur eine Aenderung der Geschwindigkeit, eine Beschleunigung der Bewegung zu erzeugen hatte; es war also noch ein einfacher Fall zu untersuchen, wo die Geschwindigkeit sich nicht ändert, und die Kraft nur eine Aenderung in der Richtung der Bewegung zu bewirken hat, um daraus auf die dazu nothwendige Eigenschaft und das entsprechende Maaß der Kraft zu schließen; dazu diente die gleichförmige Bewegung im Kreise, bei welcher die Aenderung in der Richtung fortwährend dieselbe ist, die Kraft also eine constante sein muß, wie bei der gleichförmig beschleunigten geradlinigen Bewegung. Nachdem auf diese Weise die Bedeutung und das Maaß der tangentialen und der normalen Componenten der bewegenden Kraft erkannt, und damit die Gesetze der Bewegung abgeleitet sind, werden diese in möglichster Vielseitigkeit betrachtet und angewendet, und die Ergebnisse durch Construction anschaulich gemacht. So habe ich unter Anderm eine constructive Lösung des Keppler'schen Problems gegeben, und die Gesetze der Planetenbewegung auch auf die Untersuchung der Bewegung eines frei fallenden Atoms mit Rücksicht auf die Bewegung der Erde und die Veränderlichkeit der Schwere angewendet; auch habe ich nach dem Beispiele von **Duhamel** die von einer Kraft, welche der dritten Potenz der Entfernung verkehrt proportional ist, erzeugte Bewegung eines materiellen Punktes aufgenommen, weil diese Untersuchung mehrere sehr einfache Ergebnisse bietet.

Das dritte Kapitel behandelt die **gezwungene Bewegung** des materiellen Punktes, also die Bewegung in vorgeschriebener Bahn und auf einer festen Fläche. Ich habe mich hier, nach der Ableitung der allgemeinen Gleichungen für die Bewegung in vorgeschriebener Bahn, bemüht, den Begriff der sogenannten **Centrifugalkraft,** mit welcher in der angewandten Mechanik noch vielerlei Mißbrauch getrieben wird, möglichst klar zu machen, und habe es deßhalb auch für nothwendig gefunden, für jenen Namen, welcher namentlich den Anfänger so leicht zu einer falschen Vorstellung verleitet, die richtige Benennung: **dynamischer** oder **Bewegungs-Druck** einzuführen, durch welche, wie ich glaube, jene Verwechslung eines von dem bewegten Körper auf das ihn in seiner Bewegung beschränkende Hinderniß ausgeübten Druck mit einer unabhängigen, Geschwindigkeit oder Bewegung erzeugenden Kraft beseitigt werden dürfte. — Die allgemeinen Gleichungen finden dann eine lehrreiche Anwendung in der umfassenden Untersuchung der Bewegung eines schweren Punktes im Kreise und der Cycloide und der Bestimmung derjenigen Linie, in welcher derselbe herabfallen muß, um Bogen von ungleicher Länge in gleichen Zeiten zu durchlaufen, oder von einem gegebenen Punkte ausgehend einen zweiten gegebenen Punkt in kürzester Zeit zu erreichen. Die erste dieser Bestimmungen habe ich, wie schon bemerkt, auf einem neuen Wege, mittels der Homogeneität der Größen, und die zweite, wie ich mir schmeichle, mit einer bisher entbehrten Klarheit und Anschaulichkeit durchgeführt. — Mit gleicher Sorgfalt habe ich auch die bei der Bewegung auf einer festen Fläche stattfindenden Verhältnisse erörtert und daran die Bedeutung und Anwendung des **Princips der kleinsten Wirkung** angeschlossen. Der Betrachtung besonderer Fälle, welche sich wegen der Schwierigkeiten der Rechnung auf die Untersuchung der Bewegung auf einer Ebene und einer Kugelfläche beschränkt, habe ich noch die Auflösung der Aufgabe angereiht, die Curve zu bestimmen, längs welcher ein schwerer Punkt auf einer gegebenen Fläche herabfallen muß, um in kürzester Zeit von einem gegebenen Punkte dieser Fläche zu einem andern gegebenen Punkte derselben zu gelangen.

Das vierte Kapitel endlich enthält eine umfassende Untersuchung der **relativen Bewegung** des materiellen Punktes, von welcher man bei **Poisson** und **Duhamel** nur nothdürftige Andeutungen und, soviel mir bekannt, nur bei **Corioli** eine weitere Ausführung,

aber nirgends eine Anwendung findet. Ich habe deßhalb diese Untersuchung nicht nur auf mehrere einfache Fälle, unter andern auf die relative Bewegung eines gegen die Erde fallenden schweren Atoms, angewendet, sondern auch auf die **gezwungene** relative Bewegung ausgedehnt und diese mit Beispielen erläutert, welche bei der Theorie der Turbinen und Ventilatoren ihre Anwendung finden werden, und zugleich als bemerkenswerthe Uebungen in der Integration der höhern Differentialgleichungen dienen können.

Diese Darlegung der Art und Weise, wie ich meinen Zweck in diesem ersten Bande zu erreichen suchte, möge genügen, um das vorliegende Werk der Beachtung aller Freunde einer strengen und dabei anschaulichen Auffassung der mathematischen Wahrheiten zu empfehlen, und zu zeigen, daß ich bei der Ausarbeitung desselben nicht von einem Streben nach sogenannter Originalität, sondern blos von dem Wunsche geleitet wurde, die höhere Mathematik und die streng begründete Mechanik durch vermehrte Anschaulichkeit zugänglicher zu machen, und die allgemeinere Verbreitung dieser Wissenschaften zu befördern. Es wird nun an den Lehrern der höhern Analysis sein, diese meine Absicht durch die Annahme und Verbreitung der von mir zu Grunde gelegten natürlichen und anschaulichen Bedeutungen von den Differentialquotienten und Integralien zu unterstützen; denn ich wage zu hoffen, daß sich dadurch die Kenntniß der höhern Mathematik, dieses unentbehrlichen Werkzeuges für die gründliche Erkennung, Erweiterung und Anwendung der Mechanik, und mit ihr diese selbst in kurzer Zeit in einem ähnlichen Verhältnisse verbreiten wird, wie dieses in den letzten fünfzig Jahren mit der elementaren Mathematik und Mechanik der Fall gewesen ist.

Augsburg im Januar 1851.

G. Decher.

Inhalt
des ersten Bandes.

Einleitung.

*

Erstes Buch.

Mechanik des materiellen Punktes.

Erster Abschnitt.

Zusammensetzung und Zerlegung der fördernden Kräfte.

Zweiter Abschnitt.

Gleichgewicht des materiellen Punktes.

V. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für einen materiellen Punkt.

Dritter Abschnitt.

Bewegung des materiellen Punktes.

Erstes Kapitel.

Geradlinige Bewegung.

Zweites Kapitel.

Freie Bewegung des materiellen Punktes.

Drittes Kapitel.

Gezwungene Bewegung des materiellen Punktes.

I. Bewegung in vorgeschriebener Bahn.

II. Bewegung auf einer festen Fläche.

Viertes Kapitel.

Relative Bewegung des materiellen Punktes.

Berichtigungen.

Seite	Zeile	Fehler	Berichtigung
63	6 v. o.	$dx^2 + dy^2 + dy^2$	$dx^2 + dy^2 + dz^2$
63	7 „ „	$ds\, d^2s$	$ds\, ds^2$
74	6 „ „	$\frac{dy}{xp}$	$\frac{dy}{dx}$
97	1 v. u.	$\frac{d.\frac{dy}{ds}}{dz}$	$\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds}$
98	2 v. o.	$\frac{d^2y}{d^2x}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
101	5 v. u.	$\frac{dx}{dx}$	$\frac{dy}{dx}$
120	10 v. o.	$\vartheta\sqrt{\ldots}$	$\partial\sqrt{\ldots}$
194	17 „ „	Anfangs-	Angriffs-
205	3 v. u.	$\overline{MT^2} - \overline{MT^2}$	$\overline{MT^2} - \overline{BT^2}$
276	8 u. 10 „ „	$\frac{d\,.\,u_z}{dt}$	$\frac{du_z}{dt}$
301	12 v. o.	Die zweite	Die andern
335	1 „ „	$+\frac{C^2}{r^2}$	$-\frac{C^2}{r^2}$
356	15 „ „	$1 + \cos n$	$1 + \cos u$
440	5 v. u.	$\frac{dz}{ds}$	$\frac{dz}{dx}$

Einleitung.

Einleitung.

§. 1.

Die Veränderungen, welche wir in dem örtlichen Befinden der uns umgebenden Körper oder ihrer Theile in Folge der Einwirkung äußerer Ursachen eintreten sehen, sind bestimmten Gesetzen unterworfen, deren Erforschung Gegenstand der Wissenschaft ist, welche den Namen Mechanik führt. Diese Wissenschaft bildet einen Theil der Naturlehre, und zwar die Grundlage derselben, da alle übrigen Theile sich umsomehr auf sie stützen, je weiter wir in der Erkenntniß der Naturerscheinungen fortschreiten, so daß diese immer mehr als Anwendungen der Mechanik behandelt werden können und müssen. Während nämlich die Mechanik selbst jene Ursachen, die wir im Allgemeinen mit dem Namen Kräfte bezeichnen, blos hinsichtlich der Intensität ihrer Wirkungen vergleicht, und unbekümmert um die besondere Natur derselben, stellen die andern Zweige der Physik diese Kräfte gerade nach ihren unterscheidenden Wirkungsarten dar, und suchen aus den wahrgenommenen Wirkungen oder Erscheinungen auf die besondere Natur ihrer Ursachen zu schließen und den Zusammenhang einer ganzen Klasse von Erscheinungen unter sich und mit einer gemeinschaftlichen Ursache zu ermitteln. Eine dieser Klassen von Erscheinungen: die Wirkungen der Schwere oder Gravitation, ist indessen allgemein in die Mechanik selbst aufgenommen worden, theils weil durch sie die Gesetze dieser Wissenschaft erkannt wurden, theils auch weil sie die einfachsten Beispiele für die Anwendung dieser Gesetze darbieten.

§. 2.

Unsere allgemeinsten Vorstellungen über die Körperwelt, welche der ganzen Naturlehre, also auch der Mechanik zu Grunde liegen, und die wir als Eigenschaften auf die Körperwelt und ihre Veränderungen über=

tragen, sind die Begriffe der Ausdehnung und Dauer. Diese Begriffe entstehen in uns mit dem Bewußtsein und sind zu einfach und zu allgemein, als daß sie strenge definirt werden könnten. Wie viele andere Begriffe, so erheben wir auch diese in unserer Vorstellung zur Selbstständigkeit, die Ausdehnung wird Raum, die Dauer wird Zeit, und da wir uns weder für die Ausdehnung noch für die Dauer nothwendige Grenzen denken können, so stellen wir uns auch den Raum und die Zeit als Größen vor, welche alles Bestehende gleichsam umfassen und umschließen, welche grenzenlos oder unendlich sind. — Unser Vorstellungsvermögen ist indessen viel zu schwach, diese Größen auf einmal vollständig und in stetigem Zusammenhange zu erfassen; wir denken uns immer nur einzelne Theile oder Abschnitte von dem Raume und der Zeit, und selbst diese nicht immer als stetige Größen, sondern meistens wieder aus kleineren Theilen bestehend, die wir Maaße oder Einheiten der Ausdehnung oder Dauer nennen; denn dieses Eintheilen größerer Raum- und Zeit-Abschnitte in kleinere, für unsere Vorstellung leichter zu erfassende, setzt uns in den Stand, größere Abschnitte mit diesen und unter sich zu vergleichen oder sie zu messen.

Aber auch in solcher Weise ist unser Geist nicht vermögend, sich die räumliche Ausdehnung geradezu klar vorzustellen; durch ein dunkles Gefühl, ich möchte sagen durch eine Art von Instinct geleitet, abstrahirt sich derselbe an der räumlichen Ausdehnung gewöhnlich drei Ausdehnungen nach geraden unter sich rechtwinkligen Richtungen, lineare oder Längenausdehnungen, und überzeugt sich dann durch die Lehrsätze der Geometrie, welche darthun, daß jede räumliche Ausdehnung durch drei unter sich rechtwinklige Längenausdehnungen gemessen werden kann, von der Richtigkeit dieser Abstraction. Demgemäß nehmen wir denn auch die räumliche Ausdehnung oder den Rauminhalt des einfachsten geometrischen Körpers, des Würfels, da derselbe drei gleiche unter sich rechtwinklige Längenausdehnungen besitzt, als Maaßeinheit für die räumliche Ausdehnung oder den körperlichen Raum an, und zwar denjenigen Würfel, bei welchem diese Längenausdehnung, die Kante des Würfels, der Einheit für die Längenausdehnung gleich ist.

Durch die Verbindung zweier Längenausdehnungen bilden wir uns ebenso ein Maaß für die Flächenausdehnung oder den Flächeninhalt, und wählen dazu eine der sechs gleichen ebnen Flächen oder Quadrate, von welchen der vorhergenannte Würfel begrenzt wird, deren beide rechtwinklige Längenausdehnungen also ebenfalls der Einheit für die Längenausdehnung gleich sind. Es reicht demnach hin, eine Einheit für die Längenausdehnung, ein Längenmaaß festzusetzen, indem aus ihm die

Einheiten für die Flächen- und Raumausdehnung gebildet werden. — Solche Längenmaaße sind der Meter und seine Unterabtheilungen, welche in der Folge ausschließlich angewendet werden sollen.

Einfacher als der Begriff der räumlichen Ausdehnung ist der Begriff der Zeit oder Dauer, da diese in unserer Vorstellung nur einer Längenausdehnung entspricht. Die Haupteinheit derselben ist der mittlere Sonnentag; häufiger aber wendet man in der Naturlehre eine seiner Unterabtheilungen, die Stunde, Minute oder Sekunde an.

§. 3.

Die Mechanik betrachtet indessen die Körper nicht blos als abgegrenzte Theile des Raumes von bestimmter Gestalt, wie die Geometrie, sondern sie findet diesen Raum oder diese geometrische Form ausgefüllt mit irgend einem Stoffe, der jeden andern aus demselben Raume ausschließt, obgleich er diesen nicht ausschließlich für immer in Besitz nimmt, sondern von jedem andern daraus verdrängt werden kann, so daß mit dem Begriffe Stoff oder Materie nothwendig jene der Raumerfüllung und der Undurchdringlichkeit verbunden sind. Die Quantität des von den geometrischen Grenzen eines Körpers eingeschlossenen Raumes wird dessen Rauminhalt oder Volumen genannt, die Quantität des ausfüllenden Stoffes dagegen seine Masse.

Die Erfüllung des Raumes durch die Materie ist nach unsern bis jetzt darüber erlangten Kenntnissen nicht stetig und untheilbar, sondern besteht in einer Anhäufung oder Verbindung von Stofftheilchen, die bei weitem kleiner sind als jede Größe, welche wir wahrzunehmen oder selbst uns vorzustellen vermögen, die wir aber den Erfahrungen der Chemie zufolge in Gestalt und Größe als unveränderlich annehmen und deßhalb Atome nennen. Die Atome der verschiedenen Körper besitzen wahrscheinlich nicht alle dieselbe Gestalt und Größe, in der Mechanik werden wir jedoch die Verschiedenheit dieser Eigenschaften, über welche wir ohnehin nichts Näheres wissen, ganz unbeachtet lassen, und uns die Atome unter dem Namen: materielle Punkte, so klein es unserer Vorstellung möglich ist, und in einer beliebigen einfachen Gestalt, als rechtwinklige Parallelepipede oder als Kügelchen denken. Während also der Physiker und Chemiker die Körper als Aggregate von gleichartigen oder ungleichartigen Atomen betrachtet, sind sie für uns Systeme von materiellen Punkten.

§. 4.

Es ist ferner einleuchtend, daß durch bloße Anhäufung von Atomen kein Körper von einer bestimmten Gestalt gebildet werden kann; es

müssen also gewisse Kräfte vorhanden sein, welche die Atome in einer bestimmten Lage gegen einander fest= und zusammenhalten. Den Inbegriff dieser unbekannten Kräfte denken wir uns als eine einzige Kraft, welche wir Cohäsionskraft nennen. Die Erfahrung führt uns aber auch zu der Annahme, daß die Atome eines Körpers nicht in unmittelbarer Berührung stehen, sondern Zwischenräume zwischen sich lassen, deren Größe sehr veränderlich ist, und bei vielen so klein, daß sie wohl nur mit jener der Atome selbst verglichen werden kann. Um uns demnach die Bildung der Körper zu erklären, müssen wir eine neue Ursache oder Kraft zu Hülfe nehmen, welche sich der unmittelbaren Vereinigung der Atome widersetzt und gewöhnlich Repulsionskraft genannt wird. Die Wirkungen, welche wir dieser Kraft zuschreiben, sind indessen ganz dieselben, wie die der Wärme, und es genügt deßhalb, diese letztere selbst als jene trennende Kraft anzunehmen. Denn unter ihrem Einflusse sehen wir nicht nur die Körper ihr Volumen vergrößern, sich ausdehnen, was nur durch größere gegenseitige Entfernung der an Größe unveränderlichen Atome geschehen kann, sondern wir sehen auch durch sie die Wirkungen der Cohäsionskraft in der Art beeinträchtigt werden, daß die Körper in drei in dieser Beziehung wesentlich verschiedenen Zuständen, gewöhnlich Aggregatzustände genannt, auftreten.

Die Körper sind nämlich bei gewöhnlicher Temperatur entweder feste, wie die Metalle, Steine, u. a., d. h. sie besitzen eine bestimmte Gestalt und ein bestimmtes Volumen und setzen der Veränderung derselben einen größern oder kleinern Widerstand entgegen, so daß bei ihnen die Cohäsionskraft als die überwiegende angesehen werden muß. Oder sie sind flüssig, wie das Wasser, der Weingeist, das Quecksilber, u. a., und fügen sich leicht und ohne merklichen Widerstand in jede gegebene Form, besitzen aber noch ein bestimmtes Volumen und scheinen ohne Einwirkung fremder Kräfte immer eine eigene Form: die Kugel= oder Tropfengestalt annehmen zu wollen, woraus geschlossen werden kann, daß bei ihnen die Cohäsionskraft durch die trennende Kraft beinahe völlig aufgehoben ist, ohne jedoch ganz unwirksam zu sein. Oder die Körper sind gasförmig, wie die atmosphärische Luft, die Gase und Dämpfe, und besitzen weder eine bestimmte Gestalt noch ein bestimmtes Volumen, sondern vielmehr das Bestreben, jeden gegebenen Raum auszufüllen; wenigstens hat die Erfahrung in dieser Beziehung noch keine Grenzen gezeigt. Bei diesen Körpern scheint also kaum eine Spur von Cohäsionskraft vorhanden zu sein. Die beiden letzten Aggregatzustände begreift man oft zusammen unter dem Namen: Flüssigkeiten und unterscheidet sie dann als tropfbar=flüssig und als ausdehnsam oder elastisch=

flüssig. Die Erfahrung zeigt nun, daß sehr viele feste Körper durch Mittheilung von Wärme, und nur durch diese in den flüssigen und selbst gasförmigen Zustand versetzt werden können, sowie die flüssigen ihrerseits durch Mittheilung von Wärme in den gasförmigen und durch Entziehung derselben in den festen Zustand übergehen, und ebenso viele gasförmige Stoffe durch Verminderung ihrer Temperatur in die beiden ersten Aggregatzustände zurückkehren. Wir werden durch diese Erfahrungen zu dem Schlusse geführt, daß wenn diese Verwandlungen nicht für alle Körper erreicht werden können, es entweder an der erforderlichen Mittheilung oder an der nothwendigen Entziehung von Wärme fehlt, daß also diese neben der Cohäsionskraft die einzige Ursache der verschiedenen Aggregatzustände sein mag.

§. 5.

Aus dem Vorhergehenden folgt weiter, daß die Quantität der Materie, welche einen Körper bildet, sehr verschiedene Quantitäten an Raum erfüllen, oder bald ein kleineres, bald ein größeres Volumen einnehmen kann, daß also umgekehrt ein und derselbe Körper in demselben Raume verschiedene Quantitäten an Materie enthalten wird. Die Erfahrung lehrt aber auch, daß dieses nicht nur bei Körpern der Fall ist, die aus demselben Stoffe bestehen, je nach den verschiedenen Quantitäten von Wärme, welche in ihnen wirksam ist, sondern daß es noch in viel höherem Grade bei solchen Körpern gegenseitig stattfindet, welche aus verschiedenartigen Stoffen gebildet sind, so daß diese unter demselben Volumen sehr verschiedene Quantitäten an Stoff oder Masse einschließen. Wenn dann ein Körper in demselben Raume mehr Masse enthält, oder wenn seine Masse ein kleineres Volumen einnimmt, stellt man sich die kleinsten Theilchen in geringerer gegenseitiger Entfernung oder dichter zusammengedrängt vor, man nennt ihn oder eigentlich seine Masse daher dichter als die eines Körpers, der in demselben Volumen weniger Masse enthält. Daraus bildet sich zuerst der Begriff der Dichte als allgemeine Eigenschaft der Körper, und dann der der mathematischen oder meßbaren Dichte, welcher offenbar auf dem Verhältnisse der erfüllenden Masse zu dem erfüllten Raume beruht und zu diesem Verhältnisse selbst wieder in geradem Verhältnisse steht. Ist der Körper durchaus gleichartig oder homogen und seine Dichte in allen Theilen dieselbe, so ist auch jenes Verhältniß durchaus dasselbe, und demnach seine Masse seinem Volumen proportional.

In diesem Falle findet man die Dichte sehr häufig als die in der Einheit des Volumens enthaltene Masse erklärt. Durch diese Erklärungsart

werden aber die Begriffe verwirrt; denn Masse ist nicht Dichte, und Dichte nicht Masse; es kann eine Masse nur wieder durch eine Masse und irgend eine Dichte nur wieder durch eine Dichte gemessen werden, welche man als Einheit für die Dichte angenommen hat. Natürlich ist es am einfachsten, für diese Einheit die Dichte eines Stoffes anzunehmen, welcher in der Einheit des Raumes die Einheit der Masse enthält, und in diesem Falle wird die Dichte und die in der Raumeinheit enthaltene Masse durch dieselbe Zahl ausgedrückt. Für Stoffe, welche aus ungleichartigen Theilen bestehen und in welchen die Dichte von einem Punkte zum anderen nach einem gewissen Gesetze sich ändert, kann das Maaß der Dichte für einen gegebenen Punkt erst später erörtert werden, sowie auch die Feststellung der zweckmäßigsten Einheit für die Masse erst bei der Lehre von der Bewegung eines materiellen Punktes erfolgen kann.

Häufig wird auch die Dichte der verschiedenen Stoffe bei gleicher Temperatur mit derjenigen des Wassers verglichen; das Verhältniß der Dichte irgend eines Stoffes zu der des Wassers heißt dann spezifische Dichte des betreffenden Stoffes; es ist, wie wir später sehen werden, gleichbedeutend mit demjenigen Verhältnisse, welches spezifisches Gewicht genannt wird.

§. 6.

Jeder Körper nimmt in einem bestimmten Zeitpunkte einen bestimmten Ort im Raume ein, und wir können uns denselben unverändert und immerwährend an diesem Orte und in derselben Lage, also in Ruhe denken; wir können uns aber auch vorstellen, daß derselbe ohne die geringste Veränderung an Gestalt, Größe oder seinen sonstigen Eigenschaften zu erleiden, diesen Ort verlasse und nach und nach andere Stellen im Raume einnehme oder doch seine Lage gegen andere Punkte des Raumes fortwährend ändere, also in Bewegung sei. Diese beiden Zustände in dem örtlichen Befinden eines Körpers: Ruhe und Bewegung können wieder in doppelter Beziehung gedacht werden, entweder in Beziehung auf feste unveränderliche Punkte im Raume als absolute Ruhe und Bewegung, oder in Beziehung auf andere selbst in Bewegung begriffene Körper als relative Ruhe und Bewegung. Ob es im Weltraume einen Körper in absoluter Ruhe gibt, ist wenigstens zweifelhaft, da Alles, was wir kennen, in Bewegung ist; Beispiele von relativer Ruhe bieten sich uns jedoch viele dar, wenn wir von den sehr kleinen Bewegungen der kleinsten Körpertheile Umgang nehmen. Die Bewegungen dagegen, welche die Körper besitzen, sind offenbar einmal absolute; so wie wir aber die Bewegungen wahrnehmen, sind sie

auch nur relative, da wir selbst in absoluter Ruhe sein und im Raume unveränderliche Marken haben müßten, um irgend eine Bewegung als absolute zu beurtheilen, Bedingungen, welchen zu genügen gleich unmöglich ist. — Mit dem Begriffe der Bewegung oder Ortsveränderung verbinden wir zugleich die Vorstellung der Zeitdauer, die zu einer bestimmten Veränderung nothwendig ist, und bezeichnen diejenige von zwei Bewegungen, bei welcher dieselben Veränderungen in Ort oder Lage in kürzerer Zeit vor sich gehen, als die geschwindere. Daraus bildet sich ein neuer Begriff: Geschwindigkeit, zuerst wieder als allgemeine Eigenschaft der Bewegungen, und dann als meßbare Größe, welche auf dem Verhältnisse zwischen der räumlichen Ausdehnung der örtlichen Veränderungen und der dazu angewendeten Zeit beruht. Welche Einheit dieser Größe, deren Kenntniß für die Beurtheilung einer Bewegung sehr wesentlich ist, zu Grunde gelegt, und wie dieselbe überhaupt gemessen wird, kann erst später gezeigt werden.

§. 7.

Wie schon berührt wurde, sind die örtlichen Zustände der Ruhe und Bewegung eines Körpers durchaus unabhängig von seiner besondern Beschaffenheit vorhanden, und es ist auch nicht denkbar, daß er selbst irgend einen Einfluß auf das Fortbestehen oder Aufhören dieser Zustände äußere, daß er aus eigener Willkür den Zustand der Ruhe mit dem der Bewegung oder umgekehrt diesen mit jenem vertauschen könne; denn es ist kein Grund vorhanden, warum dies gerade jetzt und nicht früher oder später, warum gerade in dieser und nicht in einer andern Weise geschehen solle. *) — Die Erfahrung bestätigt diese Vorstellungen. Wir finden bei aufmerksamer Beobachtung immer eine äußere Ursache für die Veränderungen in dem örtlichen Befinden eines Körpers, nicht nur für jede Erzeugung von Bewegung, was jedem gesunden Sinne einleuchtend ist, sondern auch für jede Abänderung und Vernichtung derselben, was zwar

*) Natürlich hat man hier hauptsächlich unorganische Körper im Auge. Die Ausnahme indessen, welche die organischen Körper, insbesondere die mit sogenannter willkürlicher Bewegung ausgestatteten Thiere von diesem Satze zu machen scheinen, rührt wohl nur daher, daß hier die nächsten Ursachen der Bewegung für uns zu sehr zusammengesetzt sind, um den verbindenden Faden zwischen Ursache und Wirkung zu erkennen. Soviel kann indessen behauptet werden, daß kein Thier eine Bewegung beginnt oder ändert ohne eine äußere Veranlassung. Ob dasselbe auch von dem Menschen behauptet werden darf, wollen wir hier dahingestellt sein lassen.

einer oberflächlichen Erfahrung zu widersprechen scheint, welche zeigt, daß die in Bewegung gesetzten Körper allmählig zur Ruhe kommen, wenn die Ursachen der Bewegung zu wirken aufhören; was aber bei genauer Untersuchung umsomehr bestätigt wird, je mehr wir die vorher nicht beachteten Hindernisse der Bewegung beseitigen. Nach diesen Erfahrungen machen wir denn auch einen Unterschied zwischen den Ursachen oder Kräften, die einen Einfluß auf die Bewegung eines Körpers äußern. Wir belegen diejenige derselben, welche einem ruhenden Körper Bewegung zu ertheilen oder schon vorhandene Bewegung zu begünstigen vermögen, vorzugsweise mit dem Namen: Kräfte, auch bewegende Kräfte. Dagegen heißen solche Ursachen, welche nur eine Verminderung der Bewegung veranlassen oder derselben entgegenwirken, widerstehende Kräfte oder Widerstände; insbesondere nennt man so diejenigen widerstehenden Kräfte, welche nur so lange dauern, als die Bewegung dauert, und die demnach für einen ruhenden Körper nicht vorhanden sind, wie die Reibung und die Widerstände der Flüssigkeiten, in denen sich Körper bewegen.

Die Vorstellung, welche wir uns demnach von dem Verhältnisse der Körper zu ihren örtlichen Zuständen bilden müssen, kann nun so ausgedrückt werden: Ein Körper kann nur durch die Wirkung einer Kraft in Bewegung kommen und dieselbe nur unter dem Einflusse einer neuen Kraft oder eines Widerstandes ändern oder ganz verlieren.

Dieses Unvermögen der Körper, etwas zur Veränderung ihres örtlichen Verhaltens beizutragen, wird gewöhnlich als eine Eigenschaft der Materie und als solche mit dem Namen: Trägheit oder Beharrungsvermögen bezeichnet; bisweilen wird sogar ein Widerstand darunter verstanden, den die Materie den Wirkungen der Kräfte entgegensetzt; mindestens wird dasselbe doch als ein Bestreben der Materie dargestellt, ihren augenblicklichen Zustand der Ruhe oder Bewegung beizubehalten. Ein solches Bestreben wäre aber ein Widerstreben gegen die Veränderung des Zustandes, und erforderte, abgesehen davon, daß es einen Willen von Seite des Körpers voraussetzt, eine gewisse Anstrengung von Seite der wirkenden Kraft, um es zu überwinden, und die Erfahrung lehrt im Gegentheil, daß die kleinste Kraft den größten Körper in Bewegung zu setzen und seine Bewegung, von welcher Art sie auch sei, abzuändern vermag, daß ihre Wirkung auf denselben in ihrem Sinne immer dieselbe ist, in welchem Zustande auch der Körper sich gerade befindet, daß also diese Wirkung sowohl von einem Wollen oder Beharren des Körpers, wie von seinem örtlichen Befinden gänzlich unabhängig ist.

Wenn ein Körper durch irgend eine Kraft in Bewegung gesetzt ist, dann ist diese Bewegung eine Wirkung jener Kraft, und der Körper ist nur noch der Träger dieser Wirkung, welche unverändert fortdauert, bis sie durch Widerstände oder entgegengesetzte Wirkungen anderer Kräfte geschwächt oder ganz vernichtet wird. Was man also Aeußerungen des Beharrungsvermögens oder der Trägheit der Materie zu nennen pflegt, ist nur eine Folge der fortdauernden Wirkungen, die auf denselben Körper früher hervorgebracht oder ausgeübt worden waren; der Körper oder dessen Materie verhält sich ganz passiv dabei.

§. 8.

Die Materie ist indessen nicht blos Trägerin der erzeugten Wirkungen, sie ist zugleich Object für die zu erzeugenden, und diese Wirkungen werden sich deßhalb auch je nach der Verschiedenheit des Objectes verschieden offenbaren.

Zuerst ist es einleuchtend, daß sich die Wirkungen der Kräfte, wenn sie sich durch Erzeugung oder Veränderung von Bewegung wahrnehmbar machen, je nach der Menge des Stoffes oder nach der Masse, auf welche dieselben gerichtet sind, verschieden äußern müssen, und wir werden umgekehrt zu dem Schlusse berechtigt sein, daß die Massen zweier Körper nur dann für gleich zu halten sind, wenn dieselbe Kraft auf beide dieselbe bewegende Wirkung äußert, d. h. wenn sie durch dieselbe Kraft unter denselben Umständen in gleiche Bewegung versetzt werden, so wie wir auf der andern Seite die Wirkungen zweier Kräfte nur für gleiche halten dürfen, wenn sie unter gleichen Umständen auf denselben Körper wirkend, diesem die gleiche Bewegung ertheilen. Ist dieses nicht der Fall, so müssen wir offenbar diejenige von beiden Wirkungen die größere oder stärkere nennen, welche denselben Körper in eine stärkere Bewegung versetzt, nämlich in eine solche, bei welcher dieselben Veränderungen in kürzerer Zeit oder geschwinder vor sich gehen; wir sagen deßhalb, indem wir den Begriff der Geschwindigkeit von der Bewegung auf den bewegten Körper übertragen: durch die größere von zwei Kräften wird demselben Körper eine größere Geschwindigkeit ertheilt, durch die kleinere Kraft eine kleinere Geschwindigkeit.

Daraus folgt weiter, daß wenn dieselbe Wirkung nach einander auf zwei Körper von ungleichem Gehalte an Masse ausgeübt wird, sie demjenigen von beiden die größere Geschwindigkeit ertheilen wird, welcher die kleinere Masse besitzt. Denn wären die Geschwindigkeiten beider

Körper oder ihrer Bewegungen dieselben, so müßten auch ihre Massen gleich sein; wenn aber die Geschwindigkeiten nicht gleich sein können, so kann die des Körpers von größerer Masse noch viel weniger größer sein, als die des Körpers von geringerem Gehalte an Masse, da man unter dieser Voraussetzung für den erstern Körper die Kraft vermindern müßte, um dieselbe Bewegung für beide zu erhalten, und man durch fortgesetzte Vermehrung der Masse und entsprechende Verminderung der Kraft zu dem Schlusse geführt würde, daß eine beliebig kleine, fast verschwindende Kraft der größten denkbaren Masse dieselbe Bewegung ertheilen müßte, wie eine beliebig große Kraft einer verschwindend kleinen Masse, was offenbar absurd ist. — Für dieselbe Kraft nimmt also die Stärke der Bewegung oder deren Geschwindigkeit ab, wenn sie einer größern Masse mitgetheilt werden soll; nimmt aber die Kraft in demselben Verhältnisse zu wie die Masse, so wird die augenfällige Wirkung, die Geschwindigkeit der erzeugten Bewegung immer dieselbe bleiben, und umgekehrt werden wir aus der Gleichheit der Bewegungen verschiedener Körper schließen müssen, daß die Kräfte, welche jene Bewegungen hervorrufen, den Massen dieser Körper proportional sind.

§. 9.

Die Wirkungen der Kräfte äußern sich jedoch nicht immer als Bewegung, und es darf aus der Ruhe eines Körpers oder aus der Unveränderlichkeit seiner Bewegung noch nicht geschlossen werden, daß keine Kraft an demselben thätig sei. Denn es können mehrere Kräfte auf einen Körper in solcher Weise wirken, daß sie ihn in demselben Zustande der Ruhe oder der Bewegung erhalten, in welchen er durch andere Ursachen versetzt worden ist, daß ihre Wirkung also ohne sichtbaren Erfolg bleibt; oder es kann ihre Gesammtwirkung senkrecht gegen die Oberfläche eines vermöge anderer Kräfte unverrückbaren Körpers gerichtet sein und so durch den Widerstand desselben unwahrnehmbar werden. Das Bestreben der Kräfte geht dann immer noch dahin, dem betreffenden Körper die entsprechende Bewegung zu ertheilen, und äußert sich als Druck, welchen die Theile des Körpers und die widerstehende Fläche zu erleiden haben, welcher aber nur durch Aenderungen in der Gestalt des Körpers oder der Fläche wahrnehmbar wird. In beiden Fällen unterscheiden wir diesen Zustand des in Ruhe bleibenden Körpers von dem der ursachlosen Ruhe, welche kein Gegenstand wissenschaftlicher Betrachtung sein kann, durch den Namen: Gleichgewicht, indem wir uns ausdrücken, der Körper befinde sich im Zustande des Gleichgewichtes, sei oder bleibe im Gleichgewicht. Wir übertragen diesen

Begriff endlich auf die Kräfte selbst, und sagen: die Kräfte halten sich im Gleichgewicht, und diesen letztern Ausdruck gebrauchen wir selbst dann, wann der Körper in Bewegung ist und sich die Kräfte gegenseitig wirkungslos machen.

Die Untersuchungen der Bedingungen, unter welchen ein Körper oder ein System von Körpern im Gleichgewicht bleibt, bildet einen wesentlichen Theil der Mechanik; denn es ist die Kenntniß der Gesetze des Gleichgewichts nicht nur für die Erforschung der Gesetze der Bewegung in vielen Beziehungen förderud und selbst nothwendig; es können auch die durch Druck hervorgebrachten Veränderungen in der Gestalt der Körper nur vermöge der Gesetze des Gleichgewichts untersucht werden, sowie auf der andern Seite das Bestehen vieler Werke der Kunst an die Erfüllung der Bedingungen des Gleichgewichts gebunden ist. Man hat deßhalb die Mechanik bisher meistens in zwei wesentlich getrennte Theile zerlegt, in die Statik oder die Lehre vom Gleichgewichte, und in die Dynamik oder die Lehre von der Bewegung. Der erste dieser Theile handelt indessen nicht blos vom Gleichgewicht, sondern auch von der Zusammensetzung und der Zerlegung der Kräfte oder vielmehr ihrer Wirkungen, d. h. von den verschiedenen Vorstellungsarten, welche wir uns über die Gesammtwirkung mehrerer Kräfte, oder über die nach bestimmten Richtungen getrennten Wirkungen einer einzigen Kraft bilden können.

Diese Gesammtwirkung hängt aber ebenso wie die Bedingungen des Gleichgewichts und die Gesetze der Bewegung offenbar von der Natur und Beschaffenheit des Systems von materiellen Punkten ab, an welchem die Kräfte thätig sind, und in dieser Beziehung werden wir zuerst eine wesentliche Verschiedenheit in den Wirkungen der Kräfte wahrnehmen, je nach dem Aggregatzustande, welchem ein Körper angehört, ob er nämlich fest, flüssig oder gasförmig ist. Es stehen sich jedoch die beiden letzten Aggregatzustände in dieser Beziehung einander viel näher, als sie beide dem ersten stehen, weßhalb man auch unsere Wissenschaft mit Rücksicht auf diese Zustände in zwei besondere Abschnitte zu trennen pflegt, nämlich in die Mechanik fester Körper und in die Mechanik der Flüssigkeiten.

Außer den verschiedenen Aggregatzuständen besitzen aber die Körper noch mehrere andere Eigenschaften, bald in höherem, bald in niederem Grade, welche selbst bei den festen eine Veränderlichkeit in der Gestalt begünstigen und dadurch die Wirkungen der Kräfte mehr oder weniger abändern. Die wesentlichsten sind folgende:

1) Die Zusammendrückbarkeit, welche darin besteht, daß die

Körper durch die entgegengesetzten Wirkungen äußerer Kräfte und Widerstände ihren Rauminhalt verkleinern lassen. Diese Eigenschaft ist namentlich bei den gasförmigen Flüssigkeiten in sehr hohem Grade vorhanden und von sehr großem Einflusse; bei den tropfbar-flüssigen Stoffen ist sie dagegen sehr gering und kaum beachtenswerth, während sie bei den meisten festen Körpern zwar ziemlich wahrnehmbar ist, aber bald ihre Grenze erreicht.

2) Die Ausdehnbarkeit oder die Eigenschaft, welche eine Vermehrung oder Vergrößerung des Volumens oder einer Längenausdehnung des Körpers durch mechanische Wirkungen, nämlich ohne Mittheilung von Wärme gestattet. Diese Eigenschaft kann nur festen Körpern zukommen; sie bildet theils allein, theils in Verbindung mit der Zusammendrückbarkeit die Eigenschaft der Biegsamkeit, durch welche es möglich wird, solche Körper, deren eine Längenausdehnung verhältnißmäßig viel größer ist, als die beiden andern oder doch als eine derselben, stärker zu krümmen als es vorher der Fall war. Es ist übrigens sowohl die Ausdehnbarkeit als die Biegsamkeit bei den meisten festen Körpern nur in geringem Grade zu finden und in enge Grenzen eingeschlossen.

3) Die Elastizität oder das Vermögen, die durch äußere Einwirkungen hervorgebrachten Veränderungen der Gestalt und des Volumens wieder auszugleichen, wenn die Kräfte zu wirken aufhören. Auch dieser Eigenschaft sind bei den meisten festen Körpern ziemlich enge Grenzen gesetzt, indem dieselben nur bei sehr kleinen Veränderungen Gestalt und Volumen ganz wieder herzustellen vermögen, und dieses nie mit derselben Kraft, mit der jene Veränderungen erzeugt wurden. Die Flüssigkeiten dagegen und namentlich die gasförmigen sind vollkommen elastisch, und die letztern nehmen nicht nur, wie auch die tropfbaren, fast augenblicklich ihr früheres Volumen wieder an, wenn die drückenden Kräfte zu wirken aufhören, sondern zeigen, wie schon erwähnt wurde, fortwährend ein Bestreben, einen noch größeren Raum auszufüllen; man hat sie deßhalb und wegen ihrer großen Zusammendrückbarkeit vorzugsweise elastische Flüssigkeiten genannt.

Mit Rücksicht auf diese verschiedenen Zustände und die genannten Eigenschaften der Körper, welche einen wahrnehmbaren Einfluß auf die Art und Weise haben, in welcher sich die Wirkungen der Kräfte äußern, sowohl in Betreff ihrer Gesammtwirkung, als der Bedingungen des Gleichgewichtes und der Gesetze der Bewegung werden wir denn auch unsere Wissenschaft unter folgenden vier Gesichtspunkten betrachten:

1) als **Mechanik des einzelnen Atoms oder materiellen Punktes**, die Grundgesetze für die folgenden Abschnitte enthaltend;

2) als **Mechanik fester Systeme**, welche als jeder Veränderung ihrer Gestalt widerstehend vorausgesetzt werden;

3) als **Mechanik veränderlicher Systeme** mit vorherrschender Cohäsion und solchen gegenseitigen Verbindungen, daß die Veränderungen nur nach bestimmten Gesetzen und Bedingungen erfolgen können, und

4) als **Mechanik flüssiger Systeme** von materiellen Punkten, bei welchen die Veränderlichkeit der Lage an kein Gesetz, an keine Bedingung gebunden ist.

§. 10.

Mit dem innern Wesen der Kräfte sind wir durchaus unbekannt, und werden es wahrscheinlich auch bleiben; wir machen uns deßhalb über die Art und Weise, wie eine Kraft wirkt, nach den uns bekannten Erscheinungen folgende Vorstellungen:

1) daß ihre Wirkung unmittelbar nur auf einen bestimmten Punkt des Körpers, welchen sie in Bewegung setzen will, gerichtet ist, daß sie also den Körper in diesem Punkte gleichsam **angreift**, weßhalb er denn auch, durch eine Vertauschung der Begriffe: **Kraft** und **Wirkung** *), **Angriffspunkt** der Kraft genannt wird, und wir denken uns darunter bald einen geometrischen, bald einen materiellen Punkt;

---

*) Der Begriff, welchen wir mit dem Worte: **Kraft** verbinden, ist nämlich bald ein **weiterer**, bald ein **engerer**. Wir bezeichnen damit bald allgemeine Eigenschaften und Erscheinungen und reden von der Anziehungskraft der Erde, der Schwerkraft, von der magnetischen Kraft, Muskelkraft, Expansionskraft des Dampfes, u. s. f., und in diesem Sinne ist das Wort **Kraft** bisher meistens gebraucht worden. Bald verstehen wir darunter die zunächst liegende Ursache einer besondern Erscheinung oder einer Veränderung in dem Zustande eines Körpers und nennen z. B. das Gewicht eines Körpers eine Kraft, reden von der Tragkraft eines Magneten, eines elastischen Stabes, u. s. f., und man sieht leicht ein, daß dieser **engere** Begriff sich zu dem **weiteren** selbst wie **Wirkung** und **Ursache** verhält; denn das **Gewicht** eines Körpers ist die Wirkung der Schwere auf denselben; die Tragkraft eines Stabes ist die besondere Wirkung oder Aeußerung der Elastizität des Stoffes, aus welchem er besteht, je nach seiner Gestalt und Größe, u. s. f.

In diesem engeren Sinne ist von nun an das Wort **Kraft** immer zu nehmen, namentlich wo von einer bestimmten Kraft, oder von einer Kraft von bestimmter Größe oder Intensität die Rede ist.

2) daß diese Wirkung oder Kraft entweder von einem festen Punkte ausgeht, oder sich gegen einen festen Punkt stützt, daß sie ihren Angriffspunkt dem letztern in gerader Linie nähern oder von demselben entfernen will, und daß sie demnach immer längs der Geraden thätig ist, welche ihren Angriffspunkt mit dem festen Punkte verbindet; endlich

3) daß sie mit einer gewissen Stärke oder Intensität auf den betreffenden Körper wirkt.

Wir haben demnach bei jeder Kraft drei wesentliche Stücke in Betrachtung zu ziehen: a) ihren Angriffspunkt, b) die Richtung der Geraden, nach welcher wir sie uns thätig denken, durch Uebertragung auch Richtung der Kraft genannt, womit wir aber auch zugleich den Sinn ihrer Thätigkeit verbinden, nämlich ob sie ihren Angriffspunkt dem festen Punkte zu nähern oder ihn davon zu entfernen bestrebt ist, und c) ihre Stärke, Größe, oder Intensität.

Ueber die Wirkungsart der Widerstände machen wir uns zwar im Allgemeinen etwas andere, bisweilen sehr unbestimmte Vorstellungen; wir werden jedoch bald damit vertraut, uns auch für sie einen bestimmten Angriffspunkt an dem bewegten Körper zu denken, ihnen ebenso eine bestimmte Richtung beizulegen, welche in jedem Augenblicke mit der Richtung der Bewegung zusammenfällt, dieser aber dem Sinne nach entgegengesetzt ist, und den Begriff einer gewissen Stärke oder Intensität mit ihnen zu verbinden.

Es handelt sich demnach zuvörderst darum, diese genannten Stücke als Zahlengrößen auszudrücken, um sie in Rechnung nehmen oder durch Zeichnung anschaulich darstellen zu können.

§. 11.

Der Angriffspunkt einer Kraft, welchen wir in unserer Vorstellung sehr oft von dem Körper trennen, und als selbstständigen materiellen Punkt betrachten, wird in irgend einem Augenblicke durch seine Coordinaten bestimmt, und zwar entweder durch die gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten oder durch Polar-Coordinaten.

Die rechtwinkligen Coordinaten, welche gewöhnlich mit x, y, z bezeichnet werden, drücken die Entfernungen des betreffenden Punktes von drei unter sich rechtwinkligen festen Ebenen, den Coordinaten-Ebenen aus, und die Lage dieses Punktes wird durch drei Gleichungen:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c,$$

bestimmt. Man kann aber diese Werthe auch als die Entfernungen der Projectionen des betreffenden Punktes auf den drei Durchschnittslinien jener Ebenen, welche zusammen die Coordinaten-Achsen genannt

werden, von deren gemeinschaftlichem Durchschnittspunkte, dem **Anfangspunkte** oder dem **Anfang der Coordinaten** betrachten, und sie als die Längen dreier anliegenden Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipeds vorstellen, welches einen Eckpunkt im Anfangspunkt der Coordinaten hat, während der demselben diagonal gegenüberliegende Eckpunkt der zu bestimmende Angriffspunkt ist. So sind in Fig. 1, AX, AY, AZ die Coordinatenachsen oder die Durchschnittslinien der Ebenen XAY, XAZ und YAZ, A der Anfangspunkt und M ein materieller Punkt, dessen Lage bestimmt werden soll; M_1, M_2, M_3 sind seine Projectionen auf den bezeichneten Ebenen, und m_1, m_2, m_3 seine Projectionen auf den drei Achsen, und man hat

$$MM_3 = Am_1 = x = a,$$
$$MM_2 = Am_2 = y = b,$$
$$MM_1 = Am_3 = z = c.$$

Um die Coordinatenachsen einzeln zu bezeichnen, nennt man die Achse AX, auf welcher die Entfernungen x gemessen werden, auch die Achse der x, die Achse AY die der y, die Achse AZ die der z; ebenso wird dann die Ebene XAY, welche die Achsen der x und der y enthält, die Ebene der xy, die Ebene XAZ die Ebene der xz, endlich die Ebene YAZ die der yz genannt.

In vielen Fällen ist es vortheilhafter, die Lage des Angriffspunktes durch seine **Polar-Coordinaten** auszudrücken; diese bestehen dann in dem **Fahrstrahl** (Radius vector) r, welcher die Entfernung des betreffenden Punktes vom Anfangspunkte angibt, also mit der Diagonale des vorher erwähnten Parallelepipeds gleichbedeutend ist, und in den **Winkeln**, welche die Richtung dieser Geraden entweder gegen drei unter sich rechtwinklige feste Achsen, die mit den obenbezeichneten Coordinatenachsen übereinstimmen, oder gegen eine feste Ebene und eine in derselben liegende feste Gerade, die zusammen durch den Anfangspunkt oder **Pol** gehen, feststellen. Im letztern Falle nimmt man die Ebene der xz als die feste Ebene, und die Achse der z als feste Gerade an; man bezeichnet den Winkel des Fahrstrahles r mit der letztern mit ϑ, und den Winkel, den die Ebene des Winkels ϑ mit der festen Ebene bildet, durch ω, und die Lage des betreffenden Punktes ist bekannt, wenn die drei Gleichungen:

$$r = a, \quad \vartheta = \gamma, \quad \omega = \alpha$$

gegeben sind. Zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z und den Polarcoordinaten r, ϑ, ω hat man übrigens folgende leicht nachzuweisende Verbindungsgleichungen:

$$x = r \sin\vartheta \cos\omega, \quad y = r \sin\vartheta \sin\omega, \quad z = r \cos\vartheta,$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Betrachtet man blos Angriffspunkte, welche in derselben Ebene liegen, so kann man diese als die Ebene der xy annehmen; es wird dann für alle $z = 0$, $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ *), und

$$x = r \cos\omega, \quad y = r \sin\omega, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

---

*) Für die Tabellen der Sinus und Tangenten ist bekanntlich der in Grade, Minuten und Sekunden eingetheilte Quadrant als Winkeleinheit angenommen; in der Mechanik kommen aber sehr oft Uebergänge von den Kreisbogen auf die ihnen entsprechenden Winkel und umgekehrt von diesen auf jene vor, weßhalb es hier für die Einfachheit der Ausdrücke nothwendig wird, eine einfachere Beziehung zwischen der Bogenlänge, dem Halbmesser und dem entsprechenden Winkel festzustellen, als diejenige, welche sich mit der obigen Winkeleinheit ergibt. Dazu weiß man, daß sich für gleiche Halbmesser r die Bogenlängen l und l' wie die entsprechenden Winkel α und $\alpha_{,}$ verhalten, und die Bogen l' und $l_{,}$, die demselben Winkel $\alpha_{,}$ entsprechen, aber verschiedenen Kreisen angehören, wie die Halbmesser r und $r_{,}$ derselben, so daß man hat:

$$l : l' = \alpha : \alpha_{,}$$
$$l' : l_{,} = r : r_{,}$$

und demnach auch:

$$l : l_{,} = r\alpha : r_{,}\alpha_{,}.$$

Da nun l und r auf die allgemeine Längeneinheit bezogen sind, so wird man noch für die Winkeleinheit eine passende Annahme treffen dürfen, und es ist offenbar am einfachsten, denjenigen Winkel $\alpha_{,}$, dessen Bogen $l_{,}$ dem Halbmesser $r_{,}$ gleich ist, als Einheit für das Winkelmaaß anzunehmen; denn man hat dann einfach:

$$l : 1 = r\alpha : 1, \quad l = r\alpha, \quad \alpha = \frac{l}{r};$$

der Bogen wird dann durch das Product aus dem Halbmesser in den Winkel, und dieser durch den Quotienten aus dem Bogen durch den Halbmesser ausgedrückt.

Nach dieser Winkeleinheit, welche wir in der Folge immer zu Grunde legen werden, wird der rechte Winkel durch $\frac{1}{2}\pi$, ein Winkel von 30° durch $\frac{1}{6}\pi$, u. s. f. gemessen, und es wäre für die Rechnungen in der Mechanik, wie überhaupt für die höhere Mathematik wünschenswerth, Tabellen der Sinus und Tangenten für die auf diese Einheit bezogenen Winkel zu besitzen. Denn die bisherigen Tabellen machen sehr oft vorkommende Umwandlungen in dem Zahlenwerthe eines Winkels nothwendig, je nachdem man einen Bogen aus seinem Winkel, der durch eine seiner Functionen gegeben ist, zu berechnen

§. 12.

Auf ähnliche Weise, wie die Richtung des Fahrstrahles, kann auch die Richtung einer Kraft bestimmt werden; nur wendet man hier wegen der Symmetrie der analytischen Ausdrücke häufiger die Winkel an, die von jener Richtung mit drei festen Achsen gebildet werden. Man denkt sich nämlich durch den Angriffspunkt der Kraft drei Parallele zu den drei Achsen gezogen, und ermittelt die Winkel α, β, γ, die von diesen Parallelen mit der Geraden gebildet werden, längs welcher die Kraft thätig ist; diese Winkel dienen dann zugleich dazu, den Sinn der

---

hat, oder je nachdem der Bogen gegeben und eine Function des entsprechenden Winkels aus den Tabellen zu entnehmen ist. Zum Zwecke dieser Umwandlungen ist übrigens bekannt, daß unsere Winkeleinheit nach der gewöhnlichen Theilung des Kreises in 360 Grade

$$57^\circ,295766 = 3437',7466 = 206264'',8$$

enthält, und man hat für die meisten Zwecke, namentlich bei der Rechnung mit fünfstelligen Logarithmen, welche wir immer anwenden werden, mit hinreichender Genauigkeit

$$n' = 3437',75 . \alpha, \quad \alpha = \frac{n'}{3437,75},$$

wo n' und α denselben Winkel vorstellen, das erstere nach der gewöhnlichen Theilung in Minuten ausgedrückt, das letztere in Theilen unserer Winkeleinheit. Um also $\cos\alpha$ zu erhalten, muß man in den Tabellen $\cos n' = \cos 3437',75 . \alpha$ aufsuchen, und wenn der Bogen, dessen Tangente t ist, n Minuten beträgt, so daß $t = \tang n'$, so findet man

$$\alpha = \operatorname{arc} \tang t = \frac{n'}{3437,75} .$$

Wäre z. B. $\log\cos\frac{x}{a}$ zu berechnen, und $x = 1^m,75$, $a = 4^m,23$ gegeben, so hat man zuerst

$$n' = 3437',75 . \frac{1,75}{4,23} = 1422',2 = 23^\circ 42',2 ,$$

und damit ergibt sich aus den Tabellen der Sinus

$$\log \cos \frac{x}{a} = \log \cos 23^\circ 42',2 = 9,96173 .$$

Soll dagegen $\alpha = \operatorname{arc} \cos \frac{x}{a}$ berechnet werden, so findet man

$$\log \frac{x}{a} = 9,61670 = \log \cos n' = \log \cos 65^\circ 33',7 = \log \cos 3933',7$$

und damit folgt

$$\alpha = \frac{3933,7}{3437,75} = 1,1443 .$$

Thätigkeit der Kraft anzudeuten, indem man alle Kräfte als ziehende vorstellt und sie als absolute Größen ohne Qualitätszeichen betrachtet; die Richtung einer Kraft wird demnach von ihrem Angriffspunkte immer dahin genommen, wohin sie diesen zu bewegen strebt, und alle Winkel werden von den positiven Seiten der Coordinatenachsen an bis zur Richtungslinie der Kraft hin gemessen.

Ist z. B. M, Fig. 2, ein materieller Punkt, an welchem die Kraft P so angreift, daß sie denselben von M nach P zu bewegen strebt, so nehmen wir an, die Kraft gehe von einem Punkte O auf der Verlängerung der Geraden MP aus und suche ihren Angriffspunkt M gegen O hinzuziehen. Sind dann MA, MB, MC die drei zu den positiven Hälften der Coordinatenachsen parallelen Geraden, so werden die Winkel $AMP = \alpha$, $BMP = \beta$, $CMP = \gamma$ sowohl die Richtung als den Sinn der Kraft P bestimmen, wenn diese immer von den Geraden AM, BM, CM aus gegen die MP hin gemessen werden. Man wird demnach für eine andere Kraft P', welche längs derselben Geraden thätig ist, aber den Punkt M in entgegengesetztem Sinne bewegen oder ihn von O entfernen will, die Richtungswinkel α', β', γ' oder AMP', BMP', CMP' erhalten, und man sieht leicht, daß man

$$\alpha' = \pi - \alpha, \quad \beta' = \pi - \beta, \quad \gamma' = \pi - \gamma$$

hat, daß also auch

$$\cos\alpha' = -\cos\alpha, \quad \cos\beta' = -\cos\beta, \quad \cos\gamma' = -\cos\gamma$$

ist, und demnach die Zeichen der Cosinus der Richtungswinkel den Sinn der Thätigkeit der betreffenden Kraft genügend andeuten.

Um alle möglichen Richtungen der Kräfte darstellen zu können, ist es nothwendig und hinreichend, daß die Winkel α, β und γ zwischen den Grenzen 0 und π genommen werden; der Winkel α hat z. B. seinen kleinsten Werth $= 0$, wenn die Kraft parallel zur Achse der x und zwar im Sinne der positiven x wirkt, den größten $= \pi$ dagegen, wenn sie im Sinne der negativen x thätig ist; alle übrigen Werthe müssen demnach zwischen diese beiden Grenzen fallen. Auf gleiche Weise verhält es sich mit den Winkeln β und γ.

Diese drei Richtungswinkel enthalten aber eine überflüssige Bestimmung und können deßhalb nicht alle drei willkürlich sein; sie stehen vielmehr durch die Bedingungsgleichung:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

in Abhängigkeit von einander, und man sieht daraus, daß wenn α und β gegeben sind, $\cos\gamma$ nur die beiden Werthe:

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}\ ,$$

welche zwei Supplementwinkeln angehören, erhalten kann, daß also von $\cos\gamma$ nur das Zeichen noch bestimmt werden darf. Außerdem sind aber die Winkel α und β der Bedingung unterworfen, daß ihre Summe nicht kleiner sein kann als $\frac{1}{2}\pi$ und nicht größer als $\frac{3}{2}\pi$, während ihre Differenz zwischen den Grenzen $+\frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$ eingeschlossen ist; denn in allen Fällen, welche diesen Bedingungen nicht genügen, findet man

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta > 1, \quad \cos\gamma = \pm\mu\sqrt{-1}\ .$$

Man kann sich die Ursachen dieser Beschränkungen durch folgende Betrachtung anschaulich machen. — Der Winkel α gehört allen Geraden an, welche gegen die Achse der x dieselbe Lage haben und demnach in einer Kegelfläche liegen, deren Achse die Achse der x ist. Ebenso liegen alle Geraden, die mit der Achse der y den Winkel β bilden, in einer um diese Achse erzeugten Umdrehungskegelfläche; eine Gerade nun, welche mit der Achse der x den Winkel α, mit der Achse der y den Winkel β einschließen soll, muß beiden Kegelflächen angehören, wozu erfordert wird, daß sich diese Flächen schneiden oder doch wenigstens berühren, und dieses kann offenbar nur unter den für die Summe und Differenz der Winkel α und β ausgesprochenen Bedingungen stattfinden, da sich in allen übrigen Fällen die Kegelflächen entweder aus- oder umschließen. Sind ferner diese Bedingungen erfüllt, so gibt es höchstens zwei Durchschnittslinien, also für den Cosinus des dritten Winkels γ nur noch die beiden obigen Werthe, welche in dem Falle einer Berührung auf den einzigen Werth 0 zurückkommen, der dem Winkel $\gamma = \frac{1}{2}\pi$ entspricht, und man sieht leicht, daß in diesem Falle die zu bestimmende Richtung in die Ebene der xy fällt.

Liegen die Richtungen aller Kräfte, die man zugleich betrachtet, in derselben Ebene, so kann man diese Ebene als die der xy annehmen; es sind dann alle Winkel γ gleich $\frac{1}{2}\pi$, und die Winkel β werden die positiven oder negativen Complemente der Winkel α; diese Winkel α reichen folglich für sich allein zur Feststellung der Richtungen der Kräfte hin, nur müssen sie nun zwischen den Grenzen 0 und 2π genommen werden, wenn sie für alle mögliche Richtungen angewendet werden sollen.

§. 13.

Wegen dieser verschiedenen Beschränkungen, denen die Werthe der Winkel α, β und γ unterworfen sind, ist es oft einfacher und bequemer, die Winkel α und β durch einen andern Winkel zu ersetzen, und zwar durch denjenigen, welcher von der Projection der Richtungslinie in der Ebene der xy mit der Achse der x gebildet wird und in der Folge immer mit ε bezeichnet werden soll. Ist z. B. MP, Fig. 3, die Gerade, deren Richtung zu bestimmen ist, und Mp ihre Projection in der Ebene der xy, so wird diese Richtung vollständig bekannt sein, wenn man außer dem Winkel γ oder CMP noch den Winkel AMp oder ε kennt, welchen die Projection Mp mit der Achse der x oder einer Parallelen derselben einschließt. Denn durch diesen letztern Winkel wird die Lage einer durch die zur Achse der z parallele Gerade CM gelegten Ebene bestimmt, welche die Gerade MP enthält, und der Winkel γ gibt dann die Lage dieser letztern gegen die Gerade CM an. Es geht daraus hervor, daß die Winkel γ und ε von einander unabhängig sind und den Winkeln ϑ und ω der Polarcoordinaten entsprechen, und daß es, um alle mögliche Lagen ausdrücken zu können, nothwendig ist und genügt, wenn der Winkel ε wie der Winkel ω zwischen den Grenzen 0 und 2π genommen wird, während die Grenzen für den Winkel γ wie vorher 0 und π bleiben.

Die Beziehungen der Winkel α und β zu den Winkeln γ und ε ergeben sich leicht aus der Figur und den frühern Verbindungsgleichungen zwischen den rechtwinkligen und Polarcoordinaten; denn setzen wir $MP = r$, die Länge der Projection $Mp = p$, und benennen die Coordinaten des Punktes P in Bezug auf die Achsen AM, BM, CM mit x, y, z, so ist

$$p = r \sin\gamma, \quad x = p \cos\varepsilon, \quad y = p \sin\varepsilon, \quad z = r \cos\gamma,$$

oder

$$x = r \sin\gamma \cos\varepsilon, \quad y = r \sin\gamma \sin\varepsilon, \quad z = r \cos\gamma;$$

es ist aber auch

$$x = r \cos\alpha, \quad y = r \cos\beta,$$

mithin ergibt sich

$$\cos\alpha = \sin\gamma \cos\varepsilon, \quad \cos\beta = \sin\gamma \sin\varepsilon,$$

und daraus

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Wenn alle Kräfte in einer Ebene liegen, welche als die der xy genommen wird, so ist $\cos\gamma = 0$, $\sin\gamma = 1$ und demnach

$$\cos\alpha = \cos\varepsilon, \quad \cos\beta = \sin\varepsilon,$$

also der Winkel ε mit dem von 0 bis 2π ausgedehnten Winkel α für die Bestimmung der Richtungen, die in derselben Ebene liegen, gleichbedeutend.

§. 14.

Unabhängig von der besondern Natur der Kräfte stellen wir Vergleichungen über ihre Wirkungen an, und messen bald die Wirkung der einen Kraft durch die einer andern, bald die Wirkung derselben Kraft auf den einen Körper durch die, welche sie auf einen andern hervorbringt, oder wir messen (wie man sich wieder durch Vertauschung der Begriffe: Kraft und Wirkung kürzer ausdrückt) eine Kraft durch die andere, und erhalten so den Begriff der Größe, Stärke oder Intensität der Kräfte, die dadurch vergleichbare homogene Größen geworden sind und als solche durch Zahlen oder diesen proportionale Raumgrößen vorgestellt werden können. Zu dieser Vergleichung ist es vor allem nothwendig, die Bedingungen für die Gleichheit zweier Kräfte festzustellen, und in dieser Hinsicht wurde bereits ausgesprochen, daß zwei Kräfte gleich zu achten sind, wenn sie derselben Masse unter gleichen Umständen eine gleiche Bewegung ertheilen. Diese Vergleichung wird indessen viel einfacher, wenn wir die Wirkung der Kräfte im Zustande des Gleichgewichtes betrachten; denn hier müssen offenbar zwei Kräfte als gleich angenommen werden, wenn sie gleichzeitig längs derselben Geraden, aber in entgegengesetztem Sinne auf denselben materiellen Punkt wirken und diesem keine Bewegung ertheilen oder überhaupt den Zustand, in dem er sich befindet, nicht ändern, d. h. mit andern Worten, wenn die durch die eine Kraft erstrebte Wirkung durch die von der andern hervorgerufene fortwährend und in jedem Augenblicke vernichtet wird. So muß man den Druck gegen eine feste Fläche und den von dieser geleisteten Widerstand immer als gleiche Kräfte betrachten, und umgekehrt kann man immer eine von zwei gleichen Kräften durch eine feste Fläche ersetzt denken, gegen welche die andere Kraft normal drückt, woraus hervorgeht, daß die Größe einer jeden Kraft am einfachsten nach dem Druck beurtheilt werden kann, den sie auf ein festes Hinderniß hervorbringt.

Hat man nun auf diese Weise zwei Kräfte als gleich erkannt, so erhält man eine doppelte Kraft, wenn man beide in demselben Sinne auf einen materiellen Punkt wirken läßt und diesen durch eine neue Kraft im Gleichgewicht hält; eine dreifache Kraft wird diejenige sein, welche die Wirkung von drei gleichen Kräften aufhebt, u. s. f. Haben wir also ein allgemeines Maaß für die Stärke der Kräfte festgestellt,

eine Einheit der Kraft oder des Druckes angenommen, so kann durch solche Vergleichungen oder Messungen jede Kraft als eine gewisse Anzahl solcher Einheiten ausgedrückt werden.

Die Kräfte, mit denen wir am besten vertraut sind und die wir auch am genauesten unter sich vergleichen oder messen können, sind die Gewichte der Körper oder die Druckkräfte, welche sie auf wagrechte Unterlagen ausüben; es ist deßwegen am natürlichsten das Gewicht irgend eines Stoffes von bestimmtem Volumen als Gewichtseinheit und zugleich als Krafteinheit anzunehmen. Als solche soll denn in der Folge gewöhnlich das Kilogramm oder das Gewicht von einem Kubikdezimeter oder Liter destillirten Wassers im Zustande der größten Dichte vorausgesetzt werden, und es wird demnach unter jeder allgemeinen Größe, welche die Stärke einer Kraft d. h. die Größe der besondern Wirkung, die von irgend einer allgemeinen Kraft oder Ursache auf einen gegebenen Körper oder materiellen Punkt ausgeübt oder in demselben erzeugt wird, vorstellt, eine gewisse Zahl von Kilogramm oder von Theilen dieser Gewichtseinheit zu verstehen sein.

Will man ferner eine Kraft geometrisch darstellen, so wählt man eine beliebige Längeneinheit, die übrigens in gar keiner Beziehung zu den wirklichen Längen, z. B. den Coordinaten, steht, als Stellvertreterin unserer Gewichtseinheit und trägt eine Länge, welche jene Längeneinheit so oft enthält, als die darzustellende Kraft die Gewichtseinheit, von dem Angriffspunkte an auf die Richtung dieser Kraft auf; diese der Richtung und Länge nach bestimmte Gerade wird die Kraft ihrer Richtung, dem Sinne ihrer Thätigkeit und ihrer Stärke nach anschaulich darstellen. Daß übrigens in derselben Construction dieselbe Längeneinheit für jede darin vorkommende Kraft als Gewichtseinheit beibehalten werden muß, dürfte kaum noch erwähnt werden.

Sind z. B. zwei Kräfte: $P = 27^{Kgr.}$, $Q = 15^{Kgr.}$ zu zeichnen, die in derselben Ebene wirken, und deren Angriffspunkte M und N durch die Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \quad 3^m \\ y_1 = -5^m \end{array}\right\} \text{für M}, \qquad \left.\begin{array}{l} x_2 = -8^m \\ y_2 = \quad 4^m \end{array}\right\} \text{für N}$$

gegeben sind, während die Richtung der erstern den Winkel $\alpha_1 = 38^0$, die der zweiten den Winkel $\alpha_2 = 242^0$ mit der Abscissenachse der x bildet, so kann man für die wirkliche Längeneinheit, den Meter, zwei Millimeter, für die Gewichtseinheit einen Millimeter annehmen, wodurch

man die Figur 4 erhält. Die Richtungswinkel werden am genauesten mittelst der Sehnentafel oder auch eines Sehnenmaaßstabes aufgetragen.

Um Kräfte im Raume zu construiren, wählt man am besten die darstellende (descriptive) Zeichnungsweise, wozu die Winkel γ und ε sehr geeignet sind. Der erstere Winkel wird von einer zur Projectionsachse senkrechten Geraden, welche die Achse der z oder eine Parallele derselben vorstellt, nach der rechten oder linken Seite aufgetragen, der zweite dagegen von der Projectionsachse selbst oder einer Parallelen derselben, und zwar immer in derselben Richtung von der Rechten nach unten, oder seine Ergänzung zu 2π von der Rechten nach oben. Denkt man sich die Zeichnung wie eine geographische Karte orientirt, so kann man sagen, der Winkel γ werde von Nord aus gegen Süd, der Winkel ε von Ost aus über Süd, West und Nord genommen. Die Zeichnung der Projectionen der gegebenen Kraft ist dann sehr einfach. Die durch die Richtung der Kraft gelegte Vertikal=Ebene wird anfänglich in die vertikale Projectionstafel umgelegt gedacht, in derselben der Winkel γ und die wahre Größe der Kraft aufgetragen, damit die Länge der horizontalen Projection gefunden und nun die Ebene des Winkels γ um den Winkel ε gedreht, um auch die Lage der horizontalen, und mit dieser Richtung und Größe der vertikalen Projection auf bekannte Weise zu erhalten. Die Construction der Lage des Angriffspunktes mittels der Coordinaten bietet sich von selbst dar. Als Beispiel diene Fig. 5, worin zwei Kräfte P_1 und P_2 dargestellt sind, für welche als gegeben angenommen wurde:

$$P_1 = 20^{\text{Kgr.}} \begin{cases} \gamma_1 = 64^0\ 30' \\ \varepsilon_1 = 37\ \ 20 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 6^m \\ y_1 = 3 \\ z_1 = 5\ , \end{cases}$$

$$P_2 = 26^{\text{Kgr.}} \begin{cases} \gamma_2 = 128^0\ 40' \\ \varepsilon_2 = 234\ ,\ 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -4^m \\ y_2 = +5 \\ z_2 = -3\ . \end{cases}$$

Die Längeneinheit ist darin wie oben durch 2^{mm}, die Krafteinheit durch 1^{mm} vorgestellt; die Horizontal=Projectionen sind mit einem, die Vertikal=Projectionen mit zwei Strichen bezeichnet.

§. 15.

Denken wir uns einen Körper durch die Kräfte, welche an ihm thätig sind, in Bewegung gesetzt, so wird ein Punkt desselben irgend eine gerade oder krumme Linie beschreiben, welche Weg oder Bahn dieses Punktes genannt wird. Es können sich dann alle Punkte des Körpers auf dieselbe Weise bewegen — und dieses wird offenbar immer

stattfinden müssen, wenn auf jedes Atom dieselbe Kraft wirkt — und demnach alle parallele congruente Bahnen beschreiben, von denen irgend eine auch die Bahn des Körpers heißen kann, wie dies bei dem freien Fall eines Körpers im leeren Raume oder eines um eine lothrechte Achse symmetrischen Körpers in der Luft stattfindet; in vielen, ja in den meisten Fällen werden aber die verschiedenen Atome des bewegten Körpers verschiedene Bahnen haben, indem sie außer der gemeinschaftlichen fortschreitenden Bewegung noch eine drehende Bewegung um einen bestimmten Punkt desselben besitzen; wenigstens können wir uns deren wahre Bewegung, um sie uns leichter vorzustellen, in diese zwei verschiedenartige Bewegungen, in die fortschreitende und drehende zerlegt denken. Denn wie auch die Bewegung eines Körpers beschaffen sein mag, der Uebergang desselben aus einer Lage in eine andere läßt sich immer dadurch darstellen, daß man den ganzen Körper zuerst eine entsprechende fortschreitende Bewegung machen läßt, als wenn derselbe nur ein einziger materieller Punkt wäre, und ihn dann, wenn er in einer bestimmten Lage angekommen ist, um einen Punkt in seinem Innern, welcher schon seine wahre Lage hat, so lange dreht, bis noch zwei andere Punkte desselben, die mit dem ersten nicht in gerader Linie liegen, in die gehörige Lage gekommen sind. Die wahre Bewegung des Körpers unterscheidet sich von dieser zergliederten nur dadurch, daß die beiden in unserer Vorstellung getrennten Ortsveränderungen gleichzeitig vor sich gehen, nicht eine nach der andern. So beurtheilen wir die Bewegung der Erde als eine doppelte, als eine fortschreitende ihres Mittelpunktes in einer elliptischen Bahn um die Sonne und als eine drehende um ihre Achse oder genauer um ihren Mittelpunkt, wenn man auf die kleinen Bewegungen der Achse selbst Rücksicht nimmt. Auf gleiche Weise zerlegen wir die Bewegung eines Kreisels in die fortschreitende Bewegung seiner Spitze, mit welcher er sich auf eine wagrechte Ebene stützt, und in die drehende Bewegung um diese Spitze, u. s. f.

Gemäß dieser Vorstellung, die wir durch Erfahrung und Induction über die Bewegung eines Körpers erhalten, trennen wir auch die Ursachen derselben und zerlegen die Wirkung der Kräfte in eine solche, welche nur die fortschreitende Bewegung begünstigt, und in eine solche, welche nur eine drehende Bewegung hervorbringen kann. Die erste dieser Wirkungen werde ich übertragend fördernde Kraft, die zweite drehende Kraft oder Moment nennen. Diese beiden Kräfte sind jedoch immer nur als zwei in unserer Vorstellung getrennte Aeußerungen oder einfache Wirkungen einer und derselben Kraft zu betrachten, welche ursprünglich nicht in der Kraft selbst liegen, sondern

von der Verbindung ihres Angriffspunktes mit andern materiellen Punkten abhängen oder durch dieselbe gleichsam hervorgerufen werden.

§. 16.

Nach den vorhergehenden Erörterungen läßt sich nun die Aufgabe, welche die Mechanik zu lösen hat, genauer aussprechen. Diese Aufgabe besteht darin, die Beziehungen zu untersuchen, welche zwischen der absoluten oder relativen Bewegung eines Körpers und deren Ursachen stattfinden, und ist demnach im Allgemeinen eine doppelte:

1) Entweder sind diese Ursachen, die Kräfte, welche auf den bewegten Körper wirken, sowohl der Größe als Richtung nach für irgend eine Lage des letztern gegeben, und deren Angriffspunkte an demselben bestimmt, und es soll die Lage und Geschwindigkeit des Körpers oder eines seiner Punkte zu irgend einer Zeit angegeben werden, d. h. es sollen mit jenen Gegebenen die beiden Gesetze seiner Bewegung ausgedrückt werden, nämlich dasjenige, nach welchem die verschiedenen Orte, die der Körper oder eines seiner Atome nach und nach einnimmt, aufeinanderfolgen, und dasjenige, nach welchem seine Geschwindigkeit mit der Zeit oder mit der Lage des Bewegten ab- oder zunimmt.

2) Oder umgekehrt, es ist die Art der Bewegung vorausbestimmt, und man hat die Kräfte oder deren gegenseitige Verhältnisse zu suchen, die zur Hervorbringung dieser Bewegung erforderlich sind.

Zu dieser letztern Aufgabe gehört auch der allgemeine Fall, wo die Geschwindigkeit des Bewegten fortwährend Null und seine Lage unveränderlich, d. h. wenn er im Gleichgewicht ist. Unter diesem Gesichtspunkte ist demnach das Gleichgewicht nur ein besonderer und sehr einfacher Fall der Bewegung, weßwegen man die Untersuchung dieses Zustandes der allgemeinen Untersuchung der Bewegung gewöhnlich vorausgehen läßt.

§. 17.

Das Gesetz, nach welchem die verschiedenen Punkte, die der bewegte Körper oder eines seiner Atome nach und nach einnimmt, aufeinanderfolgen, wird im Allgemeinen durch zwei Gleichungen zwischen den drei veränderlichen Coordinaten x, y, z des Atoms ausgedrückt, welche man die Gleichungen seiner Bahn nennt. Eine jede derselben stellt das Gesetz dar, nach welchem die Punkte einer gewissen Fläche aufeinanderfolgen; sie ist im Allgemeinen noch eine Function der drei Veränderlichen x, y, z und heißt die Gleichung jener Fläche. Allgemein hat sie daher die Form:

$$F(x, y, z) = 0 ;$$

zieht man aber aus dieser den Werth von einer der Coordinaten, z. B. von z, so wird

$$z = f(x, y),$$

und man betrachtet in dieser Gleichung die beiden Veränderlichen x und y als unabhängige oder willkürliche, die z als die abhängige oder bedingte.

Zwei solche Gleichungen geben also das Gesetz der Aufeinanderfolge aller Punkte, welche den beiden durch sie dargestellten Flächen gemeinschaftlich angehören, oder sie drücken die Gestalt der geraden oder krummen Linie aus, längs welcher sich die beiden Flächen durchschneiden, und welche in unserm Falle die gesuchte oder gegebene Bahn des Bewegten ist. Die allgemeinste Form dieser Gleichungen ist daher

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{array}\right\}.$$

Eliminirt man dann aus diesen beiden Gleichungen je eine der drei Veränderlichen, so kann man zwei einfachere erhalten, in denen nur zwei der drei Veränderlichen vorkommen, oder die von je einer derselben unabhängig sind; jede dieser Gleichungen ist nun die eines Cylinders, dessen Erzeugende zur Achse der in ihr nicht enthaltenen Veränderlichen parallel bleibt oder in jeder Lage auf der Ebene der beiden andern in ihr enthaltenen Veränderlichen senkrecht steht. Eliminirt man z. B. aus einer jener Gleichungen die Veränderliche z, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$f_1(x, y) = 0;$$

sie gehört einer Cylinderfläche an, deren Erzeugende zur Achse der z parallel ist, und welche die Ebene der xy längs einer Curve durchschneidet, die durch dieselbe Gleichung $f_1(x, y) = 0$ vorgestellt wird. Eliminirt man ebenso die Veränderliche y, so ist die neue Gleichung:

$$f_2(x, z) = 0$$

die eines Cylinders, welcher auf der Ebene der xz senkrecht steht und diese Ebene nach einer durch dieselbe Gleichung dargestellten krummen Linie durchschneidet.

Durch die Elimination wird indessen in dem durch die obigen allgemeinen Gleichungen ausgesprochenen Gesetze nichts geändert; die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, z) = 0 \end{array}\right\}$$

drücken also zusammen noch immer die Gestalt derselben krummen Linie aus, oder die beiden Cylinderflächen, welche in diesen Gleichungen vor-

gestellt sind, schneiden sich nach derselben Curve wie die ersten beiden Flächen, und da jede von ihnen auf einer Coordinatenebene senkrecht steht, so können sie auch als die Vereinigung der von allen Punkten dieser Curve auf die entsprechende Coordinatenebene gefällten Senkrechten, mithin als projicirende Cylinder angesehen werden; ihre Durchschnitte mit den Coordinatenebenen sind die Projectionen derselben Curve in diesen Ebenen, weßhalb die beiden Gleichungen:

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, z) = 0$$

auch die Gleichungen der Projectionen der Bahn des Bewegten in den Ebenen der xy und der xz genannt werden, während man sie zusammen, wie die allgemeinen Gleichungen, die Gleichungen der Bahn selbst nennt. In diesen beiden Gleichungen ist nur mehr eine Veränderliche z. B. die x willkürlich oder unabhängig, und die beiden andern müssen als Functionen derselben betrachtet werden.

Die vorhergehenden Projectionen dürfen nicht mit den Rissen einer Fläche in jenen Coordinatenebenen verwechselt werden, deren Gleichungen man dadurch ableitet, daß man in der Gleichung dieser Fläche die Veränderlichen z und y nach einander gleich Null setzt und dadurch die Formen:

$$F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, z) = 0$$

erhält; diese Risse werden in besondern Fällen auch Hauptschnitte der betreffenden Fläche genannt.

Nehmen wir z. B. die Gleichung einer Ebene:

$$Ax + By + Cz + Dp = 0 \; {}^{*})$$

so sind

$$Ax + By + Dp = 0$$
$$Ax + Cz + Dp = 0$$

die Gleichungen ihrer Risse in den Ebenen der xy und xz. Wird diese Ebene dagegen von einer zweiten geschnitten, deren Gleichung:

$$A'x + B'y + C'z + D'p = 0$$

ist, so erhält man als Gleichungen der projicirenden Ebenen oder der Projectionen ihres Durchschnittes die Ausdrücke:

---

*) Wegen der Homogeneität ist hier gegen die übliche Form dem constanten Gliede der Factor p beigefügt; die Größe D ist dadurch gleichartig mit A, B, C, der Factor p dagegen mit den Coordinaten, also wie diese in Längeneinheiten ausgedrückt.

$$(AC' - A'C)\,x + (BC' - B'C)\,y + (C'D - CD')\,p = 0\ ,$$
$$(AB' - A'B)\,x + (B'C - BC')\,z + (B'D - BD')\,p = 0\ ,$$

welche dann auch die Gleichungen dieser Geraden selbst genannt werden.

§. 18.

Die Gleichungen einer Geraden haben darnach im Allgemeinen die Formen:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by + dp = 0 \\ a'x + b'y + d'p = 0 \end{array}\right\} \quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{r} y = ax + f \\ z = bx + g \end{array}\right\},$$

und wenn sie durch den Anfangspunkt geht,

$$\left.\begin{array}{r} y = ax \\ z = bx \end{array}\right\}.$$

In den vier letzten Gleichungen sind die Coeffizienten a und b Quotienten gleichartiger Größen, also absolute Zahlen oder Winkelfunctionen, und lassen sich sehr einfach durch die Cosinus der Winkel α, β, γ ausdrücken, welche die betreffende Gerade mit den drei Achsen bildet. Bezeichnet man nämlich die Entfernung eines beliebigen Punktes der Geraden vom Anfangspunkte mit r, so ist

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ,$$

und wie leicht zu sehen hat man

$$x = r\cos\alpha,\quad y = r\cos\beta,\quad z = r\cos\gamma,$$

und damit wird

$$\frac{y}{x} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = a\ ,\quad \frac{z}{x} = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = b\ .$$

Darnach kann man also den Gleichungen einer Geraden, welche durch den Anfangspunkt geht, die Formen geben:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{y}{\cos\beta} = \dfrac{x}{\cos\alpha} \\[2ex] \dfrac{z}{\cos\gamma} = \dfrac{x}{\cos\alpha} \end{array}\right\},\quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{r} y\cos\alpha = x\cos\beta \\[2ex] z\cos\alpha = x\cos\gamma \end{array}\right\},$$

und die Gleichungen einer Geraden, deren Projectionen in den Ebenen der xy und der xz die Achsen der y und z beziehungsweise in den Abständen f und g vom Anfangspunkte schneidet, oder welche durch einen bestimmten Punkt geht, dessen Coordinaten a, b, c sind, werden die Formen annehmen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{y-f}{\cos\beta}&=\frac{x}{\cos\alpha}\\ \frac{z-g}{\cos\gamma}&=\frac{x}{\cos\alpha}\end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned}\frac{y-b}{\cos\beta}&=\frac{x-a}{\cos\alpha}\\ \frac{z-c}{\cos\gamma}&=\frac{x-a}{\cos\alpha}\end{aligned}\right\}.$$

Hat man dann eine Ebene, deren Normale die Winkel α, β, γ mit den drei Achsen bildet, die also zu der vorhergehenden Geraden senkrecht ist, so ergeben sich aus den zuletzt erhaltenen Gleichungen die Formen:

$$x_{,} \cos\alpha + y_{,} \cos\beta + z_{,} \cos\gamma = p \ ,$$

oder

$$(x_{,} - x) \cos\alpha + (y_{,} - y) \cos\beta + (z_{,} - z) \cos\gamma = 0 \ ,$$

als Gleichungen jener Ebene, worin nun α, β, γ auch die Winkel sind, die von dieser letztern mit den Ebenen der yz, xz, xy der Reihe nach gebildet werden, p die Länge der vom Anfangspunkt auf die betreffende Ebene gefällten Senkrechten vorstellt, und x, y, z die Coordinaten eines bestimmten Punktes derselben Ebene bezeichnen.

Die Vergleichung der beiden vorhergehenden Formen gibt

$$p = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma \ ,$$

und dieser Werth führt zu einem einfachen Ausdrucke für die Länge der Senkrechten, welche von einem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, auf eine gegebene Ebene gefällt wird. Denn legt man durch diesen Punkt eine Ebene parallel zu der gegebenen und bezeichnet die vom Anfangspunkte darauf gefällte Senkrechte mit p′, während p die von demselben Punkte auf die gegebene Ebene gefällte Senkrechte vorstellt, so hat man wie vorher

$$p' = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma,$$

und weil die Senkrechte P, welche von dem Punkte xyz auf die gegebene Ebene gezogen wird, offenbar der Entfernung der beiden parallelen Ebenen und demnach auch der Differenz der beiden vom Anfangspunkt auf sie gefällten Senkrechten p und p′ gleich sein muß,

$$P = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p \ ,$$

wobei jedoch auf das Zeichen der Senkrechten Rücksicht zu nehmen ist.

§. 19.

An das Vorhergehende will ich hier sogleich noch einige Betrachtungen über Linien und Ebenen im Raume anschließen, von denen in der Folge öftere Anwendung gemacht wird.

Ein oft wiederkehrender Ausdruck ist die Beziehung zwischen dem Winkel, den zwei Gerade unter sich bilden, und den Winkeln, die jede von ihnen mit den drei Coordinatenachsen einschließt; sie kann auf folgende Art sehr einfach abgeleitet werden. — Drückt man die Lage dieser Geraden, nachdem sie beide parallel mit sich selbst durch den Anfangspunkt geführt sind, durch die Winkel γ und ε aus, so ist der Winkel, welchen die durch die erste Gerade und die Achse der z gelegte Ebene oder die Ebene des Winkels γ_1 mit der Ebene des Winkels γ_2, welche die zweite Gerade und die Achse der z enthält, einschließt, gleich $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$; mithin hat man in dem sphärischen Dreiecke $M_1 M_2 C$, Fig. 6, wenn (1,2) den Winkel der beiden Geraden bezeichnet, die Beziehung:

$$\cos(1,2) = \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 + \sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) .$$

Es ist aber auch

$$\cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \cos\varepsilon_2 \cos\varepsilon_1 + \sin\varepsilon_2 \sin\varepsilon_1 ,$$

oder da nach frühern Werthen (§. 13.) sich

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} , \quad \sin\varepsilon = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma}$$

ergibt,

$$\cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \frac{\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2}{\sin\gamma_1 \sin\gamma_2} .$$

Damit folgt dann

$$\cos(1,2) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$$

als die gesuchte Beziehung.

Sind die beiden Geraden zu einander senkrecht, so wird der vorhergehende Werth von cos (1,2) Null, und wir erhalten

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0$$

als Bedingungsgleichung für die Voraussetzung, daß zwei Gerade im Raume einen rechten Winkel bilden.

§. 20.

Oft wird auch die Länge der Senkrechten gefordert, die von einem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z gegeben sind, auf eine gegebene Gerade gefällt werden kann.

Bezeichnen wir die laufenden Coordinaten für die gegebene Gerade mit x', y', z', die eines bekannten Punktes derselben mit $x_,$, $y_,$, $z_,$, so daß ihre Gleichungen die Form annehmen:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y'-y_{,}}{\cos\beta} = \dfrac{x'-x_{,}}{\cos\alpha} \\[2ex] \dfrac{z'-z_{,}}{\cos\gamma} = \dfrac{x'-x_{,}}{\cos\alpha} \end{array}\right\};$$

bezeichnen wir ferner den Abstand des bekannten Punktes $x_{,}\ y_{,}\ z_{,}$ von dem gegebenen Punkte xyz mit d, die drei Winkel, welche die sie verbindende Gerade mit den drei Coordinatenachsen bildet, mit l, m, n, und denjenigen, welchen dieselbe Gerade mit der gegebenen Geraden einschließt, mit ϑ, so ist einmal

$$\cos l = \frac{x-x_{,}}{d}, \quad \cos m = \frac{y-y_{,}}{d}, \quad \cos n = \frac{z-z_{,}}{d},$$

und nach dem Vorhergehenden wird

$$\cos\vartheta = \frac{x-x_{,}}{d}\cos\alpha + \frac{y-y_{,}}{d}\cos\beta + \frac{z-z_{,}}{d}\cos\gamma .$$

Für die Länge p der gesuchten Senkrechten hat man sodann

$$p = d\sin\vartheta ,$$

oder mit dem vorhergehenden Werthe von $\cos\vartheta$,

$$p = d\sqrt{1 - \frac{[(x-x_{,})\cos\alpha + (y-y_{,})\cos\beta + (z-z_{,})\cos\gamma]^2}{d^2}} .$$

Es ist aber auch

$$d^2 = [(x-x_{,})^2 + (y-y_{,})^2 + (z-z_{,})^2](\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) ,$$

und damit wird nach einigen Reductionen

$$p=\sqrt{[(x-x_{,})\cos\beta)-y-y_{,})\cos\alpha]^2+[(z-z_{,})\cos\alpha-(x-x_{,})\cos\gamma]+^2[(y-y_{,})\cos\gamma-(z-z_{,})\cos\beta]^2} .$$

Ist der gegebene Punkt der Anfangspunkt und demnach $x=y=z=0$, so hat man für die Länge der Senkrechten einfacher

$$p=\sqrt{(x_{,}\cos\beta - y_{,}\cos\alpha)^2+(z_{,}\cos\alpha - x_{,}\cos\gamma)^2+(y_{,}\cos\gamma - z_{,}\cos\beta)^2} .$$

Geht dagegen die Gerade durch den Anfangspunkt, so hat man $x_{,}=y_{,}=z_{,}=0$ und demnach den ganz ähnlichen Ausdruck:

$$p=\sqrt{(x\cos\beta - y\cos\alpha)^2+(z\cos\alpha - x\cos\gamma)^2+(y\cos\gamma - z\cos\beta)^2};$$

denn die Senkrechte zwischen einem Punkte und einer durch den Anfang der Coordinaten gezogenen Geraden muß offenbar dieselbe sein, wie die, welche von diesem Anfangspunkt auf eine durch den gegebenen Punkt gelegte, zu der ersten parallele Gerade gefällt werden kann.

§. 21.

Bestimmen wir ferner die Lage einer Geraden, welche auf zwei andern gegebenen Geraden senkrecht steht.

Seien α, β, γ und α', β', γ' die Winkel, welche von diesen letztern mit den Coordinatenachsen gebildet werden, l, m, n die Winkel welche die Lage der gesuchten Geraden gegen dieselben Achsen feststellen. Die Bedingung, daß diese auf jeder der andern senkrecht steht, gibt nach §. 19. die Gleichungen:

$$\cos\alpha \cos l + \cos\beta \cos m + \cos\gamma \cos n = 0 \ ,$$

$$\cos\alpha' \cos l + \cos\beta' \cos m + \cos\gamma' \cos n = 0 \ ,$$

aus welchen man zieht:

$$\cos m = \cos l \frac{\cos\alpha \ \cos\gamma' - \cos\alpha' \ \cos\gamma}{\cos\beta' \ \cos\gamma - \cos\beta \ \cos\gamma'}$$

$$\cos n = \cos l \frac{\cos\alpha' \ \cos\beta - \cos\alpha \ \cos\beta'}{\cos\beta' \ \cos\gamma - \cos\beta \ \cos\gamma'} \ .$$

Man hat aber auch

$$\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1 \ ,$$

und damit folgen, wenn man zur Abkürzung

$$\sqrt{(\cos\alpha'\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta')^2 + (\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\alpha'\cos\gamma)^2 + (\cos\beta'\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma')^2} = Q$$

setzt, die Werthe:

$$\cos l = \pm \frac{\cos\beta' \ \cos\gamma - \cos\beta \ \cos\gamma'}{Q} \ ,$$

$$\cos m = \pm \frac{\cos\alpha \ \cos\gamma' - \cos\alpha' \ \cos\gamma}{Q} \ ,$$

$$\cos n = \pm \frac{\cos\alpha' \ \cos\beta - \cos\alpha \ \cos\beta'}{Q} \ .$$

Der Werth von Q^2 kann aber auch unter die Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} Q^2 &= (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma') \\ &\quad - (\cos\alpha \ \cos\alpha' + \cos\beta \ \cos\beta' + \cos\gamma \ \cos\gamma')^2 \\ &= 1 - (\cos\alpha \ \cos\alpha' + \cos\beta \ \cos\beta' + \cos\gamma \ \cos\gamma')^2 \\ &= 1 - \cos^2(1,2) = \sin^2(1,2) \ , \end{aligned}$$

worin der Winkel zwischen den beiden gegebenen Geraden wieder durch (1, 2) bezeichnet ist; die vorhergehenden Ausdrücke werden dadurch

$$\cos l = \pm \frac{\cos\beta' \cos\gamma - \cos\beta \cos\gamma'}{\sin(1,2)}, \quad \cos m = \pm \frac{\cos\alpha \cos\gamma' - \cos\alpha' \cos\gamma}{\sin(1,2)},$$

$$\cos n = \pm \frac{\cos\alpha' \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta'}{\sin(1,2)}.$$

Geht nun die zweite Gerade durch den Anfangspunkt und beide zugleich durch einen Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, und dessen Entfernung vom Anfangspunkte daher durch

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

vorgestellt wird, so ist die vom Anfangspunkte auf die erste Gerade gefällte Senkrechte p offenbar

$$p = d \sin(1,2),$$

und man hat außerdem

$$\cos\alpha' = \frac{x}{d}, \quad \cos\beta' = \frac{y}{d}, \quad \cos\gamma' = \frac{z}{d};$$

mit diesen Werthen findet man sofort

$$\cos l = \pm \frac{y \cos\gamma - z \cos\beta}{p}, \quad \cos m = \pm \frac{z \cos\alpha - x \cos\gamma}{p},$$

$$\cos n = \pm \frac{x \cos\beta - y \cos\alpha}{p},$$

und übereinstimmend mit dem frühern Ausdrucke

$$p = \sqrt{(x \cos\beta - y \cos\alpha)^2 + (z \cos\alpha - y \cos\gamma)^2 + (y \cos\gamma - z \cos\beta)^2}.$$

Stehen die beiden gegebenen Geraden auf einander senkrecht, so wird

$$\sin(1,2) = 1, \quad d = p$$

und demnach

$$\cos l = \pm (\cos\beta' \cos\gamma - \cos\beta \cos\gamma'),$$

$$\cos m = \pm (\cos\alpha \cos\gamma' - \cos\alpha' \cos\gamma),$$

$$\cos n = \pm (\cos\alpha' \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta');$$

sind sie dagegen parallel, so hat man $\sin(1,2) = 0$, aber auch

$$\cos\alpha = \cos\alpha', \quad \cos\beta = \cos\beta', \quad \cos\gamma = \cos\gamma',$$

und dadurch

$$\cos l = \cos m = \cos n = \frac{0}{0};$$

die Aufgabe ist daher unbestimmt, und in der That gibt es beliebig viele Geraden, welche auf beiden gegebenen senkrecht sind.

§. 22.

Endlich mögen an das Vorhergehende noch die Formeln angereiht werden, welche dazu dienen, von einem rechtwinkligen Coordinatensystem zu einem andern überzugehen, das denselben Anfangspunkt hat. Um diese Formeln zu erhalten, kann man sich vorstellen, daß das alte System nach und nach so gedreht worden sei, bis seine Achsen mit denen des neuen zusammengefallen sind; es wird daher vor allem nothwendig sein, über diese Drehung eine solche Annahme zu treffen, daß man in jedem einzelnen Falle darüber im Klaren ist, und sich die Formeln sicher anwenden lassen. In dieser Hinsicht sollen denn diese, wie in der Folge alle ähnlichen drehenden Bewegungen, zu denen z. B. auch die des Fahrstrahles der Polarcoordinaten gehört, als positive betrachtet werden, wenn sie für ein Auge, das sich auf der positiven Seite der x, y oder z befindet, in demselben Sinne wie die des Zeigers einer Uhr vor sich gehen.

Dieser Annahme gemäß werden wir bei Betrachtungen in einer Ebene, wie dies auch in Fig. 4 schon der Fall war, wenn die Coordinaten mit x und y bezeichnet werden, die positiven y wie gewöhnlich nach Oben, die positiven x aber nach der linken Seite gerichtet annehmen, gerade so als wenn das Auge des Beschauers sich in der positiven Achse der z befindet. Ebenso soll auch die positive Seite der Polarachse nach der Linken gerichtet sein, und von da an der Winkel ω, den der Fahrstrahl r mit jener Achse einschließt, gemessen werden. Im Raume dagegen bleibt die Lage der Coordinatenachsen wie sie gewöhnlich angenommen wird, die positiven x nach der Rechten, die y gegen den Betrachtenden und die z nach Oben gerichtet; die Bewegung ist demnach positiv, wenn sie von der positiven Achse der x gegen die der y, oder von dieser gegen die der z, oder endlich von dieser gegen diejenige der x gerichtet ist.

Sei nun zuerst ein rechtwinkliges Achsenpaar in einer Ebene gegeben, und die Umwandlungsformeln für den Uebergang zu einem andern in derselben Ebene zu bestimmen. Bezeichnen wir die Coordinaten eines Punktes dieser Ebene in Bezug auf die ersten mit x, y, in Bezug auf die letztern mit x', y', und den Winkel, den die positive Achse der x mit derjenigen der x' einschließt, mit ω, indem wir dabei voraussetzen, daß dieser Winkel positiv ist, wenn man die gegebenen Achsen in positivem Sinne drehen muß, um sie in die Lage der neuen Achsen zu bringen, so haben wir die bekannten Umwandlungsgleichungen der alten Coordinaten in die neuen:

$$\left.\begin{array}{l} x = x' \cos\omega - y' \sin\omega \\ y = y' \cos\omega + x' \sin\omega \end{array}\right\},$$

und umgekehrt die Werthe der letztern durch die ersten ausgedrückt:

$$\left.\begin{array}{l} x' = x \cos\omega + y \sin\omega \\ y' = y \cos\omega - x \sin\omega \end{array}\right\},$$

welche aus den vorhergehenden Gleichungen entweder durch Elimination oder einfacher durch Vertauschung der Coordinaten und den Zeichenwechsel des Winkels ω, da in diesem Falle die Bewegung von den neuen zu den alten Achsen stattfindet und demnach negativ ist, erhalten werden können.

Diese Formeln sollen nun dazu dienen, die Ausdrücke für die Umwandlung der Coordinaten im Raume abzuleiten, indem wir dieselbe auf drei Umwandlungen in einer Ebene zurückführen. —

Die Lage, welche das neue System erhalten soll, wird offenbar am einfachsten dadurch bestimmt, daß man zuerst die Lage von einer der neuen Achsen, z. B. von der Achse der z' durch die den Polarcoordinaten entsprechenden Winkel ω und ϑ in Bezug auf das gegebene System feststellt, wobei ϑ den Winkel zwischen den positiven Achsen der z und der z', und ω den Winkel zwischen der Ebene des Winkels ϑ und der Ebene der xz oder zwischen der Projection der Achse der z' in der Ebene der xy und der Achse der x bedeutet, und dann noch den Winkel ψ bestimmt, welchen die neue Achse der y' mit der Durchschnittslinie der Ebenen der xy und der $x'y'$ einschließt, oder den die Ebene der $x'z'$ mit der Ebene des Winkels ϑ, in der die Achsen der z und der z' liegen, bildet.

Seien demnach AX, AY, AZ, Fig. 7, die Achsen der positiven x, y und z, AZ' die Achse der positiven z', also Winkel $ZAZ' = \vartheta$, AX_2 die Projection von AZ' in der Ebene der xy, und demnach Winkel $XAX_2 = \omega$. Denkt man sich nun das gegebene System um die Achse der z gedreht bis die Achse AX in die Richtung AX_2 gekommen ist, also um den Winkel ω, und bezeichnet die Coordinaten eines Punktes in Bezug auf diese Achsen mit x_2, y_2, z_2, so hat man nach dem Vorhergehenden die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_2 \cos\omega - y_2 \sin\omega \\ y = x_2 \sin\omega + y_2 \cos\omega \\ z = z_2 \end{array}\right\}.$$

Dieses zweite System drehen wir nun um die Achse AY_2 der y_2, bis die Achse AZ die Richtung AZ' einnimmt, d. h. um den Winkel ϑ; es entsteht daraus ein drittes System der x_1, y_1, z_1, durch welches die Werthe der vorhergehenden Coordinaten x_2, y_2, z_2 mittels ähnlicher

Gleichungen wie vorher ausgedrückt werden, indem man beachtet, daß nun die y_2 unverändert bleiben, und sich die x_2 und z_2 ändern. Diese Gleichungen sind daher:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \quad x_1 \cos\vartheta + z_1 \sin\vartheta \\ y_2 &= \quad y_1 \\ z_2 &= - x_1 \sin\vartheta + z_1 \cos\vartheta \end{aligned}\right\}.$$

Endlich dreht man zum drittenmal dieses System um die Achse A Z' bis die Ebene $Z'AX_1$ der positiven $x_1\, z_1$ in die Lage $Z'AX'$, welche das neue System einnehmen soll, gekommen ist, mithin um den Winkel ψ oder X_1AX'. Es bleiben bei dieser Bewegung wieder die z_1 unverändert und man erhält

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x' \cos\psi - y' \sin\psi \\ y_1 &= x' \sin\psi + y' \cos\psi \\ z_1 &= z' \end{aligned}\right\}.$$

als die Beziehungen zwischen den vorhergehenden Coordinaten x_1, y_1, z_1 und den gesuchten x', y', z'.

Alle diese Bewegungen sind in der Figur in dem oben angenommenen Sinne gezeichnet und demnach die Winkel ω, ϑ, ψ, als positive anzusehen, und man wird leicht einsehen, daß es, um alle möglichen Lagen des neuen Systems zu umfassen, nothwendig ist und genügt, wenn die Winkel ω und ψ zwischen den Grenzen 0 und 2π, der Winkel ϑ dagegen zwischen 0 und π genommen wird.

Eliminirt man nun aus den vorhergehenden Gleichungen zuerst die Coordinaten x_2, y_2, z_2, so findet man zwischen den Coordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \cos\omega \cos\vartheta - y_1 \sin\omega + z_1 \cos\omega \sin\vartheta \\ y &= x_1 \sin\omega \cos\vartheta + y_1 \cos\omega + z_1 \sin\omega \sin\vartheta \\ z &= - x_1 \sin\vartheta + z_1 \cos\vartheta \end{aligned}\right\},$$

die dazu dienen können, von dem System der x, y, z zu einem System der x_1, y_1, z_1 überzugehen, in welchem die Achse der positiven z_1 durch die Winkel ω und ϑ bestimmt ist, die Achse der y_1 aber noch in der Ebene der xy liegt. Werden dann auch noch die x_1, y_1, z_1 eliminirt, so findet man die gesuchten Beziehungen:

$$\left\{\begin{aligned} x = &\quad x'(\cos\omega\cos\psi\cos\vartheta - \sin\omega\sin\psi) \\ &- y'(\cos\omega\sin\psi\cos\vartheta + \sin\omega\cos\psi) \\ &+ z'\cos\omega\sin\vartheta\,, \\ y = &\quad x'(\sin\omega\cos\psi.\cos\vartheta + \cos\omega\sin\psi) \\ &- y'(\sin\omega\sin\psi\cos\vartheta - \cos\omega\cos\psi) \\ &+ z'\sin\omega\sin\vartheta\,, \\ z = &- x'\sin\vartheta\cos\psi \\ &+ y'\sin\vartheta\sin\psi \\ &+ z'\cos\vartheta\,, \end{aligned}\right.$$

welche die Werthe der ursprünglichen Coordinaten eines Punktes durch die auf die neuen Achsen bezogenen ersetzen.

Umgekehrt hat man auch

$$\left.\begin{aligned} x' &= \quad x_1\cos\psi + y_1\sin\psi \\ y' &= - x_1\sin\psi + y_1\cos\psi \\ z' &= \quad z_1 \end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned} x_1 &= x_2\cos\vartheta - z_2\sin\vartheta \\ y_1 &= y_2 \\ z_1 &= z_2\cos\vartheta + x_2\sin\vartheta \end{aligned}\right\},$$

und zuletzt

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \quad x\cos\omega + y\sin\omega \\ y_2 &= - x\sin\omega + y\cos\omega \\ z_2 &= \quad z \end{aligned}\right\}.$$

Durch Elimination der Unbekannten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 werden daraus die Gleichungen zur Umwandlung der neuen Coordinaten in die frühern erhalten, nämlich:

$$\left\{\begin{aligned} x' = &\quad x(\cos\psi\cos\omega\cos\vartheta - \sin\psi\sin\omega) \\ &+ y(\cos\psi\sin\omega\cos\vartheta - \sin\psi\cos\omega) \\ &- z\cos\psi\sin\vartheta\,, \\ y' = &- x(\sin\psi\cos\omega\cos\vartheta + \cos\psi\sin\omega) \\ &+ y(\cos\psi\cos\omega - \sin\psi\sin\omega\cos\vartheta) \\ &+ z\sin\psi\sin\vartheta\,, \\ z' = &\quad x\cos\omega\sin\vartheta \\ &+ y\sin\omega\sin\vartheta \\ &+ z\cos\vartheta\,, \end{aligned}\right.$$

und man sieht, daß diese Gleichungen aus den obigen Werthen der Coordinaten x, y, z durch bloße gegenseitige Vertauschung der Coordinaten und der Winkel ω und ψ, von denen der zweite in Bezug auf

die Achse der z', was der erste in Bezug auf die der z ist, und durch den Zeichenwechsel aller Sinus hervorgehen.

§. 23.

Die vorhergehenden Umwandlungsgleichungen enthalten nur die nothwendigen und von einander ganz unabhängigen Winkel ω, ϑ und ψ, sie sind aber nicht symmetrisch in Bezug auf die drei Coordinaten eines Systems, und es ist in vielen Fällen, wo es sich blos um allgemeine Formen handelt, wünschenswerth, solche symmetrische Formeln zu besitzen. Diese symmetrischen Gleichungen werden offenbar erhalten, wenn man statt der obigen diejenigen Winkel einführt, welche jede der neuen Achsen mit jeder der drei gegebenen einschließt; dadurch erhält man aber auch neun zu bestimmende Größen statt drei, und es geht daraus hervor, daß diese nicht alle willkürlich sein können, sondern durch Bedingungsgleichungen in Abhängigkeit von einander stehen müssen.

Es ist mittels der Lehrsätze der sphärischen Trigonometrie und der Fig. 7 leicht nachzuweisen, daß die Coeffizienten von x', y', z' in den Werthen der Coordinaten x, y, z die Cosinus der Winkel ausdrücken, welche die positiven Achsen der x', y', z' mit jenen der x, y und z einschließen. So gibt das rechtwinklige sphärische Dreieck XX_2Z', dessen Seiten der Reihe nach ω, $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$ und $\widehat{xz'}$ sind, wenn man den Winkel zwischen der positiven Achse der z' und derjenigen der x durch $\widehat{xz'}$ bezeichnet,

$$\cos\widehat{xz'} = \sin\vartheta\cos\omega\ ;$$

das Dreieck $X'YY_2$ enthält die drei Seiten $\widehat{yx'} = X_1Y$, $\omega = YY_2$ und $\frac{1}{2}\pi - \psi = X_1Y_2$, und die zwei letztern bilden den Winkel $\vartheta = X_1AX_2$ unter sich, woraus folgt

$$\cos\widehat{yx'} = \cos\omega\sin\psi + \sin\omega\cos\psi\cos\vartheta\ .$$

Das Dreieck $Y'YY_2$, dessen Seiten $YY_2 = \omega$, $Y_2Y' = \psi$ den Winkel $\pi - \vartheta$ einschließen, welcher der Seite $YY' = \widehat{yy'}$ gegenüberliegt, gibt ebenso

$$\cos\widehat{yy'} = \cos\omega\cos\psi - \sin\omega\sin\psi\cos\vartheta\ .$$

Endlich sei noch das Dreieck $Z'YX_2$ genannt, dessen Seiten X_2Y oder

$\frac{1}{2}\pi - \omega$ und $Z'X_2 = \frac{1}{2}\pi - \vartheta$ einen rechten Winkel einschließen; man zieht daraus

$$\cos \widehat{yz'} = \sin\omega \sin\vartheta \ ,$$

u. s. f. Mittels der drei letzten Gleichungen ergibt sich dann z. B. der Werth von y in der Form:

$$y = x' \cos \widehat{yx'} + y' \cos \widehat{yy'} + z' \cos \widehat{yz'} \ ,$$

und ähnliche symmetrische Formen werden auch die Werthe von x und z annehmen.

Es ist aber einfacher und eleganter, diese symmetrischen Umwandlungsgleichungen unmittelbar mittels des Lehrsatzes der Polygonometrie: Die Projection einer Seite eines Vielecks auf irgend eine Gerade ist gleich der Summe der Projectionen aller übrigen Seiten auf dieselbe Gerade, abzuleiten.

Sind demnach AX, AY, AZ, Fig. 8, die ursprünglichen positiven Achsen der x, y, z und AX′, AY′, AZ′ die neuen Achsen der x′, y′, z′, M ein Punkt im Raume, m dessen Projection in der Ebene der xy, m′ die in der Ebene der x′y′, also $AP = x$, $Pm = y$, $Mm = z$, $AP' = x'$, $P'm' = y'$, $m'M = z'$, so ist der Fahrstrahl AM offenbar die gemeinschaftliche Seite der beiden nicht ebenen Vierecke APmM und AP′m′M, und man findet demnach und zufolge des vorhergenannten Lehrsatzes, da die Projection von AM auf die Achse AX gleich $AP = x$ ist, und die Winkel, welche die Seiten AP′, P′m′ und m′M mit derselben Achse einschließen, die nämlichen sind wie diejenigen, welche von dieser Achse AX mit den Achsen AX′, AY′ und AZ′ gebildet werden, zuerst

$$x = x' \cos \widehat{xx'} + y' \cos \widehat{xy'} + z' \cos \widehat{xz'} \ ;$$

und dann umgekehrt, indem man die Projection $AP' = x'$ von AM auf die Achse AX′ mit den Projectionen der Seiten AP, Pm und mM auf dieselbe Gerade vergleicht,

$$x' = x \cos \widehat{x'x} + y \cos \widehat{x'y} + z \cos \widehat{x'z} \ .$$

Entsprechende Formen werden auch die Ausdrücke für y und y′, z und z′ erhalten, je nachdem die erstern in die letztern oder umgekehrt diese in jene verwandelt werden sollen; man hat also zur Umwandlung der x, y, z in x′, y′, z′ die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} x = x' \cos \widehat{x x'} + y' \cos \widehat{x y'} + z' \cos \widehat{x z'} \\ y = x' \cos \widehat{y x'} + y' \cos \widehat{y y'} + z' \cos \widehat{y z'} \\ z = x' \cos \widehat{z x'} + y' \cos \widehat{z y'} + z' \cos \widehat{z z'} \end{array}\right\},$$

oder in einfacherer Form:

$$\left.\begin{array}{l} x = a x' + a' y' + a'' z' \\ y = b x' + b' y' + b'' z' \\ z = c x' + c' y' + c'' z' \end{array}\right\},$$

worin die Cosinus der Winkel, welche die neue Achse der x' mit den gegebenen Achsen der x, y, z einschließt, durch a, b, c, die der Winkel zwischen der Achse der y' und denselben Achsen mit a', b', c', und die entsprechenden Functionen für die Achse der z' durch a'', b'', c'' bezeichnet sind. Man hat demnach als Bedingungsgleichungen, daß das ursprüngliche System ein rechtwinkliges ist, nach §. 12.:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 \end{array}\right\}$$

und als Bedingung, daß auch die neuen Achsen je zwei einen rechten Winkel bilden, nach §. 19. die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} aa' + bb' + cc' = 0 \\ aa'' + bb'' + cc'' = 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 \end{array}\right\}.$$

Es geht daraus hervor, daß die neun Coeffizienten der obigen Umwandlungsgleichungen durch sechs Bedingungsgleichungen in Abhängigkeit von einander stehen, und demnach nur drei derselben willkürlich sind, daß sich aber selbst diese drei nicht auf dieselbe Achse beziehen dürfen und deßhalb weder mit demselben Buchstaben noch mit gleichen Accenten bezeichnet sein dürfen, so daß nur die Glieder einer der nachfolgenden Combinationen gleichzeitig willkürlich genommen werden können:

$$\left.\begin{array}{lll} a, & b', & c'' \\ a, & b'', & c' \\ a', & b, & c'' \\ a', & b'', & c \\ a'', & b, & c' \\ a'', & b', & c \end{array}\right\}.$$

Will man umgekehrt von den Coordinaten x′, y′, z′ zu den x, y, z zurückkehren, so werden die Umwandlungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} x' = a x + b y + c z \\ y' = a' x + b' y + c' z \\ z' = a'' x + b'' y + c'' z \end{array}\right\},$$

bei welchen dann folgende Bedingungsgleichungen eintreten:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} a b + a c + b c = 0 \\ a' b' + a' c' + a'' c'' = 0 \\ a'' b'' + a'' c'' + b'' c'' = 0 \end{array}\right\},$$

die im Grunde mit den vorhergehenden gleichbedeutend sind.

Vergleichen wir endlich noch die beiden Arten von Umwandlungsgleichungen der x, y, z in die x′, y′, z′ mit einander, so erhalten wir folgende Tabelle:

$$\left\{\begin{array}{l} a = \cos\omega \cos\psi \cos\vartheta - \sin\omega \sin\psi\,, \\ a' = -\cos\omega \sin\psi \cos\vartheta - \sin\omega \cos\psi\,, \\ a'' = \cos\omega \sin\vartheta\,, \\ b = \sin\omega \cos\psi \cos\vartheta + \cos\omega \sin\psi\,, \\ b' = -\sin\omega \sin\psi \cos\vartheta + \cos\omega \cos\psi\,, \\ b'' = \sin\omega \sin\vartheta\,, \\ c = -\cos\psi \sin\vartheta\,, \\ c' = \sin\psi \sin\vartheta\,, \\ c'' = \cos\vartheta \end{array}\right.$$

und finden daraus die einfachen Beziehungen:

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{b''}{a''}\,, \quad \operatorname{tang}\psi = -\frac{c'}{c}\,, \quad \cos\vartheta = c''$$

zwischen den unter sich unabhängigen Winkeln ω, ψ und ϑ und den Winkeln, welche von den neuen Achsen mit den gegebenen eingeschlossen werden.

§. 24.

Die Richtung der Bewegung eines materiellen Punktes ist in jedem Augenblicke dieselbe, wie die der Tangente an seiner Bahn in dem Orte, den er gerade einnimmt oder dessen Coordinaten x, y, z sind. — Die Lage dieser Geraden hängt offenbar von dem Gesetze ab, nach dem die Punkte der Bahncurve a u f e i n a n d e r f o l g e n, und kann deßhalb

nicht unmittelbar durch die Gleichungen dieser Curve bestimmt werden, da diese nur die Verhältnisse angeben, in welchen die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Curve zu einanderstehen. Man muß also zuerst untersuchen, wie sich diese Verhältnisse ändern, wenn man von jenem Punkte der Curve aus auf dieser fortgeht, oder genauer ausgedrückt, man muß zuerst aus den Gleichungen der Curve das Gesetz oder den Ausdruck ihrer Stetigkeit ableiten, nämlich das Gesetz, nach welchem sich die Verhältnisse zwischen den Coordinaten in einem beliebigen Punkte der Curve zu ändern anfangen, zu ändern im Begriffe sind. Denn man darf sich nicht blos vorstellen, daß diese Aenderung der Coordinaten oder ihrer Verhältnisse zwischen zwei Punkten stattfindet oder stattgefunden hat, man muß sich vielmehr mit dem Gedanken vertraut machen, daß diese Aenderung stetig, ununterbrochen fortgeht, daß also die Coordinaten und ihre Verhältnisse in jedem Punkte in der Aenderung begriffen sind und zwar nach einem bestimmten Gesetze, welches durch die Gestalt der Curve und ihre Lage gegen die Coordinatenachsen bedingt ist und welches demnach der Ausdruck ihrer Stetigkeit und zwar ihrer besondern Art von Stetigkeit sein wird.

Das Bedürfniß, die Stetigkeit der Curven und der Bewegungen analytisch auszudrücken oder in die Rechnung einzuführen, um ihre Eigenschaften allgemein untersuchen und darstellen zu können, war die nächste Veranlassung zur Erfindung der Differential- und Integral-Rechnung, welche man diesem ihrem Zwecke am entsprechendsten zusammen mit dem Namen: Stetigkeitsrechnung bezeichnen würde, und ich nehme hievon Veranlassung, hier einige Betrachtungen über diese Rechnung, welche der Natur der Sache nach das einzige wissenschaftliche und sichere Hülfsmittel für die Darstellung und Erweiterung der Mechanik ist, anzureihen, theils um zu zeigen, wie natürlich, einfach und klar sich die genannte Rechnung von unserm obigen Gesichtspunkte aus darstellt, theils um einige allgemeine Eigenschaften der Curven und Flächen abzuleiten, deren Kenntniß uns in der Folge nöthig sein wird. Aus diesem Grunde und um der Vorstellung des Lesers in Betreff der stetigen Größen, mit denen wir es hier zu thun haben, immer eine bestimmte Richtung zu geben, werden sich diese Betrachtungen strenge innerhalb der geometrischen Anwendung halten.

§. 25.

Seien zuerst

$$y = f_1(x), \quad z = f_2(x)$$

die Gleichungen einer Curve in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem oder die Ausdrücke für die Verhältnisse zwischen den Coordinaten x, y, z irgend eines beliebigen Punktes M derselben. Geht man nun von diesem Punkte zu einem folgenden M' weiter, dessen Abstand von der Ebene der yz um eine kleine Länge $\varDelta x$ größer, also gleich $x+\varDelta x$ ist, so werden die obigen Gleichungen ähnliche Vergrößerungen: $\varDelta y$ und $\varDelta z$ für die Coordinaten y und z geben; man erhält nämlich die Gleichungen:

$$y+\varDelta y=f_1(x+\varDelta x)\ ,\quad z+\varDelta z=f_2(x+\varDelta x)\ ,$$

oder

$$\varDelta y=f_1(x+\varDelta x)-f_1(x)\ ,\quad \varDelta z=f_2(x+\varDelta x)-f_2(x) \qquad \text{(a.}$$

und zieht aus den letztern die Verhältnisse:

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{f_1(x+\varDelta x)-f_1(x)}{\varDelta x}\ ,\quad \frac{\varDelta z}{\varDelta x}=\frac{f_2(x+\varDelta x)-f_2(x)}{\varDelta x}\ , \qquad \text{(b.}$$

welche zwischen den Aenderungen der Coordinaten y und z und der Aenderung der x in dem Punkte M' stattfinden. Läßt man dann diese letztere Aenderung $\varDelta x$ immer kleiner und zuletzt Null werden, wodurch man offenbar in den Punkt M zurückkommt, so werden auch die Aenderungen $\varDelta y$ und $\varDelta z$ immer kleiner und zuletzt Null; dabei behalten aber die vorhergehenden Verhältnisse der Aenderungen von y und z zu der von x immer bestimmte Werthe, und selbst dann noch, wenn die Aenderung $\varDelta x$ Null geworden, oder wenn man in den Punkt M zurückgekehrt ist.

Denn man darf sich diese Aenderungen: $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$ nicht blos als bestimmte Vergrößerungen der Veränderlichen x, y, z denken, also als Größen, welche in dem Punkte M gar nicht existiren, sondern man hat dieselben als veränderliche Größen zu betrachten, denen beliebig viele stetig in einander übergehende Werthe zukommen können, und die im Punkte M mit einander durch den Werth: Null gehen, um, wenn man will, auch negative Werthe anzunehmen, wie man sich bei allen Functionen unter dem Werthe: Null der Veränderlichen immer nur einen Durchgangs- oder Entstehungswerth, nicht ein absolutes Nichtvorhandensein vorstellt, da es sonst gar keinen Sinn hätte von dem Werthe einer solchen Function zu reden, wenn die Veränderliche Null ist, z. B. zu sagen, cos 0 sei gleich 1, weil es für ein absolutes Nichts weder einen Cosinus noch überhaupt eine Function gibt. Wir denken vielmehr, wenn wir von cos 0 reden,

immer an einen Winkel, welcher Null geworden ist, oder welcher eben anfängt zu entstehen, um nach und nach jede beliebige Größe zu erreichen, und in gleicher Weise müssen wir uns unter unsern Aenderungen Δx, Δy, Δz Größen vorstellen, welche im Punkte M im Entstehen oder im Durchgang durch den Werth: Null begriffen sind, um nach und nach in stetiger Aenderung beliebige Werthe anzunehmen.

In der That überzeugt man sich leicht, daß die obige Ableitung der Werthe von Δy und Δz darauf hinausgeht,

$$x + \Delta x \text{ für } x\,,\quad y + \Delta y \text{ für } y\,,\quad z + \Delta z \text{ für } z$$

in die Gleichungen der Curve einzuführen, also die Achsen der Coordinaten parallel zu ihren frühern Richtungen durch den Punkt M oder xyz zu legen und die Gestalt und Lage der Curve in Bezug auf dieses neue Achsensystem durch die Veränderlichen: Δx, Δy, Δz mittels der Gleichungen (a), in denen nun x, y, z bestimmte Werthe vorstellen, auszudrücken; die durch die Gleichungen (b) dargestellten Verhältnisse dieser neuen Coordinaten zu einander, werden also im Allgemeinen wieder neue Veränderliche sein, welche sich ebenso stetig ändern, wie die Veränderlichen Δx, Δy, Δz selbst, welche daher auch wie in jedem andern Punkte M' der Curve, so auch im Anfangspunkte M, oder wie für jeden andern Werth der Veränderlichen Δx, so auch für den Werth: Null derselben, einen bestimmten Werth haben, obgleich sie, wie es bei so vielen andern analytischen Functionen für besondere Werthe ihrer Veränderlichen der Fall ist, für diesen Werth von Δx unter der unbestimmten Form: $\frac{0}{0}$ erscheinen. Denn gemäß der Bedingung, daß die Function: $f(x+\Delta x) - f(x)$ mit Δx Null werden muß, kann man sich dieselbe immer unter der Form:

$$\Delta x\, f'(x+\alpha\Delta x)\,,$$

worin α irgend eine Verhältnißzahl bedeutet, vorstellen, welches auch die bekannten oder nicht bekannten Umwandlungen sein mögen, durch die man jene Function auf diese Form bringen kann; das Verhältniß:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

kommt demnach auf den einfacheren Ausdruck:

$$f'(x+\alpha\Delta x)$$

zurück und nimmt für $\Delta x = 0$ den bestimmten Werth $f'(x)$ an.

Nach dieser durchaus klaren, bestimmten und strenge mathematischen Vorstellungsweise wird es denn auch einleuchten, daß es durchaus unnöthig und selbst unrichtig ist, sich diese Aenderungen im Punkte M als unendlich kleine Größen zu denken, ebenso wenig, als man sich, um das vorige Beispiel noch einmal anzuführen, bei $\cos 0 = 1$ den Winkel 0 als einen unendlich kleinen denkt und sich vorstellt, die Projection einer begrenzten Geraden auf eine gegebene Richtung werde dieser Geraden selbst gleich, wenn der Winkel zwischen beiden unendlich klein geworden sei; denn diese Gleichheit tritt nur vollkommen ein, wenn der Winkel scharf Null geworden, wenn die Gerade mit jener Richtung ganz und gar zusammengefallen ist *). Ebenso sieht man ein, daß auch die Benennung: Grenzen, womit man den Werth: Null von $\varDelta x$ und die entsprechenden Werthe der Verhältnisse (b) bezeichnet, auf einer unklaren, um nicht zu sagen unrichtigen Ansicht beruht. Ich werde deßhalb diese dem Punkte M, dem Anfangspunkte der Veränderlichen $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$ entsprechenden Werthe künftig Entstehungs- oder Anfangswerthe nennen, und sie durch die Bezeichnung:

$$\left\{\begin{aligned} \text{Anf:}\,\frac{\varDelta y}{\varDelta x} &= \text{Anf:}\,\frac{f_1(x+\varDelta x)-f_1(x)}{\varDelta x} \\ \text{Anf:}\,\frac{\varDelta z}{\varDelta x} &= \text{Anf:}\,\frac{f_2(x+\varDelta x)-f_2(x)}{\varDelta x} \end{aligned}\right.$$

andeuten, wenn sie noch unentwickelt gedacht sind. Die entwickelten Werthe, welche nach den Regeln der Differentialrechnung daraus abgeleitet werden und welche im Allgemeinen noch Functionen von x sind, stellt man durch

$$\frac{dy}{dx} = f'_1(x) = y', \quad \frac{dz}{dx} = f'_2(x) = z'$$

vor, und hat sie Differentialquotiente und abgeleitete Functionen genannt; die Bezeichnungen dx, dy, dz heißen dann Diffe-

*) Man wird die obige Vorstellung von den Aenderungen $\varDelta x$, etc. und ihren Verhältnissen leicht auch auf andere analytische Functionen übertragen, denen keine besondere Bedeutung zukommt, und so den unbestimmten Begriff des Unendlich-Kleinen, welches im Grunde nur ein dehnbares Null ist und das nicht nur der strengen mathematischen Form Eintrag thut, indem dadurch alle Gesetze der höhern Mathematik als blos angenähert richtige erscheinen, sondern auch vielfach falsche Vorstellungen und Schlüsse veranlaßt, aus der Mathematik gänzlich verbannen.

rentiale von x, y, z; sind aber bloße Formgrößen, für welche, wenn sie einzeln betrachtet werden, kein bestimmter Werth denkbar ist, indem sie diesen nur erhalten, wenn sie in der Form eines Bruches oder Quotienten erscheinen, unter welchen sie eine sehr bequeme abgekürzte Bezeichnung einer bestimmten abgeleiteten Function der im Nenner stehenden Veränderlichen vorstellen, während die im Zähler aufgeführte Veränderliche die entsprechende ursprüngliche Function vertritt oder eine Größe vorstellt, deren Werth durch diese letztere ausgedrückt wird.

Diese bestimmten Werthe nun, welche die Verhältnisse der Größen Δy und Δx, Δz und Δx im Punkte M, wo diese Größen selbst im Durchgang durch den Werth: Null oder im Entstehen begriffen sind, annehmen, die also ausdrücken, in welchem Verhältnisse die Größen Δy und Δz mit der Größe Δx entstehen, oder in welchem Verhältnisse sich die Coordinaten y und z mit der x ändern wollen, diese **Aenderungsgesetze** der abhängigen Veränderlichen y und z in Bezug auf die unabhängig oder willkürlich veränderliche Größe x sind es offenbar, welche den oben angedeuteten Ausdruck der Stetigkeit der betreffenden Curve darstellen, und sowohl im Allgemeinen, als besonders in dem Punkte M, in dem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, den Lauf, die Richtung oder Wendung der Curve kennzeichnen.

Zuerst läßt sich daraus im Allgemeinen erkennen, ob eine Curve sich von den Ebenen der xz und xy entfernt, wenn man auf ihr im Sinne der positiven x fortgeht, oder ob sie sich diesen Ebenen nähert. Das erstere wird stattfinden, wenn die y und z mit x zugleich wachsen, also wenn die Aenderungsgesetze:

$$\frac{dy}{dx} = f'_1(x)\ , \quad \frac{dz}{dx} = f'_2(x)$$

positiv sind; das letztere dagegen, wenn y und z für ein wachsendes x abnehmen, d. h. wenn diese abgeleiteten Functionen negativ werden. Findet man demnach für $\frac{dy}{dx}$ in zwei verschiedenen Punkten einer Curve in dem einen einen positiven, in dem andern einen negativen Werth, so muß diese Function in einem dazwischenliegenden Punkte den Werth: 0 oder ∞ gehabt haben, und es ist leicht zu sehen, daß im ersten Falle, wo $\frac{dy}{dx}$ den Werth: 0 hat, die Ordinate y in dem entsprechenden Punkte weder im Zu- noch im Abnehmen begriffen ist und daselbst einen größten oder kleinsten Werth erreicht hat, nämlich einen größern oder kleinern,

als in den vorhergehenden oder nachfolgenden Punkten, während im zweiten Falle, wo $\frac{dy}{dx} = \infty$ ist, gerade y in der stärksten Aenderung begriffen ist, und x kein Bestreben zur Aenderung zeigt und demnach einen Grenzwerth besitzt, wenn nicht y selbst durch den Werth: ∞ geht.

Es können aber die Functionen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ die Werthe: Null oder Unendlich erhalten, ohne daß ein Zeichenwechsel für die vorhergehenden und nachfolgenden Punkte eintritt; dann sind die entsprechenden Werthe von y und z oder von x nicht mehr größte oder kleinste Werthe, aber man erkennt daraus, daß die Curve in diesem Punkte eine Wendung macht.

So wird man z. B. bei der ebenen Curve Fig. 9 von a bis b und von d bis c den Werth von $\frac{dy}{dx}$ positiv, von b bis c oder von a bis d negativ, in b und d gleich Null, in a und c unendlich finden, und demnach für y in b und d, und da y nicht unendlich wird, für x in a und c Grenzwerthe erhalten. Bei der ebenen Curve Fig. 10 dagegen wird man in a ebenfalls $\frac{dy}{dx} = 0$, in b $= \infty$ finden, ohne daß Grenzwerthe für y oder x vorhanden sind, da sich die Curve in beiden Punkten von den Achsen der x und y gleichzeitig entfernt, also $\frac{dy}{dx}$ immer positiv bleibt *).

§. 26.

Vergleichen wir ferner den Lauf zweier Curven ML und ML', Fig. 11 und 12, welche in derselben Ebene liegen und von demselben Punkte M ausgehen, so werden die Vergrößerungen mN oder Δy und mN' oder $\Delta y_,$ der gemeinschaftlichen Ordinate PM oder y, welche demselben kleinen Zuwachs $Pp = \Delta x$ der Abscisse AP oder x entsprechen und demnach auch die Verhältnisse:

$$\frac{\Delta y_,}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

*) Bei allen diesen Betrachtungen ist es am einfachsten, das Coordinatensystem so zu wählen, daß der betreffende Punkt der Curve auf die positive Seite der Achsen zu liegen kommt.

für die beiden Curven verschieden sein. Es wird also der Unterschied dieser Verhältnisse oder die Differenz:

$$\frac{\Delta y_{,}}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

im Allgemeinen einen positiven oder negativen Werth erhalten. Geht man nun zu dem Anfangswerth dieser Differenz, welcher bekanntlich dem Unterschiede der Entstehungswerthe der beiden Verhältnisse gleich ist, und findet auch für diese noch einen von Null verschiedenen Werth, so ist daraus zu schließen, daß die beiden Curven schon im Punkte M verschiedene Gesetze in der Aenderung der Coordinaten befolgen, also von diesem Punkte aus in verschiedenen Richtungen auseinandergehen, d. h. sich in M schneiden. Fig. 11. Erhält man dagegen Null als Anfangswerth der obigen Differenz, so sind die Gesetze der Coordinatenänderung für beide Curven in dem Punkte M gleich, die Curven haben also in diesem Punkte dieselbe Richtung, denselben Zug und berühren sich. Fig. 12. Im ersten Falle, wo sich die Curven schneiden, wird die obige Differenz immer dasselbe Zeichen behalten, ob man Δx positiv oder negativ nimmt, wie man sich leicht überzeugen kann; im zweiten Falle kann dies auch stattfinden und die beiden Curven werden sich dann schneiden und berühren; in den Fällen jedoch, welche am häufigsten vorkommen, ändert jene Differenz das Zeichen, indem sie durch den Werth Null geht, und es findet dann nur Berührung zwischen den beiden Curven statt.

Sind nach diesem

$$y_{,} = F(x_{,}), \quad y = f(x)$$

die Gleichungen der beiden Curven, und

$$\frac{dy_{,}}{dx_{,}} = F'(x_{,}), \quad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

deren Aenderungsgesetze oder abgeleitete Functionen, so erhält man zuerst als Bedingung, daß sie einen Punkt gemeinschaftlich haben, dessen Abscisse $x = x_{,} = a$ ist:

$$F(a) = f(a),$$

und dann als Bedingung, daß sie sich dort berühren:

$$\text{Anf}: \left(\frac{\Delta y_{,}}{\Delta x_{,}} - \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dy_{,}}{dx_{,}} - \frac{dy}{dx} = F'(a) - f'(a) = 0,$$

worin $F(a)$ den Werth der Function $F(x_{,})$, $F'(a)$ den der Function $F'(x_{,})$ bezeichnet, wenn darin $x_{,}$ gleich a gesetzt wird, und $f(a)$, $f'(a)$

die den Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ für $x = a$ zukommenden Werthe vorstellen.

Aehnliche Schlüsse lassen sich auch bei den Curven im Raume ziehen, und es ist leicht zu sehen, daß man hier zwei Bedingungen für die Berührung erhalten wird, nämlich die, daß die Gesetze der Coordinatenänderung sowohl für die y als für die z bei beiden Curven in dem gemeinschaftlichen Punkte dieselben sind, daß man also hat:

$$\text{Anf}: \left(\frac{\Delta y_{,}}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 0, \quad \text{Anf}: \left(\frac{\Delta z_{,}}{\Delta x} - \frac{\Delta z}{\Delta x}\right) = 0.$$

Wenn demnach die beiden Curven durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} y_{,} = F_1(x_{,}) \\ z_{,} = F_2(x_{,}) \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} y = f_1(x) \\ z = f_2(x) \end{array}\right.$$

gegeben sind, so erhält man für den gemeinschaftlichen Punkt M, dessen Abscisse $x = x_{,} = a$ sei,

$$F_1(a) = f_1(a), \quad F_2(a) = f_2(a)$$

und für den Fall, daß zwischen beiden Curven Berührung stattfindet, die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy_{,}}{dx_{,}} - \dfrac{dy}{dx} = F'_1(a) - f'_1(a) = 0 \\[2ex] \dfrac{dz_{,}}{dx_{,}} - \dfrac{dz}{dx} = F'_2(a) - f'_2(a) = 0 \end{array}\right\},$$

welche umgekehrt auch als nothwendige und genügende Bedingungen für die Berührung beider Curven in dem gemeinschaftlichen Punkte M gelten werden.

Nehmen wir z. B. die gerade Linie als eine der beiden Curven, während die Form der andern unbestimmt bleiben mag, bezeichnen wir die laufenden Coordinaten für die erstere mit $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, für die letztere mit x, y, z, und lassen jene, die Gerade, durch einen unbestimmten Punkt M der zweiten gehen, dessen Coordinaten mithin ebenfalls x, y, z sein werden, so werden die Gleichungen dieser Linien die Formen erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} (y_{,} - y)\cos l = (x_{,} - x)\cos m \\ (z_{,} - z)\cos l = (x_{,} - x)\cos n \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = f_1(x) \\ z = f_2(x) \end{array}\right\},$$

worin l, m, n die Winkel bezeichnen, welche die Gerade mit den drei Coordinatenächsen bildet. Die Gleichungen dieser Geraden geben dann die Aenderungsgesetze:

$$F'_1(x_,) = \frac{dy_,}{dx_,} = \frac{\cos m}{\cos l}, \quad F'_2(x_,) = \frac{dz_,}{dx_,} = \frac{\cos n}{\cos l},$$

und die obigen Bedingungen für die Berührung in dem unbestimmten Punkte M werden

$$\frac{\cos m}{\cos l} = f'_1(x) = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{\cos n}{\cos l} = f'_2(x) = \frac{dz}{dx}.$$

Verbindet man diese beiden Gleichungen mit der bekannten:

$$\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1,$$

so lassen sich daraus die Werthe von cos l, cos m, cos n ziehen; man findet

$$\cos l = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = U \quad = \frac{dx}{ds},$$

$$\cos m = \frac{\frac{dy}{dx}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = U\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds},$$

$$\cos n = \frac{\frac{dz}{dx}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = U\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{ds}.$$

wo s die Länge des Bogens der Curve zwischen einem festen Punkte C und dem Berührungspunkte M bezeichnet; dieselbe ist nothwendig eine Function der Coordinaten x, y, z dieses Punktes oder auch eine Function der Veränderlichen x allein, wenn man die beiden andern durch die letztere ausdrückt, und man findet allgemein als Aenderungsgesetz dieser Function den Ausdruck:

$$\frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{1}{U},$$

welcher bei der Lehre vom Schwerpunkte streng abgeleitet werden soll. In den obigen Werthen von cos l, cos m, cos n tritt jedoch s als unabhängige Veränderliche auf, und die x, y, z sind als Functionen von s zu betrachten.

Durch diese Werthe sind also die drei Winkel l, m, n bestimmt, welche die Tangente an der Curve oder die Richtung der Bewegung eines materiellen Punktes in irgend einem Orte dieser Curve mit den drei Coordinatenachsen bildet. Die Gleichungen dieser Tangente oder der Richtung der Bewegung ergeben sich übrigens ohne jene Werthe unmittelbar aus den Bedingungsgleichungen der Berührung, indem man für die Verhältnisse $\frac{\cos m}{\cos l}$, $\frac{\cos n}{\cos l}$ die entsprechenden $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ substituirt; diese Gleichungen sind also:

$$\left.\begin{aligned} y_{,} - y &= \frac{dy}{dx}(x_{,} - x) \\ z_{,} - z &= \frac{dz}{dx}(x_{,} - x) \end{aligned}\right\}.$$

Will man endlich noch aus ihnen die Gleichung der Normal-Ebene der Curve in dem Punkte M ableiten, so findet man nach §. 18

$$x' - x + (y' - y)\frac{dy}{dx} + (z' - z)\frac{dz}{dx} = 0,$$

worin x', y', z' die laufenden Coordinaten vorstellen. Symmetrischer wird diese Gleichung mit den obigen Werthen von $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$; sie nimmt dadurch die Form an:

$$(x' - x)\frac{dx}{ds} + (y' - y)\frac{dy}{ds} + (z' - z)\frac{dz}{ds} = 0,$$

unter welcher wir sie künftig anwenden werden.

§. 27.

Das bisher in Betrachtung gezogene Gesetz der Coordinatenänderung in dem Punkte xyz drückt aber die besondere Art der Stetigkeit einer Curve noch nicht vollständig aus, es gibt gleichsam nur den Umriß oder Grundzug derselben. Denn es ist oben angedeutet worden, daß die abgeleiteten Functionen im Allgemeinen selbst wieder Functionen der Veränderlichen x sind, woraus nothwendig folgt, daß das Gesetz der Coordinatenänderung selbst wieder mit dem Werthe von x, also von einem Punkte der Curve zum andern, ein anderes wird. Diese Aenderung geht aber ebenso stetig vor sich, wie die Aenderung der Coordinaten, und der Ausdruck dieser Veränderungen in dem Gesetze der Coordinatenänderung oder das zweite Gesetz der Coordinaten-

Aenderung wird sowohl im Allgemeinen, als in einem besondern Punkte der Curve die Art ihrer Stetigkeit näher bezeichnen und demnach dazu dienen, ihre Gestalt und Eigenschaften näher kennen zu lernen.

Um dieses zweite Aenderungsgesetz zu erhalten, gehen wir wieder von dem Punkte M, dessen Coordinaten x, y, z sind, zu einem folgenden M′ auf derselben Curve fort, welcher um die kleine Aenderung Δx von x weiter von der Ebene der yz entfernt ist, und vergleichen die ersten Aenderungsgesetze in beiden Punkten unter sich und mit der Aenderung Δx. In dem ersten Punkte haben wir für die Aenderung der Coordinaten die Ausdrücke:

$$\frac{dy}{dx} = f'_1(x)\,, \qquad \frac{dz}{dx} = f'_2(x)\,;$$

diese nehmen also für den zweiten Punkt, dessen Coordinaten $x+\Delta x$, $y+\Delta y = y'$, $z+\Delta z = z'$ sind, die Formen an:

$$\frac{dy'}{dx} = f'_1(x+\Delta x)\,, \qquad \frac{dz'}{dx} = f'_2(x+\Delta x)\,,$$

und geben die Verhältnisse:

$$\frac{\frac{dy'}{dx} - \frac{dy}{dx}}{\Delta x} = \frac{\Delta.\frac{dy}{dx}}{\Delta x} = \frac{f'_1(x+\Delta x) - f'_1(x)}{\Delta x}\,,$$

$$\frac{\frac{dz'}{dx} - \frac{dz}{dx}}{\Delta x} = \frac{\Delta.\frac{dz}{dx}}{\Delta x} = \frac{f'_2(x+\Delta x) - f'_2(x)}{\Delta x}\,.$$

Wird nun Δx immer kleiner, so nähern sich diese Verhältnisse wieder ihren Anfangswerthen, die sie für $\Delta x = 0$ oder im Punkte M selbst wirklich annehmen. Diese Anfangswerthe sind im Allgemeinen immer noch Functionen von x und werden den vorhergehenden Ausdrücken zufolge, aus den Functionen $f'_1(x)$, $f'_2(x)$ ganz in derselben Weise abgeleitet, wie diese selbst aus den ursprünglichen Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$; man nennt sie deßhalb auch zweite abgeleitete Functionen, zweite Differential-Quotienten, indem man die frühern von ihnen durch die Benennung: erste abgeleitete Functionen, erste Differential-Quotienten unterscheidet; sie werden denn auch in entsprechender Weise durch

$$\frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = f''_1(x)\,, \qquad \frac{d.\frac{dz}{dx}}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} = f''_2(x)$$

bezeichnet, wobei sich die Formen $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ von den Formen $\frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx}$, $\frac{d.\frac{dz}{dx}}{dx}$ wesentlich darin unterscheiden, daß in den letztern x nicht nothwendig als ganz unabhängige Veränderliche angesehen werden muß, sondern selbst als Function einer neuen Veränderlichen s oder t, etc. genommen werden kann, während in den ersten x nur als willkürliche unabhängige Veränderliche auftritt.

Betrachten wir nun diese zweite abgeleitete Function zuerst wieder in Bezug auf die Zeichen, so ist einleuchtend, daß wenn dieselbe einen positiven Werth hat, das erste Aenderungsgesetz im Wachsen begriffen ist, daß also das Verhältniß, nach welchem die y oder z mit der x wachsen immer größer, oder das Verhältniß, nach welchem jene Veränderlichen mit den wachsenden x abnehmen, immer kleiner wird; das erste Aenderungsgesetz wird dagegen abnehmen, wenn das zweite einen negativen Werth hat, und keine Aenderung zeigen, wenn dieses Null wird. Dieser letzte Werth findet aber bei einer geraden Linie, für welche die ersten Aenderungsgesetze $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ unveränderlich sind, in allen Punkten statt. Vergleichen wir deßhalb eine gegebene Curve in irgend einem ihrer Punkte mit der Geraden, welche sie in demselben Punkte berührt, so geht aus dem eben Gesagten hervor, daß sich die Curve, wenn $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ ist, mehr, wenn es < 0 ist, weniger als die Tangente von der Ebene der xz entfernen wird, daß sie also im ersten Falle, wie in Fig. 13, dieser Ebene die gewölbte, convexe, im zweiten Falle, wie in Fig. 14, die hohle oder concave Seite zuwendet. Daraus folgt ferner, daß wenn das zweite Aenderungsgesetz in einem Punkte der Curve durch den Werth: Null oder Unendlich geht und dabei das Zeichen wechselt, die Curve in diesem Punkte eine Wendung macht, wie in den Punkten a und b Fig. 15. Auch erhalten wir dadurch ein Mittel um entscheiden zu können, ob für $\frac{dy}{dx} = 0$, die Ordinate y einen größten oder einen kleinsten Werth erhält, oder ob keines von beiden stattfindet. Es ist nämlich in diesem Falle die Tangente zur Ebene der xz parallel, und y hat offenbar einen kleinsten Werth, wenn die Curve dieser Ebene die gewölbte Seite zuwendet, oder wenn das zweite Aenderungs-

gesetz $\frac{d^2y}{dx^2}$ einen positiven Werth hat; einen größten dagegen, wenn die Curve derselben Ebene die hohle Seite zukehrt und demnach der Ausdruck $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist. Weder das eine noch das andere wird stattfinden, wenn die Curve eine Wendung macht, also das zweite Aenderungsgesetz mit dem ersten Null wird. In den Fällen, wo das erste Aenderungsgesetz unendlich wird, wird indessen das zweite meistens auch unendlich, weil dann immer eine Wendung der Curve stattfindet, entweder wie in a oder in b Fig. 16. Um also von einem solchen Punkte nähere Kenntniß zu erhalten, muß man die Coordinaten wechseln, oder x als Function von y nehmen.

Aus den Erklärungen, die bereits über das zweite Gesetz der Coordinatenänderung gegeben wurden, folgt nun ferner, daß zwei Curven, welche einen Punkt gemeinschaftlich haben und in diesem nicht nur eine gleiche Aenderung der Coordinaten zeigen, sondern auch demselben Gesetze in der Veränderung dieser Coordinatenänderung folgen, in diesem Punkte eine viel größere Aehnlichkeit in ihrer Gestalt, oder eine viel größere Annäherung zur Congruenz haben müssen, als dies bei einer einfachen Berührung der Fall ist. Man unterscheidet deßhalb auch jene stärkere Annäherung zur Congruenz, jene innigere Berührung der beiden Curven von dieser einfachen durch die Bezeichnung: Berührung zweiter Ordnung.

Sind demnach wieder

$$\left.\begin{aligned} y_, &= F_1(x_,) \\ z_, &= F_2(x_,) \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{aligned} y &= f_1(x) \\ z &= f_2(x) \end{aligned}\right.$$

die Gleichungen der beiden Curven, und ist für den gemeinschaftlichen Punkt $x_, = x = a$, so werden nun nicht nur die frühern Bedingungen für die Berührung erster Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} F_1(a) &= f_1(a) \qquad & F_2(a) &= f_2(a) \\ F'_1(a) &= f'_1(a) \qquad & F'_2(a) &= f'_2(a) \end{aligned}\right\},$$

sondern auch noch die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y_,}{dx_,^2} &= F''_1(a) = f''_1(a) = \frac{d^2y}{dx^2} \\ \frac{d^2z_,}{dx_,^2} &= F''_2(a) = f''_2(a) = \frac{d^2z}{dx^2} \end{aligned}\right\}.$$

erfüllt werden müssen, damit diese Curven eine Berührung der zweiten Ordnung in dem betreffenden Punkte eingehen.

Für die gerade Linie ist, wie schon bemerkt wurde, das zweite Aenderungsgesetz in allen Punkten derselben Null; eine Gerade kann demnach mit einer Curve nur in solchen Punkten eine Berührung zweiter Ordnung haben, in denen auch für die letztere das zweite Aenderungsgesetz den Werth: Null erhält, also nach dem Vorhergehenden nur in solchen Punkten, in denen die Curve eine Wendung macht.

§. 28.

Nach der Geraden ist die Kreislinie diejenige, mit welcher wir am besten vertraut sind; wir werden deßhalb auch die Gestalt einer Curve in einem ihrer Punkte und in dessen Nähe am besten durch Vergleichung derselben mit einem Kreise kennen lernen, und zwar mit demjenigen, der unter allen, welche durch denselben Punkt gehen und dieselbe Tangente mit der Curve gemeinschaftlich haben, der Curve sich am meisten nähert, der also eine Berührung zweiter Ordnung mit derselben eingeht; dieser Kreis wird gewöhnlich von den übrigen durch den Namen: Krümmungskreis unterschieden, weil er zugleich dazu dient, die Krümmung der Curve in dem betreffenden Punkte zu messen.

Der Begriff der Krümmung entsteht aus der Vergleichung eines Kreisbogens mit seiner Tangente und wir nennen einen Kreis mehr oder stärker gekrümmt, als einen andern, wenn er sich in der Nähe des Berührungspunktes schneller von der gemeinschaftlichen Tangente entfernt, und dieses ist offenbar immer für denjenigen der Fall, welcher den kleinsten Halbmesser hat. Daraus schon kann der Schluß gezogen werden, daß die Krümmungen zweier Kreise im umgekehrten Verhältnisse ihrer Halbmesser stehen werden. Um diesen Schluß indessen auf eine einfache Weise streng zu begründen, dürfen wir nur das zweite Aenderungsgesetz der Coordinaten eines Kreises für einen Punkt herstellen, wo die Tangente der Achse der x parallel ist; denn nach dem Vorhergehenden wird man aus diesem zweiten Aenderungsgesetze das Bestreben des Kreises sich von seiner Tangente zu entfernen beurtheilen können, und zwar wird dieses Bestreben in dem Punkte, wo die Tangente zur Achse der x parallel ist, in senkrechter Richtung zu der letztern geschätzt werden müssen, weil dadurch allein eine allgemeine Vergleichung erzielt werden kann. Wir werden also diesen Zweck am einfachsten dadurch erreichen, daß wir das zweite Gesetz der Coordinatenänderung für einen Kreis suchen, welcher die Achse der x im Anfangspunkte berührt und zwar für diesen Anfangs-

punkt selbst. Die Gleichung dieses Kreises, dessen Halbmesser ϱ sein soll, ist dann

$$y^2 - 2\varrho y + x^2 = 0 ,$$

und gibt allgemein

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x}{y-\varrho} ,$$

$$(y - \varrho)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0 .$$

Für den Anfangspunkt hat man also

$$\frac{dy}{dx} = 0 , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho} .$$

Bezeichnen wir nun die Krümmungen zweier Kreise, deren Halbmesser ϱ und ϱ' sind, mit C und C', indem wir diese Eigenschaft der Krümmung als meßbare mathematische Größe nehmen, so haben wir in der That die Proportion:

$$C : C' = \frac{1}{\varrho} : \frac{1}{\varrho'} ,$$

und wenn wir ferner, um ein Maaß für diese Eigenschaft zu erhalten, die Krümmung C' desjenigen Kreises, dessen Halbmesser ϱ' der Längeneinheit gleich ist, als Einheit für die Krümmung nehmen, so folgt allgemein

$$C = \frac{1}{\varrho} ,$$

und das Maaß der Krümmung eines Kreises wird durch den verkehrten Halbmesser desselben ausgedrückt.

Bei einem Kreise ist die Krümmung natürlich für alle Punkte desselben gleich; für jede andere Curve dagegen ändert sich die Krümmung von einem Punkte zum andern, sie ist also eine Function der Coordinaten dieses Punktes, und diese Function lernen wir durch den Ausdruck für den Halbmesser ϱ des Krümmungskreises oder des Kreises, welcher in dem betreffenden Punkte eine Berührung zweiter Ordnung mit der Curve eingeht, kennen; denn man hat in diesem Punkte wie oben

$$\varkappa = \frac{1}{\varrho} ,$$

wo nun $\varkappa$ die veränderliche Krümmung, und ϱ den Krümmungshalbmesser oder den Halbmesser des Krümmungskreises in dem entsprechenden Punkte bezeichnet.

§. 29.

Bestimmen wir also diesen Krümmungskreis, nämlich die Lage seines Mittelpunktes und die Länge seines Halbmessers.

Die allgemeinen Gleichungen des Kreises, welcher durch einen Punkt M der gegebenen Curve:

$$\left.\begin{array}{l} y = f_1(x) \\ z = f_2(x) \end{array}\right\}$$

geht, haben die Formen:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_,-x) + B(y_,-y) + C(z_,-z) = 0 \\ (x_,-\alpha)^2 + (y_,-\beta)^2 + (z_,-\gamma)^2 - \varrho^2 = 0 \end{array}\right\}.$$

Die erste dieser Gleichungen ist die Gleichung der Ebene des Krümmungskreises und wird deßhalb gewöhnlich Krümmungsebene genannt; die zweite ist die einer Kugelfläche, auf welcher der Krümmungskreis ein größter Kreis ist, welche also den Halbmesser und Mittelpunkt mit diesem gemeinschaftlich hat; α, β, γ sind die Coordinaten des letztern oder des Krümmungs-Mittelpunktes, ϱ wie vorher der Krümmungs-Halbmesser.

Die Ebene eines Kreises geht auch durch seinen Mittelpunkt; daraus folgt die Gleichung

$$A(\alpha - x) + B(\beta - y) + C(\gamma - z) = 0\,; \qquad \text{(a.}$$

die Kugelfläche ihrerseits muß durch den Punkt M der Curve gehen, dessen Coordinaten x, y, z sind; dadurch ergibt sich

$$\varrho^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\,. \qquad \text{(b.}$$

Die Gleichung der Ebene gibt das Aenderungsgesetz:

$$A + B\frac{dy'}{dx_,} + C\frac{dz'}{dx_,} = 0$$

die der Kugelfläche:

$$(x_,-\alpha) + (y_,-\beta)\frac{dy'}{dx_,} + (z_,-\gamma)\frac{dz_,}{dx_,} = 0\,,$$

beide Aenderungsgesetze in Bezug auf die Veränderliche x, als unabhängige Veränderliche genommen.

Nach den Bedingungen für die einfache Berührung hat man nun in diesen Ausdrücken

$$x_{,} = x \quad , \quad y_{,} = y \quad , \quad z_{,} = z$$

$$\frac{dy_{,}}{dx_{,}} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz_{,}}{dx_{,}} = \frac{dz}{dx}$$

zu setzen, wodurch sie die Formen annehmen:

$$A + B\frac{dy}{dx} + C\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$x - \alpha + (y - \beta)\frac{dy}{dx} + (z - \gamma)\frac{dz}{dx} = 0.$$

Mittels dieser Gleichungen und der Gleichungen (a) und (b) kann man nun vier von den für die Gleichungen des Kreises nothwendigen Größen:

$$\frac{A}{C}, \quad \frac{B}{C}, \quad \alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \varrho$$

bestimmen; es bleiben demnach noch zwei willkürlich, und es gibt unendlich viele solcher Kreise, welche nur eine einfache Berührung mit der Curve oder welche eine gemeinschaftliche Tangente haben. Diese beiden willkürlichen Größen werden aber durch die beiden Bedingungen für die Berührung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2y_{,}}{dx_{,}^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2z_{,}}{dx_{,}^2} = \frac{d^2z}{dx^2},$$

bestimmt, und es kann sonach Krümmungskreis nur einer sein.

Um aber die Gleichungen dieses Kreises in symmetrischen Ausdrücken in Bezug auf die drei Veränderlichen x, y, z zu erhalten, betrachte ich diese wieder als Functionen einer vierten Veränderlichen, nämlich des Curvenbogens s. Die Gleichungen der Curve geben dann

$$\frac{dy}{ds} = f_1(x)\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} = f_2(x)\frac{dx}{ds},$$

also auch

$$f_1(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}}, \quad f_2(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{ds}}{\frac{dx}{ds}}.$$

Ferner findet man

$$\frac{d^2y}{ds^2}=f'_1(x)\frac{d^2x}{ds^2}+f''_1(x)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2=\frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}}\frac{d^2x}{ds^2}+f''_1(x)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2,$$

$$\frac{d^2z}{ds^2}=f'_2(x)\frac{d^2x}{ds^2}+f''_2(x)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2=\frac{\frac{dz}{ds}}{\frac{dx}{ds}}\frac{d^2x}{ds^2}+f''_2(x)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2,$$

und zieht daraus

$$f''_1(x)=\frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx}=\frac{\frac{dx}{ds}.\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}.\frac{d^2x}{ds^2}}{\left(\frac{dx}{ds}\right)^3},$$

$$f''_2(x)=\frac{d.\frac{dz}{dx}}{dx}=\frac{\frac{dx}{ds}.\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}.\frac{d^2x}{ds^2}}{\left(\frac{dx}{ds}\right)^3}.$$

Die Bedingungsgleichungen für die Berührungen werden demnach offenbar befriedigt, wenn für die erster Ordnung

$$\frac{dx_{,}}{ds_{,}}=\frac{dx}{ds},\quad \frac{dy_{,}}{ds_{,}}=\frac{dy}{ds},\quad \frac{dz_{,}}{ds_{,}}=\frac{dz}{ds},$$

und für die zweiter Ordnung

$$\frac{d^2x_{,}}{ds_{,}^2}=\frac{d^2x}{ds^2},\quad \frac{d^2y_{,}}{ds_{,}^2}=\frac{d^2y}{ds^2},\quad \frac{d^2z_{,}}{ds_{,}^2}=\frac{d^2z}{ds^2}$$

gesetzt wird. Die beiden Aenderungsgesetze der Gleichung der Krümmungsebene werden dann:

$$A\frac{dx_{,}}{ds_{,}}+B\frac{dy_{,}}{ds_{,}}+C\frac{dz_{,}}{ds_{,}}=0,$$

$$A\frac{d^2x_{,}}{ds_{,}^2}+B\frac{d^2y_{,}}{ds_{,}^2}+C\frac{d^2z_{,}}{ds_{,}^2}=0,$$

und mit Berücksichtigung der vorausgehenden Bedingungsgleichungen zieht man daraus die Werthe von $\frac{B}{A}$ und $\frac{C}{A}$, nämlich:

$$\frac{C}{A}=\frac{\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}}\,,\quad \frac{B}{A}=\frac{\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}}\,.$$

Die Gleichung der Krümmungsebene wird damit:

$$\left(\frac{dy\,d^2z}{ds\,ds^2}-\frac{dz\,d^2y}{ds\,ds^2}\right)(x_{,}-x)+\left(\frac{dz\,d^2x}{ds\,ds^2}-\frac{dx\,d^2z}{ds\,ds^2}\right)(y_{,}-y)+\left(\frac{dx\,d^2y}{ds\,ds^2}-\frac{dy\,d^2x}{ds\,ds^2}\right)(z_{,}-z)=0,$$

und kann auch die Form annehmen:

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\cdot\frac{d\,\frac{dz}{dy}}{ds}(x_{,}-x)+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\cdot\frac{d.\,\frac{dx}{dz}}{ds}(y_{,}-y)+\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\cdot\frac{d.\,\frac{dy}{dx}}{ds}(z_{,}-z)=0\,.$$

Auf gleiche Weise folgen aus der Gleichung der Kugelfläche die Aenderungsgesetze:

$$(x_{,}-\alpha)\frac{dx_{,}}{ds_{,}}+(y_{,}-\beta)\frac{dy_{,}}{ds_{,}}+(z_{,}-\gamma)\frac{dz_{,}}{ds_{,}}=0\,,$$

$$(x_{,}-\alpha)\frac{d^2x_{,}}{ds_{,}^2}+(y_{,}-\beta)\frac{d^2y_{,}}{ds_{,}^2}+(z_{,}-\gamma)\frac{d^2z_{,}}{ds_{,}^2}+\left(\frac{dx_{,}}{ds_{,}}\right)^2+\left(\frac{dy_{,}}{ds_{,}}\right)^2+\left(\frac{dz_{,}}{ds_{,}}\right)^2=0\,,$$

und die erste dieser Gleichungen gibt in Verbindung mit der Gleichung (a) und mit Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen für die einfache Berührung, die Verhältnisse:

$$\frac{z-\gamma}{x-\alpha}=\frac{A\frac{dy}{ds}-B\frac{dx}{ds}}{B\frac{dz}{ds}-C\frac{dy}{ds}}\,,\quad \frac{y-\beta}{x-\alpha}=\frac{C\frac{dx}{ds}-A\frac{dz}{ds}}{B\frac{dz}{ds}-C\frac{dy}{ds}}\,.$$

Führt man sodann in diese Gleichungen die obigen Werthe von $\frac{C}{A}$ und $\frac{B}{A}$ ein, und beachtet, daß man hat

$$c.)\ \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]=1,$$

also auch

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}=0\,,$$

so findet man

$$A\frac{dy}{ds}-B\frac{dx}{ds}=A\left(\frac{dy}{ds}-\frac{B}{A}\frac{dx}{ds}\right)=A\frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}},$$

$$B\frac{dz}{ds}-C\frac{dy}{ds}=A\left(\frac{B}{A}\frac{dz}{ds}-\frac{C}{A}\frac{dy}{ds}\right)=A\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}},$$

$$C\frac{dx}{ds}-A\frac{dz}{ds}=A\left(\frac{C}{A}\frac{dx}{ds}-\frac{dz}{ds}\right)=A\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}},$$

und damit wieder die einfachen Verhältnisse:

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha}=\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{d^2x}{ds^2}},\quad \frac{z-\gamma}{x-\alpha}=\frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{d^2x}{ds^2}}.$$

Mit diesen Verhältnissen geht man in die zweite Abgeleitete der Gleichung der Kugelfläche ein, und zieht daraus mit Beachtung der Gleichung (c) und der Bedingungen für die Berührung zweiter Ordnung die Werthe für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes in der Form:

$$\left.\begin{aligned}
x-\alpha&=\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}\\
y-\beta&=\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}\\
z-\gamma&=\frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}
\end{aligned}\right\},$$

und damit ergibt sich endlich durch die Gleichung (b) der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

und durch Umkehrung der Ausdruck für die Krümmung:

$$\varkappa = \frac{1}{\varrho} = \pm \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

§. 30.

In den meisten Fällen, in denen wir von den vorhergehenden Ausdrücken Gebrauch machen werden, werden wir indessen die Veränderliche s nicht als ganz unabhängige oder willkürliche betrachten, weßhalb diese Ausdrücke noch unter andere Formen gebracht werden sollen. Wenn s nicht die ganz unabhängige Veränderliche ist, aber doch diejenige, auf welche die Veränderungen von x, y, z bezogen werden, so gehen die Aenderungsgesetze

$$\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \frac{d^2z}{ds^2}$$

nach §. 27 in

$$\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds}$$

über, und der Werth von $\varkappa$ oder $\frac{1}{\varrho}$ nimmt die Form an:

$$\varkappa = \frac{1}{\varrho} = \pm \sqrt{\left(\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2},$$

woraus man auch durch Umkehrung die Form:

$$\varrho = \pm \frac{ds}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}}$$

erhält, und diese geht durch Ausführung der für die Ausdrücke $d.\frac{dx}{ds}$ u. s. f. angezeigten Differentiation, indem man die Differentiale dx,

d y, etc. nach der gewöhnlichen Weise, als selbstständige Größen behandelt, und dabei die Gleichung (c) beachtet, in die nachstehende über:

$$\varrho = \pm \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}.$$

Ersetzt man dagegen bei dieser Entwickelung im Zähler der Wurzelgröße überall den Bogen s durch die Veränderlichen x, y, z, indem man

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dy^2}{ds^2} \text{ für } \frac{ds^2}{ds^2}$$

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{ds\,.\,d^2s} \text{ für } \frac{d^2s}{ds^2}$$

einführt, so findet man nach mehrfachen Reductionen und Beseitigung des Nenners der Wurzelgröße, die weitere Form:

$$\varrho = \pm \frac{ds^3}{\sqrt{(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2}}.$$

Um endlich in besondern Fällen den Krümmungshalbmesser für eine gegebene Curve zu berechnen, wird man x als unabhängige Veränderliche nehmen; dies geschieht formell dadurch, daß man Zähler und Nenner des ganzen Ausdruckes mit dx^3 dividirt, und $\frac{d^2x}{dx^2}$ gleich Null setzt; man erhält auf diese Weise

$$\varrho = \pm \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\sqrt{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}}.$$

Gehen wir nun zu den Werthen von $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ zurück, so können wir diese nach den Werthen von ϱ gleichfalls unter verschiedene Formen bringen; für unsern Zweck genügt es die folgende:

$$x - \alpha = \varrho^2 \frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad y - \beta = \varrho^2 \frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad z - \gamma = \varrho^2 \frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds}$$

anzuführen, und daraus die Winkel λ, μ, ν zu bestimmen, welche von dem Krümmungshalbmesser mit den drei Coordinatenachsen gebildet werden. Die Größen $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ sind nämlich offenbar die Projectionen des Krümmungshalbmessers ϱ auf diese Achsen, und man hat demnach

$$\left\{\begin{aligned}
\cos\lambda &= \frac{x-\alpha}{\varrho} = \varrho\,\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} = \frac{\pm d.\frac{dx}{ds}}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}},\\
\cos\mu &= \frac{y-\beta}{\varrho} = \varrho\,\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds} = \frac{\pm d.\frac{dy}{ds}}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}},\\
\cos\nu &= \frac{z-\gamma}{\varrho} = \varrho\,\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds} = \frac{\pm d.\frac{dz}{ds}}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}}.
\end{aligned}\right.$$

Für eine ebene Curve, deren Gleichung

$$y = f(x),$$

deren Ebene also die der xy ist, hat man $\frac{dz}{ds} = 0$, $\frac{d^2z}{ds^2} = 0$, und der letzte Werth von ϱ kommt dadurch auf die Ausdrücke:

$$\varrho = \pm\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \pm\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

zurück, in deren letztem y' das erste, y'' das zweite Aenderungsgesetz von y oder $f(x)$ bezeichnet; und in ähnlicher Weise findet man aus den obigen allgemeinen Werthen die bekannten Ausdrücke für $y-\beta$ und $x-\alpha$ in Bezug auf eine ebene Curve wieder, indem man in denselben x als unabhängige Veränderliche einführt, und den Bogen s als eine Function dieser Veränderlichen behandelt.

Vergleicht man zuletzt noch das erste Aenderungsgesetz der Gleichung der Kugelfläche, durch deren Durchschnitt mit der Krümmungsebene der Krümmungskreis gebildet wird, mit der am Ende des §. 26 abgeleiteten Gleichung der Normalebene in demselben Punkte M der Curve, so sieht man leicht, daß diese Gleichungen identisch werden, wenn man in jenes für die laufenden Coordinaten $x_,$, $y_,$, $z_,$ die Coordinaten x, y, z des Punktes M, in dieser dagegen für die laufenden Veränderlichen

', y', z' die Coordinaten α, β, γ des Krümmungsmittelpunktes einührt. Es folgt daraus, daß dieser letztere in der Normalebene liegt, nd daß der Krümmungshalbmesser der Richtung nach mit dem Durchhnitt der Normalebene und der Krümmungsebene zusammenfällt, welcher Durchschnitt auch Hauptnormale der Curve genannt wird.

§. 31.

Durch die vorhergehenden Entwickelungen ist also sowohl die Ebene, ls der Halbmesser und der Mittelpunkt des Krümmungskreises für rgend einen Punkt in der Bahn eines Bewegten bestimmt, und wenn an gleichsam als erste Annäherung die Bewegung eines materiellen Punktes in jedem Augenblicke nach einer veränderlichen Geraden, der Tangente an der Bahncurve, gerichtet annehmen kann, so wird man ls zweite Annäherung diese Bewegung jeden Augenblick in einem eränderlichen Kreise, dem Krümmungskreise, dessen Ebene, Mittelpunkt nd Halbmesser sich jeden Augenblick stetig ändern, stattfindend ansehen ürfen, und dadurch zu dem Schlusse geführt werden, daß die Gesetze, welche sich für irgend einen Augenblick der Bewegung in diesem Kreise ergeben, auch für die Bewegung in der Curve selbst gültig sein werden. So finden wir z. B. sogleich, daß die Aenderung in der Richtung der Bewegung in irgend einem Augenblicke oder in irgend einem Punkte der Bahncurve dieselbe ist, wie in dem Krümmungskreise.

Um diese Aenderung der Richtung unmittelbar abzuleiten, seien l, m, n die drei Winkel, welche die Tangente in dem Punkte M der Curve, dessen Coordinaten x, y, z sind, l', m', n' diejenigen, welche die Richtung der Bewegung in dem Punkte M', dessen Coordinaten $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ sind, mit den Coordinatenachsen bildet, und $\Delta\tau$ der Winkel, den diese beiden Richtungen unter sich einschließen, indem man mit τ einen Winkel bezeichnet, welchen die Tangente oder die Richtung der Bewegung in irgend einem Augenblicke oder in dem Punkte M der Curve mit einer beliebigen festen Geraden einschließt. — Werden nun die Coordinaten wieder als Functionen des Bogens s genommen, und die Functionen

$$\cos l = \frac{dx}{ds}, \quad \cos m = \frac{dy}{ds}, \quad \cos n = \frac{dz}{ds},$$

der Reihe nach zur Abkürzung mit x', y', z' bezeichnet, und dem entsprechend, $\cos l'$, $\cos m'$, $\cos n'$ durch $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$, $z'+\Delta z'$ ausgedrückt, so hat man zuerst nach §. 19

$$\cos\Delta\tau = \cos l \cos l' + \cos m \cos m' + \cos n \cos n',$$

und dadurch

$$\sin^2 \Delta\tau = 1 - (\cos l \cos l' + \cos m \cos m' + \cos n \cos n')^2$$
$$= 1 - (x'(x' + \Delta x') + y'(y' + \Delta y') + z'(z' + \Delta z'))^2 .$$

Es ist aber bekanntlich

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 ,$$
$$(x' + \Delta x')^2 + (y' + \Delta y')^2 + (z' + \Delta z')^2 = 1 ,$$

also auch

$$2(x'\Delta x' + y'\Delta y' + z'\Delta z') = -(\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2),$$

und damit wird

$$\sin^2 \Delta\tau = (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2)\left(1 - \frac{1}{4}(\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2)\right).$$

Zieht man nun daraus das Verhältniß des Winkels $\Delta\tau$ zu der Aenderung Δs des Bogens, um dadurch das Aenderungsgesetz des Winkels τ in Bezug auf den Bogen s zu erhalten, so ergibt sich

$$\frac{\sin \Delta\tau}{\Delta\tau} \cdot \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \sqrt{\left[\left(\frac{\Delta x'}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y'}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z'}{\Delta s}\right)^2\right]\left(1 - \frac{1}{4}(\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2)\right)},$$

und wenn man zu den Entstehungswerthen zurückgeht, wobei $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ einzeln Null werden, während das Verhältniß $\frac{\sin \Delta\tau}{\Delta\tau}$ den Werth 1 erhält, so folgt

$$\frac{d\tau}{ds} = \pm\sqrt{\left(\frac{dx'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{ds}\right)^2}.$$

Die Einführung der Werthe für x', y', z' zeigt sogleich, daß die rechte Seite dieses Ausdrucks mit dem ersten Werthe von $\varkappa$ oder $\frac{1}{\varrho}$ des vorhergehenden §. gleichlautend ist; man hat also einfach

$$\frac{d\tau}{ds} = \varkappa = \frac{1}{\varrho},$$

und es wird demnach die Richtungsänderung und die Krümmung in irgend einem Punkte der Curve auf dieselbe Weise ausgedrückt, wie dies auch in der Natur der Sache liegt.

Das vorhergehende Ergebniß hätte denn auch übereinstimmend mit der obengemachten Bemerkung ganz einfach durch die Betrachtung der Richtungsänderung im Krümmungskreise gefunden werden können. Denn

bei dieser Curve wird der Winkel $\Delta\tau$, welchen die zwei Tangenten an den Endpunkten des Bogens Δs mit einander bilden, durch das Verhältniß dieses Bogens Δs zu dem Halbmesser ϱ gemessen, so daß man hat

$$\Delta\tau = \frac{\Delta s}{\varrho}, \quad \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{1}{\varrho}.$$

Der Anfangswerth des letztern dieser Verhältnisse drückt also die Richtungsänderung in jedem Punkte des Kreises, und zufolge der Uebereinstimmung, welche zwischen der Curve und dem Krümmungskreise in dem Gesetze der Coordinatenänderung stattfindet, auch die Richtungsänderung in dem Berührungspunkte dieser beiden Curven, also in dem Punkte M der gegebenen Curve aus.

§. 32.

Es wäre nun leicht, die vorhergehenden Betrachtungen noch weiter auszudehnen, nämlich den Ausdruck für die Aenderung des zweiten Gesetzes der Coordinatenänderung, also das dritte Aenderungsgesetz abzuleiten, den Einfluß desselben und den seines Zeichens auf die Gestalt der Curve zu untersuchen und die Bedingungen für eine Berührung dritter Ordnung festzustellen. Das Gesagte genügt jedoch für unsern Zweck; ich gehe deßhalb zur Bewegung eines Punktes auf einer Fläche über, um auch hier die geometrischen Verhältnisse zusammen zu fassen.

Wenn von einem Punkte nur bekannt ist, daß er sich auf einer gegebenen Fläche bewegt, so bleibt die Richtung seiner Bewegung theilweise unbestimmt; man weiß nur, daß sie durch eine der unendlich vielen Geraden, welche die Fläche in dem Punkte M, dem augenblicklichen Orte des Bewegten, dessen Coordinaten x, y, z sind, berühren, vorgestellt wird; sie hängt demnach wieder von dem Gesetze der Coordinatenänderung in diesem Punkte der Fläche ab, welches wir nun untersuchen wollen.

Die Gleichung einer Fläche: $F(x, y, z) = 0$ oder $z = f(x, y)$ enthält im Allgemeinen die drei Veränderlichen x, y, z; es können folglich immer zwei derselben willkürlich bestimmt und darnach die dritte berechnet werden; d. h. es sind nun zwei dieser Veränderlichen, als welche wir gemäß der zweiten Form der Gleichung unserer Fläche, die x und y annehmen wollen, unabhängige oder willkürliche und die dritte ist eine Function von diesen beiden. Geht man daher von dem Punkte M zu einem folgenden über, so kann dieser

1) so liegen, daß y unverändert bleibt und nur x um eine kleine Aenderung Δx größer wird; die Bewegung ist dann parallel zur Ebene der xz; oder

2) so, daß der auf der Fläche beschriebene Bogen zur Ebene der yz parallel ist, wobei also x unverändert bleibt, und y um eine gewisse kleine Größe Δy wächst; oder es können sich

3) beide Abstände, der von der Ebene der yz und der von der Ebene der xz, sich gleichzeitig ändern, also x um Δx und y um Δy wachsen, in welchem Falle die Richtung der Bewegung unter einem andern Winkel als 0 oder $\frac{1}{2}\pi$ gegen die genannten Ebenen geneigt ist.

Man sieht daraus, daß das Gesetz der Coordinatenänderung auf einer Fläche von der Richtung abhängt, in welcher man von dem betreffenden Punkte aus auf derselben fortgehen will, oder von dem Verhältnisse, in welchem die Vergrößerungen Δx und Δy der beiden unabhängigen Veränderlichen zu einanderstehen sollen.

In dem ersten der obigen Fälle erhält die dritte Veränderliche z einen Zuwachs, welchen ich mit $\Delta_x z$ bezeichnen will, weil er blos von der Aenderung der x abhängt; dieselbe Veränderliche wird also im zweiten Falle um $\Delta_y z$ wachsen; ihre Vergrößerung im letzten Falle soll dagegen als allgemeine einfach durch Δz bezeichnet werden. Man hat demnach zuerst das Verhältniß:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

worin y ganz wie eine Unveränderliche zu behandeln ist, und der Anfangswerth desselben gibt für den Punkt M das Gesetz der Coordinaten-Aenderung in einem Schnitte, welcher zur Ebene der xz parallel ist. Dieser Werth wird durch den Ausdruck:

$$\text{Anf:} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{dz}{dx} = f'_x(x, y)$$

vorgestellt, worin die erste abgeleitete Function von $f(x, y)$ in Bezug auf x als alleinige Veränderliche mit $f'_x(x, y)$ bezeichnet ist; die Form $\frac{dz}{dx}$ kann der frühern Erklärung nach keinem Zweifel über ihre Bedeutung unterworfen sein.

Auf gleiche Weise erhalten wir für die Coordinatenänderung in einem zur Ebene der yz parallelen Schnitte die Ausdrücke:

$$\text{Anf}: \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \text{Anf}: \frac{f(x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = \frac{dz}{dy} = f'_y(x,y) ,$$

worin x als unveränderliche Größe und y als einzige Veränderliche zu betrachten ist.

Wachsen endlich beide Veränderliche gleichzeitig, die eine um Δx, die andere um Δy, so erhält die Ordinate z einen Zuwachs Δz, welcher einfach durch

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

vorgestellt werden kann. Dieselbe Vergrößerung von z kann aber auch dadurch gefunden werden, daß man die Veränderlichen x und y nach einander wachsen läßt, daß man also von dem Punkte M Fig. 17 zuerst parallel zu der Ebene der xz zu einem Punkte N fortgeht, dessen Coordinaten $x+\Delta x$, y und $z+\Delta_x z$ oder z' sind, und dann von diesem parallel zur Ebene der yz zu dem Punkte M′, dessen Coordinaten $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ und $z'+\Delta_y z'$ oder $z+\Delta_y(z+\Delta_x z)$ werden; denn es ist einleuchtend, daß man auf diese Weise zu demselben Punkte M′ kommt, wie durch die gleichzeitige entsprechende Vergrößerung von x und y. Man erkennt aber daraus, daß der Zuwachs Δz von z aus drei Gliedern besteht, aus

$$\Delta_x z\ ,\quad \Delta_y z \text{ und } \Delta_y(\Delta_x z) \text{ oder } \Delta_x \Delta_y z\ ;$$

die beiden ersten haben wir schon kennen gelernt, es sind die Aenderungen, welche z durch die alleinige Vergrößerung von x oder y erleidet; das dritte dagegen ist die Aenderung, welche in dem ersten Gliede durch die neuhinzutretende Vergrößerung von y entsteht, oder was offenbar dasselbe sein muß, die Aenderung, welche in dem Zuwachs $\Delta_y z$ durch die Vergrößerung von x eintritt, da man ebensowohl zuerst parallel zur Ebene der yz und dann parallel zu der der xz fortgehen kann, um zu dem Punkte M′ zu kommen. Führen wir das Vorhergehende nun weiter aus, so finden wir nach dem Obigen zuerst

$$z' = z+\Delta_x z = f(x,y) + \frac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x}\Delta x ,$$

und damit wird

$$z+\Delta z = z'+\Delta_y z' = f(x,y) + \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\Delta x$$
$$+\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\Delta y +$$

$$\frac{\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)}{\Delta x}\Delta x-\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\Delta x}{\Delta y}\Delta y,$$

woraus in anderer Form auch

$$\Delta z=\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\Delta x+\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\Delta y+$$

$$\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y)}{\Delta x\Delta y}\Delta x\Delta y$$

oder wenn man vollständig reduzirt, wie oben wieder

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

folgt, und man sieht, daß diese Ausdrücke, wie es in der Natur der Sache liegt, ganz symmetrisch in Bezug auf x und y sind.

Man kann nun aus denselben offenbar nur ein Verhältniß zwischen Δz und Δx, oder Δz und Δy ziehen, und es wird dadurch jedesmal das Verhältniß von Δy zu Δx eingeführt werden, welches wie oben bemerkt wurde, die Richtung bezeichnet, in welcher auf der Fläche fortgegangen oder in welcher die Coordinatenänderung genommen werden soll. Es ergibt sich nämlich als Verhältniß des vollständigen Wachsthums Δz von z zu der Aenderung Δx von x der Ausdruck:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}+\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$+\frac{\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)}{\Delta x}-\frac{f(x+\Delta x,y)-(x,y)}{\Delta x}}{\Delta y}\Delta y$$

und für das Verhältniß desselben Wachthumes Δz zu der Aenderung Δy von y der Werth:

$$\frac{\Delta z}{\Delta y}=\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}+\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$+\frac{\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)}{\Delta y}-\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}}{\Delta x}\Delta x.$$

Geht man endlich zu den Anfangswerthen zurück und bezeichnet die Aenderung von z in einer beliebigen Richtung in Bezug auf x durch $\frac{d.z}{dx}$,

in Bezug auf y durch $\frac{d.z}{dy}$ zum Unterschiede von derjenigen, welche in den zu den Ebenen der xz und yz parallelen Richtungen stattfindet, und die immer durch das einfachere $\frac{dz}{dx}$ oder $\frac{dz}{dy}$ vorgestellt werden soll, und beachtet man dabei, daß wie

$$\text{Anf:}\ \frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}=f'_x(x, y)$$

ist, so auch

$$\text{Anf:}\ \frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y+\Delta y)}{\Delta x}=f'_x(x,\ y+\Delta y)$$

und in folgerechter Weise

$$\text{Anf:}\ \frac{f'_x(x,\ y+\Delta y)-f'_x(x, y)}{\Delta y}=f''_{xy}(x, y)$$

sein wird, daß man folglich

$$\text{Anf:}\ \frac{f'_x(x, y+\Delta y)-f'_x(x, y)}{\Delta y}\Delta y=f''_{xy}(x, y).0=0$$

erhalten muß, so findet man die Aenderungsgesetze:

$$\frac{d.z}{dx}=f'_x(x, y)+f'_y(x, y)\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d.z}{dy}=f'_x(x, y)\frac{dx}{dy}+f'_y(x, y)=\frac{dz}{dy}.\frac{dx}{dy}+\frac{dz}{dy},$$

wobei man sich wohl hüten muß, die Producte $\frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}.\frac{dx}{dy}$ in $\frac{dz}{dx}$ oder $\frac{dz}{dy}$ umändern zu wollen, wie dies bei der Coordinaten-Aenderung auf einer bestimmten Curve geschehen darf; die vorhergehenden Erläuterungen werden über diesen Unterschied bei einiger Aufmerksamkeit keinen Zweifel lassen.

Die Aenderung der Coordinaten in einem beliebigen Punkte einer Fläche und für eine beliebige Richtung kann also, wie man aus den vorhergehenden Ausdrücken ersieht, immer durch die Aenderungen für zwei unter sich senkrechte Richtungen ausgedrückt werden, wenn die Lage jener beliebigen Richtung gegen eine der letztern in Function von x oder y, oder wenn

die Gleichung der Projection jener Richtung in der Ebene der xz, woraus die Function $\frac{dy}{dx}$ gefunden werden kann, gegeben ist.

Durch Einführung einer neuen Veränderlichen kann den obigen Aenderungsgesetzen wieder eine symmetrische Form in Bezug auf x und y gegeben werden. Macht man z. B. in Fig. 17

$$mm' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta s_, ,$$

und dividirt damit den Werth von Δz, oder nimmt das Verhältniß zwischen dem Wachsthum von z und der Diagonale $\Delta s_,$ des von den willkürlichen Vergrößerungen Δx und Δy gebildeten Rechtecks, so findet man als Anfangswerth desselben den Ausdruck:

$$\frac{dz}{ds_,} = f'_x(x, y)\frac{dx}{ds_,} + f'_y(x, y)\frac{dy}{ds_,} ,$$

worin nun die Veränderung von z nicht unmittelbar von einer der beiden Veränderlichen x und y abhängig erscheint, sondern von der Veränderung, welche die Lage seiner Projection in der Ebene der xy erleidet, und von der Richtung dieser Veränderung gegen die Achsen der x oder y. Bezeichnet man daher den Winkel, welchen diese Richtung mit der Achse der x bildet, mit ω, so hat man

$$\frac{dx}{ds_,} = \cos\omega \ , \quad \frac{dy}{ds_,} = \sin\omega \ , \quad \frac{dy}{dx} = \tang\omega$$

und das obige Aenderungsgesetz nimmt die Form an:

$$\frac{dz}{ds_,} = f'_x(x, y)\cos\omega + f'_y(x, y)\sin\omega \ .$$

Nimmt man dagegen den Bogen s der auf der Fläche einzuschlagenden Richtung oder Curve als unabhängige Veränderliche, so ergibt sich das Aenderungsgesetz:

$$\frac{dz}{ds} = f'_x(x,y)\frac{dx}{ds} + f'_y(x,y)\frac{dy}{ds} ,$$

woraus man auch die Beziehung:

$$\cos\gamma = f'_x(x, y)\cos\alpha + f'_y(x, y)\cos\beta$$

erhält, wenn man beachtet, daß die Quotienten

$$\frac{dx}{ds} , \quad \frac{dy}{ds} , \quad \frac{dz}{ds} .$$

nach §. 26 auch die Cosinus der Winkel α, β, γ ausdrücken, welche die Tangente jener Richtung mit den drei Coordinatenachsen bildet. Es ist dann auch

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{ds_{,}} \cdot \frac{ds_{,}}{ds} = \frac{dz}{ds_{,}} \sin \gamma , \quad \frac{dz}{ds_{,}} = \cot \gamma ,$$

womit man aus dem vorletzten Aenderungsgesetze die Beziehung:

$$\cot \gamma = f'_x (x, y) \cos \omega + f'_y (x, y) \sin \omega$$

erhält.

Im Allgemeinen ist es indessen einfacher, das Gesetz der Coordinatenänderung aus der Gleichung der Fläche unter der Form:

$$F(x, y, z) = 0$$

abzuleiten, und es ist leicht zu sehen, daß man für die Aenderung parallel zur Ebene der xz, oder für die Aenderung von z in Bezug auf x als alleinige Veränderliche, in ähnlicher Weise wie oben

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dz}} ,$$

oder in anderer Form

$$\frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{dF}{dx} = 0$$

finden wird, worin $F'_x(x, y, z)$ und $\frac{dF}{dx}$ das Aenderungsgesetz der Function $F(x, y, z)$ in Bezug auf x als einzige Veränderliche ausdrücken, also unter der Voraussetzung, daß sowohl y als z unveränderlich sind, und $F'_z(x, y, z)$ oder $\frac{dF}{dz}$ ebenso das Aenderungsgesetz in Bezug auf z als einzige Veränderliche oder unter der Voraussetzung, daß x und y unverändert bleiben, bezeichnen. In gleicher Weise wird der Ausdruck für die Coordinatenänderung parallel zur Ebene der yz

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}}$$

oder in anderer Form

$$\frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{dF}{dy} = 0 \ .$$

Endlich ergibt sich für die Aenderung der Coordinaten in einer beliebigen Richtung, welche durch die Function $\frac{dy}{dx}$ angedeutet wird, und in Bezug auf die Aenderung von x der Ausdruck:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dz}} - \frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}} \cdot \frac{dy}{xp}$$

oder in anderer Form

$$\frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dx} = 0 \ .$$

In Bezug auf die Veränderliche s dagegen hat man den symmetrischen Ausdruck:

$$\frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{ds} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = 0,$$

aus welchem mit den obigen Werthen von $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, die einfache Beziehung:

$$\frac{dF}{dx} \cos \alpha + \frac{dF}{dy} \cos \beta + \frac{dF}{dz} \cos \gamma = 0$$

zwischen den Winkeln α, β, γ folgt, welche eine bestimmte Tangente im Punkte M der Fläche mit den drei Coordinatenachsen einschließt.

§. 33.

Das im Vorhergehenden dargestellte Gesetz der Coordinatenänderung macht diese im Allgemeinen von derjenigen abhängig, welche in zwei unter sich rechtwinkligen Richtungen stattfindet; es wird mithin auch die Gestalt der Fläche in der Umgebung des Punktes M dem Hauptumrisse nach aus der Gestalt zweier durch diesen Punkt gelegten unter sich rechtwinkligen Schnitte, deren Ebenen einzeln zu denen der xz und yz parallel sind, erkannt werden.

Sind die Aenderungsgesetze $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ in diesen beiden Schnitten beide positiv, so ist die Ordinate z im Punkte M mit x und y im

Wachsen begriffen, und die Fläche entfernt sich in jeder Richtung von der Ebene der xy. Das Umgekehrte wird der Fall sein, wenn jene beiden Functionen gleichzeitig negativ sind, indem sie dadurch anzeigen, daß für wachsende x und y die z im Abnehmen ist. Ist dagegen eines der beiden obengenannten Aenderungsgesetze positiv, das andere negativ, so hängt es von dem Werthe des Verhältnisses $\frac{dy}{dx}$ oder von dem Winkel ω ab, den die einzuschlagende Richtung mit der Ebene der xz bildet, ob z wächst oder abnimmt. Sei z. B. M Fig. 18 der betreffende Punkt auf einer gegebenen Fläche, m seine Projection in der Ebene der xy, ab und cd die Risse der Schnittebenen, BC und DE die dadurch bewirkten Durchschnittscurven auf der Fläche. In dem Quadranten cme wird die Function $\frac{dy}{dx}$ immer positiv sein; man erhält also für den Fall, daß sowohl $f'_x(x,y)$ als $f'_y(x,y)$ positiv ist, auch für

$$\frac{d.z}{dy} = f'_x(x,y) + f'_y(x,y)\frac{dy}{dx}$$

einen positiven Werth, welches auch der von $\frac{dy}{dx}$ sein mag; es wächst folglich z für jede Richtung, die in dem Winkel cme liegt. Ebenso wird bei gleichzeitigen negativen Werthen jener abgeleiteten Functionen auch $\frac{d.z}{dx}$ für jeden Werth von $\frac{dy}{dx}$ einen negativen Werth erhalten, also z in jeder Richtung zwischen me und mc abnehmen. In dem Falle dagegen, wo, wie in unserer Figur, $f'_x(x,y)$ positiv, $f'_y(x,y)$ aber negativ ist, wo demnach die Ordinate z in der Richtung mc im Wachsen, in der Richtung me im Abnehmen begriffen ist, hat man

$$\frac{d.z}{dx} = f'_x(x,y) - f'_y(x,y)\frac{dy}{dx},$$

und es wird nun von dem Werthe von $\frac{dy}{dx}$ abhängen, ob $\frac{d.z}{dx}$ positiv oder negativ ist. Setzt man daher

$$f'_x(x,y) - f'_y(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

und zieht daraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)},$$

so erhält man die Richtung m n, in welcher die Ordinate z keine Veränderung zeigt, und welche die Grenze bildet zwischen den Richtungen, in denen z wächst, und denen, in welchen es abnimmt. — Aehnliche Betrachtungen lassen sich auch über die Verhältnisse der Coordinaten-Aenderung in den drei andern Quadranten anstellen, nur muß man auf die Zeichen die gehörige Rücksicht nehmen.

Findet ferner zwischen zwei Punkten einer Fläche ein Zeichenwechsel für die beiden Functionen $f'_x(x, y)$ und $f'_y(x, y)$ statt, so haben beide in einem dazwischenliegenden Punkte, dessen Coordinaten durch die drei Gleichungen:

$$z = f(x, y) , \quad f'_x(x, y) = 0 , \quad f'_y(x, y) = 0$$

bestimmt werden, den Werth: Null, und die Ordinate z einen größten Werth gehabt. Umgekehrt wird aber nicht in allen Punkten, für welche die beiden letzten der vorhergehenden Gleichungen befriedigt werden, gleichzeitig für diese beiden Functionen Zeichenwechsel eintreten; es wird dann auch der entsprechende Werth von z kein größter mehr sein.

§. 34.

Alle diese Verhältnisse, etwa mit Ausnahme des Zeichenwechsels der abgeleiteten Functionen, werden gleichsam auf einen Blick übersichtlich, durch die berührende Ebene oder Tangential-Ebene im Punkte M dargestellt, d. h. durch die Lage einer Ebene, welche den Punkt M mit der Fläche gemeinschaftlich hat, und dasselbe Gesetz in der Aenderung der Coordinaten befolgt, wie diese in demselben Punkte, welche also in einer einfachen Berührung mit der Fläche steht.

Aus dem wiederholt ausgesprochenen Satze, daß die Aenderung der Coordinaten in einer beliebigen Richtung von den Aenderungsgesetzen für zwei unter sich rechtwinklige Richtungen abhängt, folgt nothwendig, daß zwei Flächen, die einen Punkt gemeinschaftlich haben, in diesem für jede Richtung dieselbe Aenderung der Coordinaten zeigen werden, wenn die Aenderungsgesetze für zwei unter sich rechtwinklige Richtungen bei beiden gleich sind. Sind demnach

$$z = F(x, y) , \quad z_{,} = f(x_{,}, y_{,})$$

die Gleichungen der beiden Flächen, a und b die Coordinaten der Projection ihres gemeinschaftlichen Punktes M in der Ebene der xy, so sind die Bedingungen für eine einfache Berührung:

$$F'_x(a, b) = f'_{x,}(a, b) , \quad F'_y(a, b) = f'_{y,}(a, b) ,$$

wo $f'_{x,}(a,b)$ den Werth der Function:

$$\frac{dz_{,}}{dx_{,}} = f'_{x,}(x_{,}, y_{,}) ,$$

wenn man darin a und b für $x_{,}$ und $y_{,}$ substituirt, vorstellt, und die übrigen Glieder ähnliche Bedeutungen haben. Wählt man dagegen die Formen:

$$F(x, y, z) = 0 , \quad f(x_{,}, y_{,}, z_{,}) = 0$$

für die Gleichungen der beiden Flächen, so werden die Bedingungen für die einfache Berührung die Formen:

$$\frac{F'_x(a, b, c)}{F'_z(a, b, c)} = \frac{f'_{x,}(a, b, c)}{f'_{z,}(a, b, c)} , \quad \frac{F'_y(a, b, c)}{F'_z(a, b, c)} = \frac{f'_{y,}(a, b, c)}{f'_{z,}(a, b, c)}$$

annehmen, und man wird diesen Gleichungen offenbar Genüge leisten, wenn man

$$F'_x(a, b, c) = V_{,} f'_{x,}(a, b, c) , \quad F'_y(a, b, c) = V_{,} f'_{y,}(a, b, c) ,$$
$$F'_z(a, b, c) = V_{,} f'_{z,}(a, b, c) ,$$

setzt, wo $V_{,}$ ein unbestimmter Factor ist, durch welchen die Homogenität und damit die Möglichkeit dieser Gleichungen hergestellt wird, und der in jedem gegebenen Falle leicht bestimmt werden kann.

Nehmen wir demnach für die Gleichung der Ebene die Form:

$$(x_{,} - x) \cos \lambda + (y_{,} - y) \cos \mu + (z_{,} - z) \cos \nu = 0$$

worin x, y, z die Coordinaten des gemeinschaftlichen Punktes, und λ, μ, ν die Winkel bezeichnen, welche die Normale zur Ebene mit den drei Coordinatenachsen bildet, so hat man

$$f'_{x,}(x_{,}, y_{,}, z_{,}) = \cos \lambda , \quad f'_{y,}(x_{,}, y_{,}, z_{,}) = \cos \mu , \quad f'_{z,}(x_{,}, y_{,}, z_{,}) = \cos \nu ,$$

und demnach als Bedingungen der Berührung:

$$V_{,} \cos \lambda = F'_x(x, y, z) , \quad V_{,} \cos \mu = F'_x(x, y, z) , \quad V_{,} \cos \nu = F'_z(x, y, z)$$

oder in anderer Form:

$$V_{,} \cos \lambda = \frac{dF}{dx} , \quad V_{,} \cos \mu = \frac{dF}{dy} , \quad V_{,} \cos \nu = \frac{dF}{dz} .$$

Die Gleichung der Tangential-Ebene wird demnach

$$\frac{dF}{dx}(x_{,} - x) + \frac{dF}{dy}(y_{,} - y) + \frac{dF}{dz}(z_{,} - z) = 0$$

und als Folge derselben findet man für die Gleichungen der dieser Ebene und der gegebenen Fläche in dem Punkte M gemeinschaftlichen Normalen die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dF}{dx}(z_,-z)&=\frac{dF}{dz}(x_,-x)\\ \frac{dF}{dx}(y_,-y)&=\frac{dF}{dy}(x_,-x)\end{aligned}\right\}.$$

Mittels der Gleichung:

$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1$$

ergibt sich ferner

$$V_,=\pm\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}$$

und damit folgen die Werthe von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, nämlich

$$\cos\lambda=\frac{\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}=V\frac{dF}{dx}$$

und in gleicher Weise

$$\cos\mu=V\frac{dF}{dy},\qquad\cos\nu=V\frac{dF}{dz},$$

wo $\frac{1}{V_,}$ durch V ersetzt ist.

Um diese Ausdrücke auf die Form $z=f(x,y)$ der Gleichung der gegebenen Fläche zu beziehen, darf man nur beachten, daß man hat

$$\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dz}}=-\frac{dz}{dx},\qquad\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}}=-\frac{dz}{dy},$$

um aus den vorhergehenden Formen die neuen abzuleiten; man findet dadurch als Gleichung der berührenden Ebene

$$z_,-z=\frac{dz}{dx}(x_,-x)+\frac{dz}{dy}(y_,-y),$$

und als Gleichungen der Normalen

$$\left.\begin{array}{l} x' - x + \frac{dz}{dx}(z' - z) = 0 \\ y' - y + \frac{dz}{dy}(z' - z) = 0 \end{array}\right\} .$$

Ferner erhält man

$$\cos \nu = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} = V'$$

und damit

$$\cos \lambda = - V' \frac{dz}{dx}, \quad \cos \mu = - V' \frac{dz}{dy}.$$

§. 35.

Für die Ebene ist, wie für die Gerade, das Gesetz der Coordinatenänderung in allen Punkten dasselbe, also constant; für die gekrümmten Flächen dagegen ist es selbst wieder veränderlich und zwar wenigstens nach einer von zwei unter sich senkrechten Richtungen. Denn es gibt viele Flächen, welche von jeder Tangential-Ebene längs einer Geraden berührt werden, auf denen also immer eine Gerade so angelegt werden kann, daß sie der ganzen Länge nach mit der Fläche zusammenfällt; es sind dies diejenigen Flächen, welche durch die Bewegung einer Geraden erzeugt werden können, wie die Cylinder-, Kegel- und windischen Flächen. Bei diesen ist natürlich das Gesetz der Coordinatenänderung in der Richtung jener Geraden constant, in jeder andern aber wie bei allen übrigen Flächen veränderlich.

Um nun das Gesetz dieser neuen Veränderung oder das zweite Gesetz der Coordinatenänderung für eine Fläche zu erhalten, gehen wir von dem Punkte M oder $x\,y\,z$ zuerst wieder zu einem zweiten, der in gleichem Abstande y von der Ebene der $x\,z$ bleibt, von der Ebene der $y\,z$ dagegen um Δx weiter entfernt ist, als M, und es ist nach dem Frühern leicht zu sehen, daß das zweite Aenderungsgesetz in dieser zur Ebene der $x\,z$ parallelen Richtung durch

$$\text{Anf:}\ \frac{f'_x(x + \Delta x, y) - f'_x(x, y)}{\Delta x} = \frac{d^2 z}{dx^2} = f''_x(x, y)$$

ausgedrückt werden muß. Auf gleiche Weise ergibt sich für das zweite Aenderungsgesetz in einer zur Ebene der yz parallelen Richtung

$$\text{Anf:}\ \frac{f'_y(x,y+\Delta y)-f'_y(x,y)}{\Delta y} = \frac{d^2z}{dy^2} = f''_y(x,y).$$

Lassen wir aber x und y zugleich wachsen, gehen wir also von M aus in einer beliebigen Richtung fort, wodurch jedoch immer eine bestimmte Beziehung zwischen Δy und Δx festgesetzt wird, so wird sich das erste Aenderungsgesetz $\frac{dz}{dx}$ für die zur Ebene der xz parallele Richtung nicht blos vermöge der Aenderung von x, sondern auch in Folge der Aenderung von y ändern, indem wir nicht mehr in demselben parallelen Schnitte bleiben, sondern zu einem folgenden übergehen, welcher um Δy weiter von der Ebene der xz entfernt, und in welchem das Aenderungsgesetz $\frac{dz}{dx}$ für einen Punkt in demselben Abstande x von der Ebene der yz ein anderes geworden ist, nämlich:

$$\frac{f'_x(x,y+\Delta y)-f'_x(x,y)}{\Delta y} = \frac{\Delta\frac{dz}{dx}}{\Delta y}.$$

Ebenso wird das Aenderungsgesetz $\frac{dz}{dy}$ sich nicht blos längs des zur Ebene der yz parallelen Schnittes ändern, sondern auch von einem dieser parallelen Schnitte zum andern. Man wird daher jede dieser zweifachen Veränderungen der ersten Aenderungsgesetze in den Parallel-Schnitten aus diesen gerade so ableiten, wie das ganze erste Aenderungsgesetz aus der ursprünglichen Function. Setzt man also zuerst y' für $\frac{dy}{dx}$, und beachtet, daß y' unveränderlich ist, so findet man

$$\frac{\Delta.\frac{d.z}{dx}}{\Delta x} = \frac{f'_x(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f'_x(x,y)}{\Delta x} + y'\frac{f'_y(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f'_y(x,y)}{\Delta x},$$

oder zergliedert, wie es bei der Ableitung des ersten Gesetzes geschehen ist,

$$\frac{\Delta \cdot \frac{d.z}{dx}}{\Delta x} = \frac{f'_x(x+\Delta y, y) - f'_x(x, y)}{\Delta x} + \frac{f'_x(x, y+\Delta y) - f'_x(x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$+ \frac{f'_x(x+\Delta x, y+\Delta y) - f'_x(x+\Delta x, y) - f'_x(x, y+\Delta y) + f'_x(x, y)}{\Delta x \Delta y} \Delta y$$

$$+ y' \frac{f'_y(x+\Delta x, y) - f'_y(x, y)}{\Delta x} + y' \frac{f'_y(x, y+\Delta y) - f'_y(x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$+ y' \frac{f'_y(x+\Delta x, y+\Delta y) - f'_y(x+\Delta x, y) - f'_y(x, y+\Delta y) + f'_y(x, y)}{\Delta x \Delta y} \Delta y.$$

Daraus folgt sofort, indem man zu dem Anfang zurückgeht, mit der frühern Bezeichnung

$$\frac{d^2.z}{dx^2} + f''_x(x, y) + \frac{dy}{dx} f''_{xy}(x, y) + y' f''_{yx}(x, y) + y' \frac{dy}{dx} f''_y(x, y),$$

und da nach den in §. 32 dargestellten Formen einleuchtet, daß

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$

sein muß, so findet man als zweites Aenderungsgesetz der Coordinaten in einer beliebigen Richtung den Ausdruck:

$$\frac{d^2.z}{dx^2} = f''_x(x, y) + 2 \frac{dy}{dx} f''_{xy}(x, y) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 f''_y(x, y)$$

oder in anderer Form:

$$\frac{d^2.z}{dx^2} = \frac{d^2 z}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2 z}{dx\, dy} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot \frac{d^2 z}{dx^2}.$$

Mit der Veränderlichen s erhält man dagegen, wie leicht zu sehen, die Form:

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = f''_x(x, y) \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2 f''_{xy}(x, y) \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dy}{ds} + f''_x(x, y) \left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$

oder mit Einführung der Winkel α und β

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{d^2 z}{dx^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{d^2 z}{dx\, dy} \cos \alpha \cos \beta + \frac{d^2 z}{dy^2} \cos^2 \beta.$$

In diesen letzten Ausdrücken ist indessen s nur der Form nach die unabhängige Veränderliche, in der That sind es immer noch x und y; soll s wirklich die unabhängige Veränderliche werden, so hat man in dem ersten Aenderungsgesetze

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{ds}$$

nicht nur auf die Aenderungen der Functionen:

$$\frac{dz}{dx} = f'_x(x, y) , \qquad \frac{dz}{dy} = f'_y(x, y)$$

sondern auch auf die Aenderungen der Functionen $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ Rücksicht zu nehmen; man erhält dann

$$\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds} = \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2\,\frac{d^2z}{dx\,dy} \cdot \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$
$$+ \frac{dz}{dx} \cdot \frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds}$$

oder mit den Winkeln α und β

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{d^2z}{dx^2}\cos^2\alpha + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}\cos\alpha\cos\beta + \frac{d^2z}{dy^2}\cos^2\beta + \frac{dz}{dx}\,\frac{d.\cos\alpha}{ds} + \frac{dz}{dy}\,\frac{d.\cos\beta}{ds}$$

als vollständiges zweites Aenderungsgesetz.

Will man dagegen dieses Aenderungsgesetz unmittelbar aus der Gleichung: $F(x, y, z) = 0$ der gegebenen Fläche ableiten, so findet man zuerst nach den früher erhaltenen Ausdrücken für die zur Ebene der xz parallele Veränderung die Gleichung:

$$F'_z(x,y,z)\frac{d^2z}{dx^2} + F''_z(x,y,z)\frac{dz^2}{dx^2} + 2F''_{xz}(x,y,z)\frac{dz}{dx} + F''_x(x,y,z) = 0.$$

Für die Aenderung, welche parallel zur Ebene der yz stattfindet, ergibt sich ebenso die Gleichung:

$$F'_z(x,y,z)\frac{d^2z}{dx^2} + F''_z(x,y,z)\frac{dz^2}{dy^2} + 2F''_{yz}(x,y,z)\frac{dz}{dy} + F''_y(x,y,z) = 0.$$

Ferner folgt als Aenderung des ersten Aenderungsgesetzes für die zur Ebene der xz parallele Richtung, welche durch die Aenderung von y veranlaßt wird, der Ausdruck:

$$F'_z(x,y,z)\,\frac{d^2z}{dx\,dy} + F''_z(x,y,z)\,\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy} + F''_{zy}(x,y,z)\,\frac{dz}{dx}$$
$$+ F''_{xz}(x,y,z)\,\frac{dz}{dy} + F''_{xy}(x,y,z) = 0 ,$$

und ebenso als Aenderung des ersten Aenderungsgesetzes für die zur Ebene der yz parallele Richtung in Bezug auf die Veränderung von x, die Gleichung:

$$F'_z(x,y,z)\frac{d^2z}{dydx}+F''_z(x,y,z)\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dz}{dx}+F''_{zx}(x,y,z)\frac{dz}{dy}$$
$$+F''_{yz}(x,y,z)\frac{dz}{dx}+F''_{yx}(x,y,z)=0,$$

welche offenbar ganz dieselbe ist, wie die vorhergehende.

Zieht man nun aus diesen Gleichungen die Werthe von

$$\frac{d^2z}{dx^2},\quad \frac{d^2z}{dy^2},\quad \frac{d^2z}{dxdy},$$

und substituirt sie in den oben erhaltenen Ausdruck des zweiten Gesetzes der Coordinatenänderung für eine beliebige Richtung, so wird man mit Einführung der Bezeichnungen:

$$\frac{dF}{dz}\text{ für }F'_z(x,y,z),\quad \frac{d^2F}{dx^2}\text{ für }F''_x(x,y,z),\quad \frac{d^2F}{dx\,dy}\text{ für }F''_{xy}(x,y,z)$$

u. s. f. und mit der Beachtung des frühern ersten Aenderungsgesetzes:

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{ds}=\frac{dz}{ds},$$

sowie der zweiten Potenz desselben:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=\left(\frac{dz}{ds}\right)^2$$

nach einigen Reductionen den Ausdruck erhalten:

$$\frac{dF}{dz}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}=-\left[\frac{d^2F}{dz^2}\cdot\frac{dz^2}{ds^2}+\frac{d^2F}{dy^2}\cdot\frac{dy^2}{ds^2}+\frac{d^2F}{dx^2}\cdot\frac{dx^2}{ds^2}\right.$$
$$\left.+2\frac{d^2F}{dx\,dz}\frac{dz}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}+2\frac{d^2F}{dy\,dz}\cdot\frac{dz}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}+2\frac{d^2F}{dx\,dy}\cdot\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}\right],$$

und mit Einführung der Functionen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ für $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, wird

$$\frac{dF}{dz}\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{d^2F}{dx^2}\cos^2\alpha+\frac{d^2F}{dy^2}\cos^2\beta+\frac{d^2F}{dz^2}\cos^2\gamma$$

$$+2\frac{d^2F}{dx\,dy}\cos\alpha\cos\beta+2\frac{d^2F}{dx\,dz}\cos\alpha\cos\gamma+2\frac{d^2F}{dy\,dz}\cos\beta\cos\gamma=0$$

der allgemeine Ausdruck des zweiten Aenderungsgesetzes der Coordinaten in dem Punkte xyz einer gegebenen Fläche.

§. 36.

Aus den im Vorhergehenden erhaltenen Formen des zweiten Aenderungsgesetzes lassen sich nun wieder für die Gestalt der Fläche in der Umgebung des Punktes M ähnliche Schlüsse ziehen, wie sie oben für die Curven abgeleitet wurden. Zu diesem Zwecke ersetzt man jedoch der einfacheren Anschauung wegen die Veränderliche s besser durch ihre Projection $s_{,}$ in der Ebene der xy und die Winkel α und β durch den Winkel ω (§. 32). Man erhält dadurch für die Gleichung: $z=f(x,y)$ der gegebenen Fläche das zweite Aenderungsgesetz:

$$\frac{d^2z}{ds_{,}^2}=f''_x(x,y)\cos^2\omega+2f''_{xy}(x,y)\sin\omega\cos\omega+f''_y(x,y)\sin^2\omega\ ,$$

und schließt daraus sogleich, daß wenn $\frac{d^2z}{ds_{,}^2}$ für jeden Werth von ω zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ positiv ist, die Fläche der Ebene der xy die gewölbte Seite zuwendet, weil in diesem Falle z für jede Richtung in einem stärkeren Wachsthum begriffen ist, als bei der berührenden Ebene. Das Entgegengesetzte wird natürlich stattfinden, und die Fläche ihre hohle Seite der Ebene der xy zu kehren, wenn jene Function für jeden zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegenden Werth von ω einen negativen Werth erhält. Damit stehen ferner die Bedingungen zur sichern Erkennung und Unterscheidung des größten und kleinsten Werthes der Veränderlichen z, sowie die der Wendepunkte oder Wendelinien in Verbindung. Es würde uns jedoch hier zu weit führen, in alle diese Folgerungen näher einzugehen, und den Einfluß, welchen jedes der drei Glieder:

$$f''_x(x,y)=\frac{d^2z}{dx^2}\ ,\quad f''_{xy}(x,y)=\frac{d^2z}{dx\,dy}\ ,\quad f''_y(x,y)=\frac{d^2z}{dy^2}$$

auf das Zeichen und den Werth von $\frac{d^2 z}{d s_{,}^2}$ und mithin auf die aus dem zweiten Aenderungsgesetze zu ziehenden Ergebnisse hat, auseinanderzusetzen; ich will mich deßhalb auf den Fall beschränken, in welchem der Werth von $\frac{d^2 z}{d s_{,}^2}$ Null wird.

Die Gleichung:

$$\frac{d^2 z}{d s_{,}^2} = f''_x(x,y)\cos^2\omega + 2 f''_{xy}(x,y)\cos\omega\sin\omega + f''_y(x,y)\sin^2\omega = 0$$

gibt mit $\cos^2\omega$ dividirt, und wenn man $\frac{dy}{dx}$ für $\tang\omega$ einführt und in Bezug auf diese Größe ordnet:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 f''_y(x,y) + 2\frac{dy}{dx} f''_{xy}(x,y) + f''_x(x,y) = 0$$

und wird in dieser Form dazu dienen, den Werth von $\frac{dy}{dx}$ zu bestimmen, für welchen, oder die Richtung, nach welcher jene Voraussetzung: $\frac{d^2 z}{d s_{,}^2} = 0$ stattfinden, nach welcher also die Fläche mit einer Geraden eine Berührung zweiter Ordnung eingehen kann. Bezeichnet man der Kürze halber $f''_x(x,y)$, $f''_{xy}(x,y)$ und $f''_y(x,y)$ der Reihe nach mit r, s, t, so wird die vorhergehende Gleichung

$$t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2s\frac{dy}{dx} + r = 0,$$

und die allgemeine Auflösung gibt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{s}{t} \pm \frac{\sqrt{s^2 - rt}}{t}.$$

Aus diesem Werthe folgt, daß es zwei solcher Richtungen gibt, wenn für den Punkt M die Differenz $s^2 - rt$ positiv ist, daß nur eine vorhanden ist, wenn man $s^2 - rt = 0$ findet, und daß jene Voraussetzung nach keiner Richtung stattfinden kann, wenn dieselbe Differenz einen negativen Werth erhält. Für den besondern Fall, wo $r = 0$ ohne daß zugleich auch $s = 0$ ist, wo also die Fläche in einer zur Ebene der xz parallelen Richtung eine Wendung macht, ergeben sich die Werthe:

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2s}{t};$$

es findet dann die obige Voraussetzung immer in zwei Richtungen statt, von denen die erste zur Ebene der xz parallel ist. Bei den im Eingange des vorigen §. erwähnten Flächen, welche durch die Bewegung einer Geraden entstehen, muß es in jedem Punkte, also unabhängig von jedem besondern Werthe der Coordinaten, wenigstens eine Richtung, die Richtung der erzeugenden Geraden geben, in welcher $\frac{d^2z}{ds_i^2}$ Null ist; für diese Flächen muß also allgemein

$$s^2 - rt > \text{oder} = 0$$

sein. Wenn das letztere stattfindet, so gibt es in jedem Punkte nur einen Werth für $\frac{dy}{dx}$ aus der vorhergehenden Gleichung, und die entsprechenden Flächen besitzen die Eigenschaft, in eine Ebene ausgebreitet werden zu können; man nennt deßhalb die Bedingungsgleichung:

$$s^2 - rt = 0 \text{ oder } \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2} = 0$$

die bezeichnende Gleichung der entwickelbaren Flächen.

§. 37.

Zwei Flächen werden eine Berührung zweiter Ordnung unter sich eingehen, wenn in dem gemeinschaftlichen Punkte das zweite Gesetz der Coordinatenänderung für beide nach jeder Richtung dasselbe ist. Dieses Gesetz aber enthält in seiner einfachsten Form drei Glieder, die drei vorhergenannten abgeleiteten Functionen zweiter Ordnung r, s, t, von denen das erste die Aenderung des ersten Gesetzes der Coordinatenänderung nach einer zur Ebene der xz parallelen Richtung für diese Richtung selbst, und das dritte ebenso die entsprechende Aenderung des ersten Gesetzes für eine zur Ebene der yz parallele Richtung ausdrückt, während das zweite Glied s sowohl die Aenderung der in einem zur Ebene der xz parallelen Schnitte stattfindenden ersten Coordinatenänderung für den Uebergang von einem solchen Schnitte zu einem benachbarten, als auch die Aenderung der in einem zur Ebene der yz parallelen Schnitte stattfindenden ersten Coordinatenänderung für eine zu demselben senkrechte Richtung darstellt. Es müssen also für eine Berührung zweiter Ordnung nicht nur die beiden Glieder des ersten Gesetzes der Coordinatenänderung, sondern auch die drei Glieder des zweiten Aenderungsgesetzes für beide Flächen in ihrem gemeinschaftlichen Punkte gleich sein; man erhält

daher im Ganzen sechs Bedingungsgleichungen für eine solche Berührung, nämlich:

$$\left.\begin{array}{lll} F(a,b)=f(a,b) & F'_{x,}(a,b)=f'_x(a,b) & F'_{y,}(a,b)=f'_y(a,b) \\ F''_{x,}(a,b)=f''_x(a,b) & F''_{x,y,}(a,b)=f''_{x,y,}(a,b) & F''_{y,}(a,b)=f''_y(a,b) \end{array}\right\}$$

worin a und b die Coordinaten der Projection des gemeinschaftlichen Punktes in der Ebene der xy bezeichnen, und die Gleichungen der beiden Flächen unter den Formen

$$z_, = F(x_,, y_,) \qquad z = f(x, y)$$

vorausgesetzt sind.

Aus der Zahl dieser Bedingungsgleichungen folgt sogleich, daß eine Kugel mit einer andern krummen Fläche keine Berührung zweiter Ordnung eingehen kann; denn ihre Gleichung enthält in ihrer allgemeinsten Form:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\varrho^2$$

nur vier unveränderliche Größen (die drei Coordinaten α, β, γ ihres Mittelpunktes und den Halbmesser ϱ), von welchen ihre Lage und Größe abhängt, und es ist deßhalb im Allgemeinen unmöglich, den obigen sechs Bedingungen durch die Gleichung einer Kugel gleichzeitig Genüge zu leisten. Durch die Gleichung eines Ellipsoids kann dies jedoch auf beliebig viele Weisen geschehen, da diese in ihrer allgemeinsten Form:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy \\ +Kz+L=0$$

neun nothwendige constante Factoren enthält. Man kann demnach dabei eine Beschränkung eintreten lassen, und entweder den Mittelpunkt des Ellipsoids im Anfangspunkt der Coordinaten annehmen, wodurch die obige Gleichung auf

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+L=0$$

zurückkommt, oder die Achsen des Ellipsoids zu jenen der Coordinaten parallel voraussetzen, in welchem Falle seine Gleichung die Form:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Gx+Hy+Kz+L=0$$

annimmt; in jeder dieser beiden Formen enthält die Gleichung sechs nothwendige constante Coeffizienten.

Mit der Krümmung eines Ellipsoids in einem beliebigen Punkte desselben sind wir indessen nicht vertraut genug, um sie als Maaßstab anzunehmen; wir untersuchen deßhalb die Krümmung einer Fläche in

einem gegebenen Punkte derselben nach bestimmten Schnitten, und zwar nach solchen Schnitten, welche durch normale Ebenen gebildet, und auch Normal=Schnitte genannt werden.

Die Durchschnitts=Gerade einer solchen Schnittebene mit der Tangential=Ebene in dem betreffenden Punkte der Fläche ist die Tangente des Normalschnittes und ihre Projection in der Ebene der x y die Tangente der auf dieselbe Ebene projicirten Schnittcurve, deren Gleichung die Form:

$$y = f(x)$$

erhalten und durch ihr erstes Aenderungsgesetz: $\frac{dy}{dx}$ die Richtung bestimmen wird, nach welcher das zweite Gesetz der Coordinatenänderung für die gegebene Fläche und die berührende Kugel übereinstimmen muß, wenn die letztere die Krümmung der erstern nach jenem Normalschnitte messen soll. Das erste Aenderungsgesetz muß offenbar für beide Flächen nach jeder Richtung dasselbe sein, und man erhält dadurch zur Bestimmung der constanten Coeffizienten in der Gleichung der berührenden Kugel zuerst die drei Gleichungen:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \varrho^2 ,$$

$$x-\alpha + (z-\gamma)\frac{dz}{dx} = 0 , \quad y-\beta + (z-\gamma)\frac{dz}{dy} = 0 ,$$

welche die Berührung erster Ordnung bedingen und ausdrücken, daß der Mittelpunkt dieser Kugel auf der Normalen des Berührungspunktes liegen muß. Die Berührung zweiter Ordnung nach der Richtung des betreffenden Normalschnittes, also nach einer Richtung, deren Projection in der Ebene der x y mit der Achse der x einen Winkel ω bildet, für welchen man hat:

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{dy}{dx}$$

gibt die vierte Gleichung:

$$\frac{d^2 . z_,}{dx_,^2} = \frac{d^2 . z}{dx^2}$$

oder:

$$\frac{d^2 z_,}{dx_,^2} + 2\frac{d^2 z_,}{dx_, dy_,}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d^2 z_,}{dy_,^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{d^2 z}{dx^2} + 2\frac{d^2 z}{dx\,dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d^2 z}{dy^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 ,$$

welche für unsere Kugel die Form erhält:

$$1 + \frac{dz^2}{dx^2} + 2\frac{dz\,dz}{dx\,dy}\operatorname{tg}\omega + \left(1 + \frac{dz^2}{dy^2}\right)\operatorname{tg}^2\omega + \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\frac{d^2 z}{dx\,dy}\operatorname{tg}\omega + \frac{d^2 z}{dy^2}\operatorname{tg}^2\omega\right)(z-\gamma) = 0.$$

Setzt man dann wie oben zur Abkürzung:

$$\frac{dz}{dx}=p\,,\quad \frac{dz}{dy}=q\,,\quad \frac{d^2z}{dx^2}=r\,.\quad \frac{d^2y}{dx\,dy}=s\,,\quad \frac{d^2z}{dy^2}=t\,,$$

und zieht den Werth von $z-\gamma$ heraus, so ergibt sich

$$z-\gamma=-\frac{1+p^2+2pq\tang\omega+(1+q^2)\tang^2\omega}{r+2s\tang\omega+t\tang^2\omega}=-Q\,,^{*)}$$

und damit folgen aus den ersten Gleichungen die Werthe:

$$x-\alpha=pQ\quad,\qquad y-\beta=qQ$$

und

$$\varrho=\pm Q\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{Q}{V'}\,,$$

worin V' dieselbe Bedeutung hat, wie in §. 34.

Läßt man nun $\tang\omega$ von 0 bis ∞ stetig wachsen, so wird sich auch ϱ stetig ändern; das Gesetz dieser Aenderung wird, wie bei der Ordinate einer Curve, durch die erste abgeleitete Function des Werthes von ϱ in Bezug auf $\tang\omega$ ausgedrückt werden, und dieser selbst demnach ein größter oder kleinster sein, wenn die genannte Function das Zeichen ändert, also durch den Werth: Null geht. Macht man, um dies zu untersuchen, für einen Augenblick

$$\tang\omega=y'\,,\qquad Q=\frac{A}{B}\,,$$

so ergibt sich zuerst

$$\frac{d\varrho}{dy'}=\frac{d.Q}{dy'}\sqrt{1+p^2+q^2}$$

und nach dem Werthe von Q,

$$\frac{d.Q}{dy'}=\frac{2B[pq+(1+q^2)y']-2A(s+ty')}{B^2}\,.$$

---

*) Dieser Werth nimmt die einfachere Form:

$$Q=\frac{1}{r\cos^2\alpha+2s\cos\alpha\cos\beta+t\cos^2\beta}$$

an, wenn man die Richtung der Berührung durch die Winkel α, β, γ bestimmt, und das erste Aenderungsgesetz:

$$p\cos\alpha+q\cos\beta=\cos\gamma$$

beachtet.

Die Bedingung $\frac{d\varrho}{dy'} = 0 = \frac{dQ}{dy'}$ für einen größten oder kleinsten Werth von ϱ wird demnach

$$B[pq+(1+q^2)y']-A(s+ty')=0\ ,$$

und gibt zuerst

$$\frac{A}{B}=\frac{pq+(1+q^2)y'}{s+ty'}=Q\ ;$$

führt man aber für A und B ihre Werthe:

$$A=1+p^2+2pqy'+(1+q^2)y'^2$$
$$B=r+2sy'+ty'^2$$

ein, und ordnet in Bezug auf y', so entsteht die Gleichung:

$$[(1+q^2)s-pqt]y'^2+[r(1+q^2)-t(1+p^2)]y'-[s(1+p^2)-pqr]=0,$$

welche zeigt, daß es im Allgemeinen immer zwei Werthe für y' oder tang ω, also auch zwei Richtungen oder zwei Normalschnitte gibt, für welche die obige Bedingung stattfindet. Zieht man dann aus dem zuletzt erhaltenen Werthe von Q den Werth von y':

$$y'=\frac{Qs-pq}{1+q^2-tQ}$$

und bringt ihn in den ersten Werth von Q, nachdem derselbe als Gleichung nach y' geordnet, die Form:

$$1+p^2-rQ-2(pq-sQ)y'+(1+q^2-tQ)y'^2=0$$

erhalten hat, so wird nach einigen Reductionen

$$(1+p^2-rQ)(1+q^2-tQ)-(pq-sQ)^2=0\ ,$$

und wenn man entwickelt und in Bezug auf Q ordnet,

$$(rt-s^2)Q^2-[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]Q+1+p^2+q^2=0.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich im Allgemeinen zwei Werthe für Q, und folglich auch zwei Werthe für ϱ, von denen je einer einem der vorher gefundenen Werthe von y' oder tang ω entspricht.

§. 38.

Die Verhältnisse zwischen diesen Werthen sind indessen leichter zu durchschauen, wenn man die Ebene der xy zu der berührenden Ebene in dem betreffenden Punkte der Fläche parallel legt, wodurch in jenen Werthen und ihren Verhältnissen natürlich nichts geändert wird, als die

Form, welche viel einfacher werden muß, da nun die Tangenten an den Normalschnitten zu ihren Projectionen parallel werden, und der Winkel zwischen zwei dieser letztern auch dem von den Tangenten oder von den entsprechenden Normalschnitten gebildeten gleich ist. Durch diese Veränderung in der Lage der Coordinaten wird für den betreffenden Punkt

$$\frac{dz}{dx}=p=0\ ,\quad \frac{dz}{dy}=q=0\ ,$$

und man erhält zur Bestimmung der Werthe von y' oder $\operatorname{tang}\omega$, welche einem größten oder kleinsten Werthe von ϱ entsprechen, die einfache Gleichung:

$$y'^2-\frac{r-t}{s}y'-1=0\ , \qquad (a.$$

aus deren letztem Gliede für das Product der beiden Wurzeln der Werth: -1 folgt. Bezeichnet man demnach diese beiden Wurzeln mit $\operatorname{tang}\omega_1$ und $\operatorname{tang}\omega_2$, so ist

$$\operatorname{tang}\omega_1\operatorname{tang}\omega_2=-1\ ,\quad \omega_2=\omega_1+\frac{1}{2}\pi\ ;$$

die beiden Richtungen oder Normalschnitte, welche einem größten oder kleinsten Werthe von ϱ entsprechen, bilden folglich in jedem Punkte einer Fläche einen rechten Winkel unter sich.

Der Werth von ϱ wird nun die Form annehmen:

$$\varrho=\pm Q=\pm\frac{1+y'^2}{r+2sy'+ty'^2}\ ,$$

und die Gleichung, welche die beiden Werthe von ϱ enthält, sich auf

$$(rt-s^2)\varrho^2-(r+t)\varrho+1=0 \qquad (b.$$

reduziren, oder wenn man die Krümmung $\varkappa=\frac{1}{\varrho}$ einführt, die Form:

$$\varkappa^2-(r+t)\varkappa+rt-s^2=0 \qquad (c.$$

annehmen. Sind dann ϱ_1 und ϱ_2 die beiden Werthe von ϱ und $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ die entsprechenden von $\varkappa$, so hat man

$$\frac{1}{\varrho_1}\cdot\frac{1}{\varrho_2}=\varkappa_1\varkappa_2=rt-s^2\ ;$$

die beiden Krümmungshalbmesser oder die beiden Krümmungen haben demnach dasselbe Zeichen oder sind nach derselben Seite gewendet, wenn

für den betreffenden Punkt der Fläche $rt - s^2 > 0$ ist; die Krümmungen der beiden Normalschnitte sind dagegen in Bezug auf die Ebene der xy entgegengesetzt gerichtet, wenn $rt - s^2 < 0$ ist, und für $rt - s^2 = 0$ wird entweder eine der beiden Krümmungen oder beide zugleich Null, die berührende Ebene geht dann entweder nach einer Richtung oder nach allen eine Berührung zweiter Ordnung mit der Fläche ein. Findet die Gleichung $rt - s^2 = 0$ für alle Punkte der Fläche statt, also unabhängig von jedem besondern Werthe der Coordinaten, so gibt es in jedem Punkte der Fläche wenigstens eine, aber, mit Ausnahme der Ebene selbst, im Allgemeinen auch nur eine Richtung, in welcher die Krümmung Null ist, nach welcher also eine Ebene oder eine Gerade eine Berührung zweiter Ordnung mit der Fläche haben kann, und es folgt daraus, wie wir schon oben aus dem zweiten Gesetze der Coordinatenänderung geschlossen haben, daß

$$rt - s^2 = 0$$

die bezeichnende Gleichung für die entwickelbaren Flächen ist.

Wir haben ferner dort gesehen, daß wenn $rt - s^2 > 0$ ist, es keine Richtung gibt, nach welcher zwischen der Fläche und der berührenden Geraden eine andere als eine einfache Berührung stattfinden kann; in diesem Falle ist der eine Werth von ϱ ein größter, der andere ein kleinster. Hat man dagegen $rt - s^2 < 0$, so gibt es immer zwei Richtungen, nach welchen eine Gerade in einer innigeren Berührung mit der Fläche steht, für welche also die Krümmung Null ist; in diesem Falle haben die beiden Werthe von ϱ oder $\varkappa$, wie schon bemerkt, entgegengesetzte Zeichen, und die letztern sind nun beide größte Werthe, oder die von ϱ beide kleinste Werthe. Denn leitet man aus dem Werthe von ϱ, in y' ausgedrückt, das zweite Aenderungsgesetz in Bezug auf y' ab, so findet man mit Beachtung der Bedingungsgleichung:

$$s(y'^2 - 1) + (r - t)y' = 0$$

und indem man den Nenner $r + 2sy' + ty'^2$ durch B ersetzt, den Ausdruck:

$$\frac{d^2\varrho}{dy'^2} = \pm 2\,\frac{r - t + 2sy'}{B^2},$$

und wenn man dann die Werthe von y' aus der Gleichung (a) einführt, welche sind:

$$y'_1 = -\frac{r-t}{2s} + \frac{\sqrt{(r-t)^2 + 4s^2}}{2s}, \quad y'_2 = -\frac{r-t}{2s} - \frac{\sqrt{(r-t)^2 + 4s^2}}{2s},$$

so zeigen die Ausdrücke:

$$\frac{d^2\varrho}{dy'^2} = \pm 2\frac{\sqrt{(r-t)^2+4s^2}}{B^2}\,,\quad \frac{d^2\varrho}{dy'^2} = \mp 2\frac{\sqrt{(r-t)^2+4s^2}}{B^2}\,,$$

daß wenn die beiden Werthe von ϱ gleiche Zeichen haben, in den vorstehenden Gleichungen also die beiden obern, oder die beiden untern Zeichen gelten, ein Werth von ϱ ein größter, der andere ein kleinster ist, daß dagegen beide kleinste sind, wenn die Werthe von ϱ entgegengesetzte Qualitäten, die Krümmungen also entgegengesetzte Richtungen haben, da alsdann in der ersten Gleichung nur das obere, in der zweiten nur das untere Zeichen genommen werden kann. *)

Für den Fall endlich, daß $rt-s^2=0$ ist, gibt die Gleichung (c)

$$x^2-(r+t)x=0\,,\quad x_1=0\,,\quad x_2=r+t\,,$$

woraus wieder $\varrho_1=\infty$, $\varrho_2=\frac{1}{r+t}$ folgt. Für y' ergeben sich unter derselben Voraussetzung die Werthe: $\frac{t}{s}$ und $-\frac{s}{t}$, von denen der letztere, welcher auch gleich $-\frac{r}{s}$ ist und dem Werthe $\varrho_1=\infty$ entspricht, den Nenner B auf Null bringt, also sowohl das erste als das zweite Aenderungsgesetz von ϱ in Bezug auf y' unendlich macht. Der erste Werth dagegen gibt

$$\frac{d^2\varrho}{dy'^2} = \pm\frac{2r^2}{(r+t)^3}\,,$$

und zeigt, daß der entsprechende Werth von ϱ ein kleinster ist, da man das obere Zeichen nehmen muß, wenn r und t positiv, das untere, wenn sie negativ sind.

---

*) Die Gleichung (b) nimmt nämlich für diesen Fall die Form an:

$$(s^2-rt)\varrho^2+(r+t)\varrho-1=0$$

und gibt die Werthe:

$$\varrho=-\frac{r+t}{2(s^2-rt)}\pm\frac{\sqrt{(r+t)^2+4(s^2-rt)}}{2(s^2-rt)}\,;$$

es ist also $\sqrt{(r+t)^2+4(s^2-rt)}=\sqrt{(r-t)^2+4s^2}>r+t$, und dem positiven Werthe von ϱ entspricht die positive, dem negativen die negative Wurzelgröße $\sqrt{(r-t)^2+4s^2}$.

§. 39.

Bei den Curven, welche auf einer gegebenen Fläche durch ebene Schnitte entstehen, die durch die Normale eines bestimmten Punktes der Fläche geführt werden, fällt in diesem Punkte die Normale zur Fläche offenbar mit dem Krümmungshalbmesser oder mit der Hauptnormale der Curve zusammen; sobald man sich aber in einem solchen Schnitte von jenem Punkte entfernt, oder irgend einer andern krummen Linie auf der gegebenen Fläche folgt, so wird dies im Allgemeinen nicht mehr stattfinden; es werden vielmehr die genannten Normalen einen Winkel ψ unter sich bilden, dessen Cosinus leicht durch die Winkel bestimmt werden kann, welche diese beiden Geraden mit den drei Coordinatenachsen einschließen. Sind nämlich λ, μ, ν diese Winkel für die Normale zur Fläche, λ', μ', ν' die für die Hauptnormale der Curve, so ist bekanntlich

$$\cos\psi = \cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu',$$

und man findet damit und mit den in §. §. 30 und 34 erhaltenen Werthen von $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, wenn die Gleichungen der gegebenen Fläche und der darauf beschriebenen oder durch irgend einen Schnitt entstandenen Curve unter den Formen:

$$F(x, y, z) = 0, \quad \begin{cases} y = f_1(x) \\ z = f_2(x) \end{cases}$$

vorausgesetzt werden,

$$\cos\psi = V\varrho\left(\frac{dF}{dx}\cdot\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{dF}{dy}\cdot\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds} + \frac{dF}{dz}\cdot\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds}\right),$$

und wenn die Form $z = f(x, y)$ für die Gleichung der Fläche gewählt wird,

$$\cos\psi = V'\varrho\left(\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds} - \frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds}\right),$$

in welchen Ausdrücken V und V' die in §. 34 angenommene Bedeutung haben. Vergleicht man dann den in den Klammern eingeschlossenen Factor des zweiten Gliedes in dem letzten Ausdrucke mit dem zweiten Gesetze der Coordinatenänderung in Bezug auf die unabhängige Veränderliche s (§. 35), so ergibt sich

$$\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds} - \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} - \frac{dz}{dy}\cdot\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds} = r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta,$$

und da zufolge der Anmerkung in §. 37 das zweite Glied dieser Gleichung auf $\frac{1}{Q}$ zurückkommt, so erhält man mit der Beachtung, daß der Werth von V' mit doppeltem Zeichen versehen ist,

$$\cos\psi = \frac{V'\varrho}{Q} \quad , \qquad \varrho = \frac{Q}{V'}\cos\psi \, .$$

Bezeichnet man dann den Krümmungshalbmesser des Normalschnittes, welcher mit der auf der Fläche beschriebenen Curve in dem betreffenden Punkte dieselbe Tangente gemeinschaftlich hat, mit P, so ist nach dem Vorhergehenden

$$P = \frac{Q}{V'} \, ,$$

und man schließt daraus die einfache Beziehung:

$$\varrho = P\cos\psi \; ;$$

demnach ist der Krümmungshalbmesser einer auf einer gegebenen Fläche beschriebenen Curve in irgend einem ihrer Punkte gleich der Projection des Krümmungshalbmessers des durch die Tangente der Curve geführten Normalschnittes auf die Krümmungsebene der Curve. Umgekehrt hat man auch

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{\varrho}\cos\psi \, , \qquad K = \varkappa\cos\psi \; ;$$

denkt man sich daher die Krümmung K des Normalschnittes, sowie die Krümmung $\varkappa$ der auf der Fläche beschriebenen Curve durch entsprechende Längen auf den Krümmungshalbmessern vorgestellt, so ist die Krümmung des Normalschnittes gleich der Projection der Krümmung der Curve auf die Ebene des Normalschnittes, und die Krümmung der Curve wächst, wie die Secante des Winkels ψ, den ihre Krümmungsebene mit der Ebene des Normalschnittes einschließt. Ist dieser Winkel gleich Null, so ist $\cos\psi = \sec\psi = 1$, und demnach, wie schon bemerkt,

$$\varrho = P \, , \qquad \varkappa = K \; ;$$

für $\psi = \frac{1}{2}\pi$, wird $\varrho = 0$, $\varkappa = \infty$, die Curve geht dann in einen Punkt oder in zwei zusammenfallende Gerade über.

Umgekehrt wird die Gleichung:

$$\varrho = P = \frac{Q}{V'} \text{ oder } \varkappa = K \frac{V'}{Q}$$

auch die Bedingung ausdrücken, daß die Krümmungsebene einer auf einer Fläche gezogenen Curve durch die Normale der Fläche geht, oder daß diese letztere zugleich Hauptnormale der Curve ist, welche wir nun wegen der Gleichheit der Krümmungen **Krümmungscurve der gegebenen Fläche in dem betreffenden Punkte** nennen wollen. Soll daher eine auf einer Fläche verzeichnete Curve diese Eigenschaft in allen ihren Punkten besitzen, diese Curve also durchaus eine **Krümmungscurve** auf dieser Fläche sein, so muß die obige Bedingung unabhängig von jedem besondern Werthe der Coordinaten erfüllt werden.

Diese Bedingung wird jedoch einfacher dadurch ausgedrückt, daß man den Cosinus des Winkels zwischen der Normalen zur Fläche und einer Normalen zur Krümmungsebene, welcher offenbar das Complement des Winkels ψ ist, gleich Null setzt. Man erhält auf diese Art und indem man die Winkel, welche die Normale zur Krümmungsebene mit den drei Coordinatenachsen bildet, durch $\lambda_,$, $\mu_,$, $\nu_,$ bezeichnet, zuerst

$$\sin\psi = \cos\lambda \cos\lambda_, + \cos\mu \cos\mu_, + \cos\nu \cos\nu_, = 0 \ ,$$

und dann mit den Coeffizienten der oben gefundenen Gleichung der Krümmungsebene, welche den Functionen $\cos\lambda_,$, $\cos\mu_,$, $\cos\nu_,$ proportional sind, sowie mit den öfters vorgekommenen Werthen von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, die Gleichung:

$$\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)\frac{dF}{dx} + \left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)\frac{dF}{dy} + \left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)\frac{dF}{dz} = 0,$$

welche der Form $F(x, y, z) = 0$ der Flächengleichung entspricht, oder für die Form $z = f(x, y)$ dieser Gleichung den Ausdruck:

$$\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)\frac{dz}{dx} + \left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)\frac{dz}{dy} - \left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right) = 0.$$

Bringt man sodann diese Gleichungen unter die Formen:

$$\frac{dy}{ds}\left(\frac{dF}{dx}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dF}{dz}\frac{d^2x}{ds^2}\right) + \frac{dx}{ds}\left(\frac{dF}{dz}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dF}{dy}\frac{d^2z}{ds^2}\right) + \frac{dz}{ds}\left(\frac{dF}{dy}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dF}{dx}\frac{d^2y}{ds^2}\right) = 0$$

und

$$\frac{dy}{ds}\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{d^2x}{ds^2}\right) - \frac{dx}{ds}\left(\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2}\right) - \frac{dz}{ds}\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dz}{dy}\frac{d^2x}{ds^2}\right) = 0,$$

oder die letztere wieder mit Benützung der frühern Bezeichnungen unter die Form:

$$\left(p\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{d^2x}{ds^2}\right)\cos\beta-\left(q\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{d^2y}{ds^2}\right)\cos\alpha-\left(p\frac{d^2y}{ds^2}-q\frac{d^2x}{ds^2}\right)\cos\gamma=0,$$

so sieht man, daß denselben unabhängig von den drei Winkeln α, β, γ, d. h. unabhängig von der Richtung, nach welcher sich die Krümmungscurve wenden soll, Genüge gethan wird, wenn man die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dF}{dx}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dF}{dz}\frac{d^2x}{ds^2}&=0\\ \frac{dF}{dz}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dF}{dy}\frac{d^2z}{ds^2}&=0\\ \frac{dF}{dy}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dF}{dx}\frac{d^2y}{ds^2}&=0\end{aligned}\right\}\text{ oder }\left\{\begin{aligned}p\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{d^2x}{ds^2}&=0\\ q\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{d^2y}{ds^2}&=0\\ p\frac{d^2y}{ds^2}-q\frac{d^2x}{ds^2}&=0\end{aligned}\right.$$

befriedigt. Von diesen drei Gleichungen ist aber jede eine Folge der beiden andern in derselben Reihe, was am einfachsten daraus geschlossen wird, daß wenn man in der ersten Reihe die erste mit $\frac{dF}{dy}$, die zweite mit $\frac{dF}{dx}$, die dritte mit $\frac{dF}{dz}$, in der zweiten Reihe die erste mit q und die zweite mit —p multiplicirt, die Summe von allen dreien in derselben Reihe Null wird. Es genügt also an zwei dieser Gleichungen, um die obige Bedingung zu erfüllen, und man wird leicht einsehen, daß sie, was ihre Bedeutung betrifft, das zweite Gesetz der Coordinatenänderung für die Krümmungscurve in Bezug auf die unabhängige Veränderliche s ausdrücken, oder die abgeleiteten Gleichungen zweiter Ordnung der Projectionsgleichungen jener Curve vorstellen.

Diese Gleichungen nehmen eine viel weitläufigere, aber leichter zu deutende Form an, wenn die unabhängigen Veränderlichen getauscht werden. Will man z. B. in der dritten Gleichung der zweiten Reihe x als unabhängige Veränderliche einführen, so muß man dieselbe zuerst unter die Formen bringen:

$$p\frac{d.\frac{dy}{ds}}{dz}-q\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}=p\left(\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy\,d^2s}{ds\,ds^2}\right)-q\left(\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx\,d^2s}{ds\,ds^2}\right)=0;$$

Umgekehrt wird die Gleichung:

$$\varrho = P = \frac{Q}{V'} \text{ oder } \varkappa = K\frac{V'}{Q}$$

auch die Bedingung ausdrücken, daß die Krümmungsebene einer auf einer Fläche gezogenen Curve durch die Normale der Fläche geht, oder daß diese letztere zugleich Hauptnormale der Curve ist, welche wir nun wegen der Gleichheit der Krümmungen Krümmungscurve der gegebenen Fläche in dem betreffenden Punkte nennen wollen. Soll daher eine auf einer Fläche verzeichnete Curve diese Eigenschaft in allen ihren Punkten besitzen, diese Curve also durchaus eine Krümmungscurve auf dieser Fläche sein, so muß die obige Bedingung unabhängig von jedem besondern Werthe der Coordinaten erfüllt werden.

Diese Bedingung wird jedoch einfacher dadurch ausgedrückt, daß man den Cosinus des Winkels zwischen der Normalen zur Fläche und einer Normalen zur Krümmungsebene, welcher offenbar das Complement des Winkels ψ ist, gleich Null setzt. Man erhält auf diese Art und indem man die Winkel, welche die Normale zur Krümmungsebene mit den drei Coordinatenachsen bildet, durch $\lambda_,$, $\mu_,$, $\nu_,$ bezeichnet, zuerst

$$\sin\psi = \cos\lambda\cos\lambda_, + \cos\mu\cos\mu_, + \cos\nu\cos\nu_, = 0 ,$$

und dann mit den Coefficienten der oben gefundenen Gleichung der Krümmungsebene, welche den Functionen $\cos\lambda_,$, $\cos\mu_,$, $\cos\nu_,$ proportional sind, sowie mit den öfters vorgekommenen Werthen von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, die Gleichung:

$$\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)\frac{dF}{dx}+\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)\frac{dF}{dy}+\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)\frac{dF}{dz}=0,$$

welche der Form $F(x, y, z) = 0$ der Flächengleichung entspricht, oder für die Form $z = f(x, y)$ dieser Gleichung den Ausdruck:

$$\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)\frac{dz}{dx}+\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)\frac{dz}{dy}-\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)=0.$$

Bringt man sodann diese Gleichungen unter die Formen:

$$\frac{dy}{ds}\left(\frac{dF}{dx}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dF}{dz}\frac{d^2x}{ds^2}\right)+\frac{dx}{ds}\left(\frac{dF}{dz}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dF}{dy}\frac{d^2z}{ds^2}\right)+\frac{dz}{ds}\left(\frac{dF}{dy}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dF}{dx}\frac{d^2y}{ds^2}\right)=0$$

und

$$\frac{dy}{ds}\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{d^2x}{ds^2}\right)-\frac{dx}{ds}\left(\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{d^2y}{ds^2}\right)-\frac{dz}{ds}\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dz}{dy}\frac{d^2x}{ds^2}\right)=0,$$

oder die letztere wieder mit Benützung der frühern Bezeichnungen unter die Form:

$$\left(p\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{d^2x}{ds^2}\right)\cos\beta-\left(q\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{d^2y}{ds^2}\right)\cos\alpha-\left(p\frac{d^2y}{ds^2}-q\frac{d^2x}{ds^2}\right)\cos\gamma=0,$$

so sieht man, daß denselben unabhängig von den drei Winkeln α, β, γ, d. h. unabhängig von der Richtung, nach welcher sich die Krümmungscurve wenden soll, Genüge gethan wird, wenn man die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dF}{dx}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dF}{dz}\frac{d^2x}{ds^2}&=0\\ \frac{dF}{dz}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dF}{dy}\frac{d^2z}{ds^2}&=0\\ \frac{dF}{dy}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dF}{dx}\frac{d^2y}{ds^2}&=0\end{aligned}\right\}\ \text{oder}\ \left\{\begin{aligned}p\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{d^2x}{ds^2}&=0\\ q\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{d^2y}{ds^2}&=0\\ p\frac{d^2y}{ds^2}-q\frac{d^2x}{ds^2}&=0\end{aligned}\right.$$

befriedigt. Von diesen drei Gleichungen ist aber jede eine Folge der beiden andern in derselben Reihe, was am einfachsten daraus geschlossen wird, daß wenn man in der ersten Reihe die erste mit $\frac{dF}{dy}$, die zweite mit $\frac{dF}{dx}$, die dritte mit $\frac{dF}{dz}$, in der zweiten Reihe die erste mit q und die zweite mit —p multiplicirt, die Summe von allen dreien in derselben Reihe Null wird. Es genügt also an zwei dieser Gleichungen, um die obige Bedingung zu erfüllen, und man wird leicht einsehen, daß sie, was ihre Bedeutung betrifft, das zweite Gesetz der Coordinatenänderung für die Krümmungscurve in Bezug auf die unabhängige Veränderliche s ausdrücken, oder die abgeleiteten Gleichungen zweiter Ordnung der Projectionsgleichungen jener Curve vorstellen.

Diese Gleichungen nehmen eine viel weitläufigere, aber leichter zu deutende Form an, wenn die unabhängigen Veränderlichen getauscht werden. Will man z. B. in der dritten Gleichung der zweiten Reihe x als unabhängige Veränderliche einführen, so muß man dieselbe zuerst unter die Formen bringen:

$$p\frac{d.\frac{dy}{ds}}{dz}-q\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}=p\left(\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy\,d^2s}{ds\,ds^2}\right)-q\left(\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx\,d^2s}{ds\,ds^2}\right)=0;$$

wenn man nun den letzten Ausdruck mit $\frac{ds^4}{dx^4}$ multiplizirt, und $\frac{d^2x}{dx^2}=0$, $\frac{dy}{dx}=y'$, $\frac{d^2y}{d^2x}=y''$ setzt, so wird derselbe

$$py''\left(\frac{ds}{dx}\right)^2-\frac{ds}{dx}\frac{d^2s}{dx^2}(py'-q)=0\ ;$$

endlich führt man für $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2$ und $\frac{ds}{dx}\cdot\frac{d^2s}{dx^2}$ den Werth:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{d.z}{dx}\right)^2=1+y'^2+(p+qy')^2$$

und dessen erste Ableitung:

$$\frac{ds}{dx}\frac{d^2s}{dx^2}=\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d.z}{dx}\frac{d^2.z}{dx^2}=y'y''+(p+qy')(r+2sy'+ty'^2+qy'')$$

ein, und findet nach einigen Reductionen den Ausdruck:

d.) $\quad (1+p^2+q^2)y''+(q-py')(r+2sy'+ty'^2)=0$

als zweites Gesetz der Coordinatenänderung, welche parallel zur Ebene der xy und in einer durch die Function $\frac{dy}{dx}$ bestimmten Richtung stattfinden muß, damit die entsprechende Curve auf der Fläche eine Krümmungscurve ist.

Der aus der vorhergehenden Gleichung sich ergebende Werth von y'' oder $\frac{d^2y}{dx^2}$ wird Null, einmal wenn man

$$py'-p=0 \text{ oder } y'=\frac{q}{p}$$

nimmt, und dann wenn

$$r+2sy'+ty'^2=0$$

gesetzt wird. Der erste Werth von y' ist die Tangente des Winkels, welchen der zur Ebene der xy senkrechte Normalschnitt mit der Ebene der xz bildet; der Riß dieser Schnittebene oder die Projection der Tangente dieses Normalschnittes in der Ebene der xy hat demnach mit der Projection unserer Krümmungscurve nach dieser Richtung eine Berührung zweiter Ordnung; diese Projection macht also hier eine Wendung, oder sie ist selbst eine Gerade und in diesem Falle die Krümmungscurve eine ebene Curve. Die zweite der obigen Gleichungen setzt voraus, daß die

Krümmungscurve in einer Richtung genommen wird, nach welcher die Fläche selbst eine Berührung zweiter Ordnung mit einer Geraden eingeht, oder nach welcher eine Gerade mit der Fläche ganz zusammenfällt. Findet blos das erstere statt, so macht die Projection der Krümmungscurve wieder eine Wendung; im zweiten Falle ist natürlich die Krümmungscurve selbst, also auch ihre Projection eine Gerade.

Der Werth von y'' oder $\frac{d^2y}{dx^2}$ wird aber auch Null, und zwar unabhängig von der Richtung, welche man einschlägt, wenn gleichzeitig $p = 0$ und $q = 0$ wird, also in jedem Punkte, wo die Tangential-Ebene zur gegebenen Fläche mit der Ebene der xy parallel ist; in einem solchen Punkte macht also die Projection der Krümmungscurve für jede Richtung eine Wendung oder sie wird für die eine und die andere Richtung eine Gerade, die Curve selbst also eine ebene.

Soll endlich die Krümmungscurve, welche man sucht, die der größten oder kleinsten Krümmung für jeden Punkt der Fläche sein, durch welchen sie gezogen wird, so muß man in dem vorhergehenden zweiten Aenderungsgesetze (d) den entsprechenden Werth von y' aus den am Ende des §. 37 erhaltenen Gleichungen einführen, indem durch diesen die Richtung der größten oder kleinsten Krümmung bestimmt wird. Sehr oft werden nur diese Linien der größten oder kleinsten Krümmung Krümmungslinien genannt.

Die Krümmungscurven überhaupt kann man sich auf einer Fläche dadurch erzeugt denken, daß ein vollkommen biegsamer Faden durch zwei beliebige Punkte über die Fläche gespannt worden sei, und dabei keine Reibung stattfinde; denn es ist fast von selbst einleuchtend, daß für diesen Faden die Hauptnormale in jedem Punkte senkrecht zur Fläche sein wird, und daß der zwischen den beiden Punkten liegende Bogen der Fadencurve kürzer oder länger sein wird, als bei jeder andern Curve, welche man durch dieselben zwei Punkte auf der gegebenen Fläche ziehen kann. Wir werden deßhalb bei der Untersuchung über die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche und über das Gleichgewicht eines vollkommen biegsamen Fadens auf diese Krümmungscurven zurückkommen.

§. 40.

Die vorhergehenden Betrachtungen über die Gesetze der Coordinatenänderung einer Curve oder Fläche lassen sich nun auch auf jede andere Function anwenden, welche eine Beziehung zwischen stetig wachsenden oder abnehmenden Größen ausdrückt, und welche, wenn man will,

immer durch eine Curve oder Fläche anschaulich dargestellt werden kann, so lange die Zahl der Veränderlichen nicht größer ist, als drei. Die erste Abgeleitete einer solchen Function wird immer das erste Gesetz der gegenseitigen stetigen Aenderung jener Größen für einen bestimmten oder beliebigen Werth der unabhängigen Veränderlichen darstellen, d. h. sie wird angeben, in welchem Verhältnisse die im Entstehen begriffene Aenderung des Werthes der Function zu der Aenderung des Werthes der unabhängigen Veränderlichen vor sich gehen will; die zweite abgeleitete Function wird ebenso angeben, in welchem Verhältnisse sich dieses erste Aenderungsverhältniß oder Aenderungsgesetz zu ändern im Begriffe steht, also das zweite Aenderungsgesetz der gegebenen Function ausdrücken, u. s. f. Solche Functionen sind z. B. die Gleichungen, welche die Länge eines Bogens, den Flächeninhalt einer Fläche, den Rauminhalt oder die Lage des Schwerpunktes eines Körpers durch die Coordinaten der Begrenzungen ausdrücken; die Abgeleiteten derselben zeigen dann, in welchem Verhältnisse sich die Länge des Bogens, der Flächen- oder Rauminhalt, oder die Lage des Schwerpunktes mit der Erweiterung einer oder mehrerer Grenzen ändert oder zu ändern im Begriffe steht.

Im Laufe unserer Untersuchungen über Gleichgewicht und Bewegung werden wir noch vielen andern ähnlichen Functionen begegnen, und unter diesen auch solchen, bei denen eine der Veränderlichen oder die Function selbst für gewisse Werthe der unabhängigen Veränderlichen einen größten oder kleinsten Werth erhalten kann, wie wir schon bei der Bestimmung der Krümmung der Flächen einen ähnlichen Fall gesehen haben. In allen diesen Fällen werden dann auch die Bedingungen, die oben für das Vorhandensein eines größten oder kleinsten Werthes der Ordinate einer Curve oder Fläche gefunden wurden, zur Bestimmung der Werthe der unabhängigen Veränderlichen dienen, denen jene größten oder kleinsten Werthe der Function entsprechen. —

In den meisten unserer Untersuchungen sind es aber gerade die Gesetze der Größenänderung, welche wir unmittelbar erhalten können, und von denen wir auf das zwischen den veränderlichen Größen selbst stattfindende Verhältniß oder auf die Function, welche ihre gegenseitigen Beziehungen ausdrückt, zurückschließen müssen. Dieses ist dann die Aufgabe der Integralrechnung, von welcher wir aus dem angeführten Grunde sehr häufigen Gebrauch machen werden, und dabei in so einfachen Fällen, daß die Kenntniß der Anfangsgründe dieser Rechnungsart hinreicht, um mit Nutzen dem Gange der Untersuchungen folgen zu können, während die den Untersuchungen beigefügten Beispiele das beste

Mittel sind, sich Fertigkeit in derselben zu erwerben und ihre Anwendung kennen zu lernen.

Es dürfte indessen ungeachtet des Umfanges, welchen gegenwärtige Einleitung erhält, nicht überflüssig sein, hier auch für diese Rechnung, was ihre nächste Aufgabe und ihre Anwendung betrifft, eine einfachere und natürlichere Ansicht, als die gewöhnliche, zu Grunde zu legen, und dabei den Leser sowohl mit der im Laufe dieses Werkes angewendeten Art und Weise des Ausdrucks und der Bezeichnung bekannt zu machen, als über einige zweifelhafte Fälle in der Anwendung, worüber die meisten Lehrbücher der Integralrechnung hinweggehen oder unklare und unrichtige Lehren geben, aufzuklären.

§. 41.

Die erste und nächste Aufgabe der Integralrechnung besteht nicht darin, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, von der abgeleiteten Function auf die ursprüngliche zurückzuschließen, sondern darin, aus dem allgemeinen Aenderungsgesetze einer Function ihre wirkliche Aenderung für einen gegebenen Aenderungswerth der unabhängigen Veränderlichen herzuleiten, oder was dasselbe ist, den Unterschied in dem Werthe der ursprünglichen Function anzugeben, welcher zwei gegebenen oder beliebigen Werthen der unabhängigen Veränderlichen entspricht.

Das Integralzeichen $\int$ hebt nämlich zunächst das Zeichen Anf: (Anfangswerth) auf oder ist diesem dem Begriffe nach entgegengesetzt, und wie man aus der Gleichung: $x^n = a$, die neue: $x = \sqrt[n]{a}$ zieht, so erhält man in strenger Folge aus den Gleichungen:

$$\text{Anf:} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dx}{dx}, \qquad \text{Anf:} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

zunächst die Aenderungsverhältnisse:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \int \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \int f'(x),$$

und dann die Aenderungswerthe oder Integralien:

$$\Delta y = \Delta x \int \frac{dy}{dx}, \quad f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta f(x) = \Delta x \int f'(x).$$

Ist demnach die Gleichung oder das Aenderungsgesetz:

a.) $$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

gegeben, so zieht man daraus durch Integration

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \int f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

oder sogleich einfacher

$$\Delta y = \Delta x \int f'(x) = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x),$$

und nennt diesen letztern Ausdruck, in welchem die Werthe x und $x+\Delta x$ der unabhängigen Veränderlichen noch unbestimmt sind, das unbestimmte Integral der Differentialgleichung (a). Dieses unbestimmte Integral ist demnach der allgemeine Ausdruck der Aenderung, welche die Veränderliche y oder die Function $f(x)$ erleidet, wenn die unabhängige Veränderliche von dem beliebigen Werthe x zu irgend einem andern $x+\Delta x$ übergeht; man kann ihm also auch die Form geben:

$$y_{,} - y = f(x_{,}) - f(x),$$

wenn $x_{,}$ für $x+\Delta x$ gesetzt wird, und $y_{,}$ den dem $x_{,}$ entsprechenden Werth der Veränderlichen y vorstellt. Da nun Δx ganz willkürlich ist und ebensowohl negativ wie positiv sein kann, so werden die Größen $x_{,}$, $y_{,}$ irgend zwei beliebige andere Werthe als x und y von diesen Veränderlichen ausdrücken können. Sind also zwei solche entsprechende Werthe bekannt, oder werden dieselben je nach Umständen und mit Beachtung des Möglichen festgestellt und mit x_0, y_0 bezeichnet, so erhält die vorhergehende Gleichung die Form:

$$y - y_0 = f(x) - f(x_0);$$

sie wird nun als die ursprüngliche Function der Abgeleiteten $f'(x)$ betrachtet, und gewöhnlich das vollständige Integral der Gleichung (a) genannt; wir wollen sie jedoch das allgemeine Integral der Gleichung (a) nennen, weil darin die Veränderlichen x und y selbst enthalten sind, und sie das allgemeine Verhältniß zwischen diesen Veränderlichen bestimmt ausdrückt.

Werden endlich, wie dies immer geschehen muß, wenn der Zahlenwerth eines Integrals berechnet werden soll, zwei Werthe für x angenommen und bestimmt, um den Unterschied in den Werthen der Function $f(x)$ oder der Veränderlichen y auszudrücken, welche jenen Werthen der unabhängigen Veränderlichen entsprechen, und bezeichnet

man die letztere mit X und x_0, die erstern mit Y und y_0, so erhält man das bestimmte Integral:

$$Y - y_0 = f(X) - f(x_0)$$

der Gleichung (a). Diese bestimmten Werthe X und x_0 der unabhängigen Veränderlichen x werden Grenzwerthe oder Grenzen derselben genannt, und gewöhnlich schon in der unentwickelten Form des Integrales dadurch angedeutet, daß man den größern Grenzwerth X oben, den kleineren x_0 unter dem Integralzeichen $\int$ beisetzt, und demgemäß das bestimmte Integral der Functionen:

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad f'(x)$$

durch die Bezeichnung

$$\varDelta x \int_{x_0}^{X} \frac{dy}{dx} \quad , \quad \varDelta x \int_{x_0}^{X} f'(x)$$

andeutet. Bisweilen werde ich selbst diese Grenzwerthe dem Zeichen $\varDelta$ des unbestimmten Integrales beifügen, namentlich in solchen Fällen, wo die den Grenzen entsprechenden Werthen der hinter dem Zeichen folgengen Größe oder Function nicht unmittelbar oder auf eine einfache Weise angegeben werden können. So wird das bestimmte Integral der Function:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx}$$

zwischen den Grenzen X und x_0 der unabhängigen Veränderlichen x am einfachsten durch

$$\varDelta x \int_{x_0}^{X} \frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx} = \overset{X}{\underset{x_0}{\varDelta_x}} . \frac{dy}{dx}$$

angedeutet, indem man noch der größern Bestimmtheit wegen durch den Index x an dem Zeichen $\varDelta$ die unabhängige Veränderliche bezeichnet, auf welche sich die Grenzwerthe X und x_0 beziehen. Ebenso wird man

$$\varDelta x \int_{x_0}^{X} \frac{dy}{dx} = \overset{X}{\underset{x_0}{\varDelta_x}} . y \quad , \quad \varDelta x \int_{x_0}^{X} f'(x) = \overset{X}{\underset{x_0}{\varDelta}} . f(x)$$

schreiben, da in der letztern Form der Index x entbehrlich wird, während in der erstern ohne denselben leicht eine Irrung entstehen kann, wenn die Grenzen nicht wie oben durch gleichlautende Buchstaben mit

der unabhängigen Veränderlichen bezeichnet sind, sondern auf andere Weise, durch die ersten Buchstaben des Alphabets oder durch Zahlen, u. s. f., ausgedrückt erscheinen. Setzt man z. B.

$$\Delta x = b - a\,,$$

so hat man wie leicht zu sehen, die ganz bestimmten Ausdrücke:

$$\Delta x \int_a^b \frac{dy}{dx} = \overset{b}{\underset{a}{\Delta_x}} y\,, \quad \Delta x \int_a^b f'(x) = \overset{b}{\underset{a}{\Delta}} f(x).$$

Man kann nun auch umgekehrt wieder eine dieser Grenzen der unabhängigen Veränderlichen als unbestimmt oder veränderlich annehmen und sie demnach mit der Veränderlichen selbst bezeichnen; man erhält dadurch für das allgemeine Integral die unentwickelten Formen:

$$\Delta x \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{dx} = \overset{x}{\underset{x_0}{\Delta}} y\,, \quad \Delta x \int_{x_0}^{x} f'(x) = \overset{x}{\underset{x_0}{\Delta}} f(x)\,,$$

welche durch weitere Ausführung auf die frühern zurückkommen.

Die bisher vorgeführten Formen zeigen, daß bei dem unentwickelten Integral dem Zeichen $\int$ immer die Aenderung der unabhängigen Veränderlichen als Factor vorhergeht, welcher beim entwickelten Integral, das denselben Factor zum Divisor hat, verschwindet. Man könnte deßhalb diesen Factor auch beim unentwickelten Integral entbehrlich finden, wenn derselbe nicht außerdem einen wichtigen Dienst zu leisten hätte, nämlich: die Veränderliche anzudeuten, welche als unabhängige genommen werden soll, und auf welche sich die an dem Zeichen $\int$ angeschriebenen Grenzwerthe beziehen, weßhalb derselbe nicht so geradezu beseitigt werden darf. Auf der andern Seite ist nicht zu verkennen, daß dieser Factor vor dem Integralzeichen trennend zwischen das Integral und seine Coeffizienten oder constante Factoren tritt, und namentlich bei den vielfachen Integralien unbequem wird, da man ihn hier nicht, wie bei den einfachen zur Noth geschehen könnte, hinter das Integral setzen kann, ohne Klammern anzuwenden und ihn zu weit von dem ihm zugehörenden Zeichen $\int$ zu trennen. Es dürfte daher das Zweckmäßigste sein, diesen Factor Δx in die Formgröße dx zu verwandeln und diese als bloßes Zeichen zur Andeutung der unabhängigen Veränderlichen unmittelbar hinter das

Integralzeichen $\int$ zu setzen, so daß nun die Grenzwerthe gleichzeitig an dem Zeichen $\int$ und über dem Zeichen dx angeschrieben werden, also nahe so wie es bei der bisherigen Art der Bezeichnung bei vielfachen Integralien gehalten wird, mit dem Unterschiede jedoch, daß nach unserer Bezeichnung

$$\int dx. \quad \text{oder} \quad \int_a^b dx.$$

zusammen ein einziges Zeichen, und zwar das vollständige Zeichen der unbestimmten oder bestimmten Integration vorstellt. Auf diese Weise erhalten wir also für das unbestimmte Integral der Gleichung (a) die unentwickelte Form:

$$\int dx.\frac{dy}{dx} = \varDelta y = \int dx.f'(x) = \varDelta f(x);$$

für das bestimmte dagegen die Ausdrücke:

$$\int_{x_0}^{X} dx.\frac{dy}{dx} = \overset{X}{\underset{x_0}{\varDelta}}{}_x y = \int_{x_0}^{X} dx.f'(x) = \overset{X}{\underset{x_0}{\varDelta}} f(x),$$

welche in das allgemeine Integral übergehen, wenn man statt der bestimmten Grenze X die Veränderliche x selbst einführt.

In vielen Fällen wird die Integration erleichtert, wenn man die unabhängige Veränderliche vertauscht, indem man dieselbe als eine Function einer andern Veränderlichen ausdrückt, welche statt ihrer als unabhängige genommen wird. Für die Function:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

erhält man auf diese Weise, indem man $x = \varphi(z)$ setzt,

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dz} = f'(x)\frac{dx}{dz} = f'(x)\,\varphi'(z),$$

und demnach als bestimmtes Integral zwischen den Grenzen Z und z_0 von z, denen die Werthe Y und y_0 der Veränderlichen y entsprechen, den Ausdruck:

$$Y - y_0 = \int_{z_0}^{Z} dz.f'(x)\frac{dx}{dz} = \int_{z_0}^{Z} dz.f'(x)\,\varphi'(z).$$

Setzt man dagegen, was selbst das gewöhnlichere ist, $\psi(x) = z$, so wird

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{\psi'(x)}$$

und man hat dann:

$$Y - y_0 = \int_{z_0}^{Z} dz \, . \, f'(x) \frac{dx}{dz} = \int_{z_0}^{Z} dz \, . \frac{f'(x)}{\psi'(x)},$$

worin zur weiteren Ausführung noch x durch z ausgedrückt werden muß. Diese Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen wendet man gewöhnlich bei einfachen Differentialquotienten an, und erhält auf diese Weise für

$$\int_{x_0}^{X} dx \, . \frac{dy}{dx} = \overset{X}{\underset{x_0}{\Delta_x}} y$$

nun auch die Bezeichnung:

$$\int_{y_0}^{Y} dy \, . \frac{dy}{dx} \, . \frac{dx}{dy} = \int_{y_0}^{Y} dy \, . \, 1 = \overset{Y}{\underset{y_0}{\Delta}} y = Y - y_0,$$

worin Y und y_0 immer die den Grenzen X und x_0 der früheren unabhängigen Veränderlichen entsprechenden Werthe von y sind.

§. 42.

Nach dem gewöhnlichen Begriffe, welchen man mit einem Integral zu verbinden pflegt, ist dieses eine Summe von unendlich vielen unendlich kleinen Gliedern oder doch die sogenannte Grenze einer Summe von solchen Gliedern, und es ist natürlich, daß man nach dieser Vorstellungsweise Zweifel über die Richtigkeit eines bestimmten Integrals hegen mußte, dessen gegebener Differentialquotient zwischen den Grenzen desselben durch den Werth: Unendlich geht, von dem Falle gar nicht zu reden, wo diese Function zwischen denselben Grenzen imaginär wird. Diese Zweifel wurden dann noch bestärkt durch eine zweite unglückliche Vorstellungsweise, nach welcher man sich jedes Integral als das Maaß einer Oberfläche oder eines Volumens denkt, nach welcher man also mit demselben gerade solche Begriffe verbindet, denen die allen unbenannten und den meisten benannten Größen zukommende Eigenschaft: entgegengesetzte Werthe annehmen zu können, fehlt, die also durchaus unfähig sind, als allgemeine Vertreter für alle Functionen zu dienen, namentlich für solche, deren Werth bald zu- bald

abnimmt, während die Veränderliche immer wächst. Nach dem Begriffe dagegen, welcher der vorhergehenden Darstellung und Ableitung zufolge mit einem Integral zu verbinden ist, drückt dieses einfach den Unterschied zweier Werthe einer Function aus, deren Aenderungsgesetz gegeben war, und es ist für diesen Unterschied ganz gleichgültig, durch welche Werthe jene Function gegangen ist, da derselbe blos von den beiden Grenzwerthen und nicht von den dazwischenliegenden abhängen kann, diese mögen *unendlich* oder auch *imaginär* gewesen sein *). Es ist also gar kein Grund vorhanden, an der Richtigkeit eines Integrals zu zweifeln, wenn das Aenderungsgesetz oder die ursprüngliche Function selbst zwischen den Grenzwerthen unendlich oder imaginär geworden ist, und wenn *Cauchy* beweiset, oder doch zu beweisen glaubt, daß ein begrenztes Integral, welches zwischen zwei Grenzwerthen durch den Werth: Unendlich gegangen ist, keinen bestimmten Werth habe, so zeigt dieses nur, wie der bisherige Begriff von den Integralen, von den *unendlich kleinen* oder *verschwindenden Größen* und den sogenannten *Grenzen* irre führen kann. Denn abgesehen davon, daß

---

*) Es dürfte in dieser Beziehung nothwendig werden, zwischen *analytischer* und *geometrischer Stetigkeit* zu unterscheiden. Die letztere wird dann etwa dem bisherigen Begriffe der Stetigkeit entsprechen, und eine Function demnach so lange *geometrische* Stetigkeit besitzen, als sie für stetig wachsende Werthe der unabhängigen Veränderlichen *reelle* Werthe erhält; dabei dürfte aber der Durchgang durch den Werth: Unendlich ebensowenig als der durch den Werth: Null als eine Unterbrechung der geometrischen Stetigkeit anzusehen sein. Die *analytische Stetigkeit* dagegen wird nur darin bestehen, daß der Größe, von welcher der Werth einer Function abhängt, nicht blos *einzelne bestimmte* Werthe beigelegt werden, wie in der niedern Analysis, sondern daß sie als eine durch *alle mögliche* Werthe wachsende *Veränderliche* zu betrachten ist, und daß in Folge dessen auch jede Function derselben eine bestimmte Reihe in einander übergehender Werthe erhält. Bei dieser analytischen Stetigkeit wird es also niemals *Unterbrechung* geben, da hier die *imaginären* Werthe der Function ebenso allen allgemeinen analytischen Bedingungen und Operationen Genüge leisten, wie die *reellen Werthe*, gerade so wie die *imaginären* Wurzeln einer Gleichung alle allgemeine Eigenschaften mit den *reellen* theilen. Die *imaginären Werthe* einer Function können demnach als die *analytischen* Stege zur Ueberschreitung der *Lücken* in der *geometrischen* Stetigkeit angesehen werden. Eine *natürliche, ungezwungene, geometrische* Vorstellung habe ich trotz aller Mühe mit *imaginären* Werthen nicht zu verbinden vermocht.

$$\int dx \,.\, \frac{1}{x} = \varDelta \,.\, \frac{1}{2} \operatorname{logn.} x^2 ,$$

welches auch Cauchy zu Grunde legt, daß diese Function für jedes negative x denselben Werth gibt, wie für ein gleiches positives, daß also der Unterschied zweier solcher Werthe Null sein muß, d. h. daß man immer hat

$$\int_{-a}^{+a} dx \,.\, \frac{1}{x} = 0 ,$$

welches auch der Werth von a sein mag. Dieser Schluß wird auf einen Blick einleuchtend, wenn man die Function: $\frac{a}{x}$ als Aenderungsgesetz der Coordinaten einer Curve annimmt, deren Gleichung das allgemeine Integral jener Function ist, nämlich:

$$y - y_0 = \frac{1}{2} a \operatorname{logn} \frac{x^2}{x_0^2} ,$$

die also eine doppelte logarithmische Curve, Fig. 19, zu beiden Seiten der Achse der y bildet.

Stellt man sich dagegen dieselbe Function: $\frac{a^2}{x}$ als Aenderungsgesetz der Oberfläche der Curve vor, deren Gleichung: $yx = a^2$, die also eine gleichseitige Hyperbel ist, so hat man natürlich auch

$$\underset{-b}{\overset{+b}{\varDelta_x}} O = a^2 \int_{-b}^{+b} dx \,.\, \frac{1}{x} = 0 ,$$

was mit unserer Vorstellung von Oberfläche nicht übereinstimmt, da sich Oberfläche und Oberfläche nicht aufheben oder vermindern kann. Man hat daher in diesem Falle

$$\underset{-b}{\overset{+b}{\varDelta_x}} O = a^2 \int_{0}^{b} dx \,.\, \frac{1}{x} + a^2 \int_{0}^{-b} dx \,.\, \frac{1}{x} = 2 a^2 . \infty$$

zu nehmen. Diese letztere Beachtung hat aber auch in dem Falle Platz zu greifen, wenn das Aenderungsgesetz beim Durchgange durch den Werth: Null das Zeichen wechselt. Für die Oberfläche z. B. zwischen der Geraden, deren Gleichung:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} - 1$$

ist, und der Abscissenachse, hat man zwischen den Grenzen $X = 2a$ und $x_0 = 0$, den unrichtigen Werth:

$$\overset{2a}{\underset{0}{\Delta_x}} O = \int_0^{2a} dx . b\left(\frac{x}{a} - 1\right) = \overset{2a}{\underset{0}{\Delta}} . b\left(\frac{x^2}{2a} - x\right) = 0 ;$$

dagegen hat man ganz richtig:

$$\overset{2a}{\underset{a}{\Delta_x}} O = \int_a^{2a} dx . b\left(\frac{x}{a} - 1\right) = \overset{2a}{\underset{a}{\Delta}} . b\left(\frac{x^2}{2a} - x\right) = \frac{1}{2} ab ,$$

und aus demselben Grunde wie oben

$$\overset{2a}{\underset{0}{\Delta_x}} O = \int_a^{2a} dx . b\left(\frac{x}{a} - 1\right) + \int_a^{0} dx . b\left(\frac{x}{a} - 1\right) = ab .$$

Ein bemerkenswerthes Beispiel bietet in dieser Hinsicht noch die Function:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A}{(a-x)^2}$$

dar, worin A eine constante Größe ist; denn man sieht, daß dieses Änderungsgesetz für alle Werthe von x positiv bleibt, woraus man nach der gewöhnlichen Vorstellung von einem Integral schließen müßte, daß das Integral jener Function zwischen Null und irgend einem positiven Werthe von x immer einen positiven Werth, zwischen Null und einem negativen x einen negativen Werth geben muß. Das unbestimmte Integral:

$$\Delta y = \int dx . \frac{A}{(a - x)^2} = \Delta . \frac{A}{a-x}$$

jener Function zeigt indessen, daß der Werth der ursprünglichen Function von $x = -\infty$ bis $x = 0$ um $\frac{A}{a}$ wächst, daß derselbe für $x = a$ unendlich, und für $x > a$ negativ wird, und für $x = 2a$ den Werth: $-\frac{A}{a}$ erhält, u. s. f., wie dies in der Natur der Sache liegt, und durch die Curve Fig. 20 dargestellt wird, deren Gleichung

$$y - y_0 = \frac{b^2}{a-x}$$

die obige Function als Aenderungsgesetz der Coordinaten gibt. Denn eine Größe, welche fortwährend wachsen soll, und zwar so, daß sie für einen bestimmten Werth der unabhängigen Veränderlichen schon unendlich wird, muß hier gleichzeitig mit dem Werthe: Negativ unendlich wieder anfangen, um noch ferner wachsen zu können, also von da an negative Werthe erhalten. Wollte man sich daher die gegebene Function als Aenderungsgesetz der Oberfläche der Curve Fig. 21 denken, so könnte die Integration zwischen Grenzen, die zu beiden Seiten des Werthes $x = a$ liegen, keinen richtigen oder passenden Werth geben, und man müßte wieder

$$\overset{2a}{\underset{0}{\Delta_x}} O = \int_{2a}^{a} dx . \frac{b^3}{(a-x)^2} + \int_{0}^{a} dx . \frac{b^3}{(a-x)^2}$$

nehmen, um einen dem Begriffe: Oberfläche entsprechenden Werth zu erhalten.

Endlich will ich noch bemerken, daß das Integral:

$$\overset{+X}{\underset{-X}{\Delta_x}} O = \int_{-X}^{+X} dx . \frac{2b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$= \overset{+X}{\underset{-X}{\Delta}} . \frac{b}{a} x \sqrt{x^2 - a^2} - \overset{+X}{\underset{-X}{\Delta}} . \frac{1}{2} ab \operatorname{logn.} \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)^2$$

welches die von den beiden Zweigen der Hyperbel begrenzte Oberfläche ausdrückt, den ganz richtigen Werth:

$$O = \frac{2b}{a} X \sqrt{X^2 - a^2} - ab \operatorname{logn.} \left(\frac{X + \sqrt{X^2 - a^2}}{a}\right)^2$$

gibt, ohngeachtet das Aenderungsgesetz zwischen $x = a$ und $x = -a$ imaginär ist *), also gerade so, als wenn sich die beiden Curvenzweige

*) Nach der gewöhnlichen Ansicht könnte man hier einwenden, daß sich die in gleichen Abständen vom Anfangspunkte liegenden imaginären Elemente bei der Summation aufheben; das Ergebniß ist aber auch dann noch richtig, wenn man den Anfangspunkt in einen der beiden Scheitel verlegt, und das Integral:

$$\int dx . \frac{2b}{a} \sqrt{x^2 - 2ax}$$

zwischen den Grenzen $X > 2a$ und 0 nimmt.

mit ihren Scheiteln berührten, und wir finden hier keine negative Oberfläche, weil das Aenderungsgesetz beim Uebergang von den positiven x zu den negativen, wobei es den Werth: Null erhält, das Zeichen nicht ändert. Dies zeigt sich besonders deutlich, wenn man in den vorhergehenden Ausdrücken a gleich Null setzt, ohne jedoch den Coeffizienten $\frac{b}{a}$ zu ändern; man erhält so

$$\overset{+X}{\underset{-X}{\Delta_x}} O = \int_{-X}^{+X} dx.\frac{b}{a}\sqrt{x^2} = \overset{+X}{\underset{-X}{\Delta}}.\frac{b}{2a}x\sqrt{x^2} = \frac{b}{a}X^2,$$

und dieser Ausdruck ist der richtige Werth der von der gebrochenen Linie CAB Fig. 22 und der Achse der x begrenzten Fläche, denn die Gleichung dieser Curve ist offenbar:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2};$$

das Aenderungsgesetz des Flächeninhaltes ändert also das Zeichen nicht, wenn es durch den Werth: Null geht.*)

Diese Beispiele mögen genügen, die vorhergehenden Bemerkungen zu unterstützen und zu zeigen, daß man in solchen Fällen, wo das Aenderungsgesetz einer Function beim Durchgang durch den Werth: Null oder Unendlich das Zeichen ändert, oder wo es mit der Function selbst durch den Werth: Unendlich geht, ohne das Zeichen zu wechseln, für das bestimmte Integral, dessen Grenzen zu beiden Seiten dieser Werthe liegen, darauf Rücksicht zu nehmen hat, ob die betreffende Größe ihrem Begriffe nach entgegengesetzte Werthe erhalten kann oder nicht; im ersten Falle wird das Integral immer einen richtigen Werth geben; im zweiten muß man dasselbe in zwei Theile zerlegen, deren gemeinschaftliche Grenze da ist, wo das Aenderungsgesetz Null oder unendlich wird, und dann ohne Rücksicht auf die Lage der Grenzen den Werth von jedem Theile berechnen und deren Summe nehmen. Die Ursache ist leicht

---

*) Denkt man sich die Function $\frac{b}{a^2}\sqrt{x^2}$ als Aenderungsgesetz der Coordinaten einer ebenen Curve, so findet man für diese die Gleichung:

$$y = \frac{b}{2a^2}x\sqrt{x^2};$$

sie besteht demnach aus den beiden gegenüberstehenden Aesten zweier Parabeln Fig. 22a, welche sich mit ihren Scheiteln berühren.

einzusehen und für den zweiten Fall schon angedeutet worden. Wenn ferner das Aenderungsgesetz einer Function durch den Werth 0 oder ∞ gegangen ist und das Zeichen gewechselt hat, so hatte die Function dort einen größten oder kleinsten Werth und ist nun im Abnehmen begriffen, während sie früher im Zunehmen war oder umgekehrt. Ein solcher Wechsel ist aber im Wachsthum einer Größe, die keine entgegengesetzten Werthe annehmen kann, wie Oberfläche, Volumen, Masse, Gewicht, u. s. w. nicht denkbar; denn diese müssen dem Begriffe nach fortwährend mit der Veränderlichen wachsen oder abnehmen.

Während man nun in dem ebenbesprochenen Falle Zweifel erhob, wo keine zu erheben waren, war man in der Anwendung einer andern Ableitungsmethode bestimmter Integralien — der Differentiation unter dem Zeichen $\int$ — weniger ängstlich, und ließ sich auch dadurch zu wesentlichen Irrthümern verleiten, wie ich bei der Lehre von der gegenseitigen Anziehung der Körper (II. Buch, I. Abschn. 6. Kapitel) zeigen werde, da hier eine nähere Erörterung zu weit führen würde. Aus demselben Grunde muß es dem Leser überlassen werden, die im Vorhergehenden dargestellte einfache und natürliche Anschauungsweise auf höhere und vielfache Integrale und auf die Integration der Differentialgleichungen auszudehnen.

§. 43.

Bisher wurden die Gesetze der Coordinatenänderung immer in einer bestimmten Richtung und für eine bestimmte krumme Linie untersucht. Es gibt jedoch auch Fälle, wo man bei der Veränderung der Lage eines Punktes an keine bestimmte Richtung denkt, oder wo man mehrere Curven, die derselbe beschreiben könnte, unter sich vergleichen will, wo man also die Gesetze der Coordinatenänderung nicht nur in derselben Curve, sondern auch von einer Curve zur andern kennen und ausdrücken muß. Diese letztern Aenderungsgesetze unterscheidet man dann in der allgemeinen Bezeichnung von den frühern durch das sogenannte Variationszeichen δ statt des Differentiationszeichens d, indem man δx, δy, δs, etc. Variationen von x, y, s, etc., nennt; sie sind wie die Differentiale bloße Formgrößen ohne denkbaren Werth.

Verrückt man z. B. einen Punkt im Raume oder auf einer Fläche, dessen ursprüngliche Lage durch die Coordinaten x, y, z bestimmt ist, in irgend einer beliebigen Richtung in einer geraden oder krummen Linie so, daß er den kleinen Weg Δs zurücklegt, und drückt die Projection dieses Weges auf die Coordinatenachsen durch Δx, Δy. Δz aus, so erhält man die willkürlichen Verhältnisse:

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s},$$

deren Anfangswerthe nun durch

$$\frac{\delta x}{\delta s}, \quad \frac{\delta y}{\delta s}, \quad \frac{\delta z}{\delta s}$$

bezeichnet werden, und ebenfalls willkürliche Größen sind, die indessen, wie wir später sehen werden, bei allgemeinen Betrachtungen über die mögliche Aenderung in der Lage eines materiellen Punktes ihre Anwendung finden.

Denkt man sich ferner im Raume oder auf einer Fläche beliebig viele Curven gezogen, und stellt sich vor, es gehe eine derselben durch stetige Verwandlung in die andere über, so wird man auch eine stetige Aenderung der Coordinaten und der Aenderungsgesetze der Coordinaten von einer Curve zur andern annehmen müssen. Die Gleichungen dieser Curve enthalten dann außer den veränderlichen Coordinaten x, y, z noch eine oder mehrere andere Größen, welche für jede einzelne derselben constant sind, die aber bei dem Uebergange von einer Curve zur andern veränderlich werden. Die Coordinaten selbst erscheinen für diesen Uebergang als willkürliche Functionen dieser neuen Veränderlichen, oder doch von einer derselben, von welcher die übrigen, wenn sie nicht ganz willkürlich bleiben, durch gegebene Bedingungen abhängig gemacht werden.

Bezeichnet man demnach die neue Veränderliche, von der alle übrigen abhängen oder als abhängig gedacht sind, und die für jede einzelne der verschiedenen Curven constant ist, mit k, so nehmen die Gleichungen einer derselben die Formen an:

$$y = f_1(x, k) \quad , \quad z = f_2(x, k) ,$$

und es ist einleuchtend, daß der Uebergang von einem Punkte dieser Curve zu einem Punkte der folgenden durch die beiden willkürlichen Veränderungen Δx und Δk bedingt ist, von denen die erste die Aenderung in der Lage eines Punktes in Bezug auf die Ebene der yz, die zweite die Aenderung in der Form der Curve, welcher er angehören soll, ausdrückt; die beiden vorhergehenden Gleichungen sind also wie die Gleichungen einer Fläche Gleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen und geben wie diese die vollständigen Aenderungs- oder Uebergangsgesetze:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial.y}{\partial k} &= \frac{\partial f_1}{\partial k} + \frac{d f_1}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial k} = \frac{\partial y}{\partial k} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial k} \\ \frac{\partial.z}{\partial k} &= \frac{\partial f_2}{\partial k} + \frac{d f_2}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial k} = \frac{\partial z}{\partial k} + \frac{dz}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial k}\end{aligned}\right\},$$

welche jedoch für Curven im Raume ganz unabhängig und willkürlich bleiben, wenn auch das Aenderungsgesetz $\frac{\partial x}{\partial k}$ gegeben oder als gegeben angenommen wird, weil dasselbe nicht, wie das Aenderungsgesetz $\frac{dy}{dx}$ bei den Flächen, eine ganz bestimmte Richtung für den Uebergang vorzeichnet. Diese Unabhängigkeit findet demnach auch dann noch statt, wenn der Uebergang von einer Curve zur andern in einer zur Ebene der xy parallelen Ebene erfolgt, oder wenn die x während des Ueberganges unverändert bleiben, und die vorhergehenden Uebergangsgesetze auf die ersten Glieder:

$$\frac{\partial.f_1}{\partial k} \text{ oder } \frac{\partial y}{\partial k}, \quad \frac{\partial.f_2}{\partial k} \text{ oder } \frac{\partial z}{\partial k}$$

zurückkommen. — Soll man aber von einer Curve zu einer andern übergehen, welche mit ihr derselben Fläche angehört, so werden diese Uebergangsgesetze nicht mehr unabhängig sein, sondern gemäß des Aenderungsgesetzes der Coordinaten der Fläche in gegenseitiger Beziehung stehen; denn man muß dann immer im Allgemeinen der Gleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial k} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial k} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{\partial y}{\partial k} = p\,\frac{\partial x}{\partial k} + q\,\frac{\partial y}{\partial k}$$

oder wenn man den Uebergang parallel zur Ebene der yz nimmt, der einfachen Gleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial k} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{\partial y}{\partial k} = q\,\frac{\partial y}{\partial k}$$

Genüge leisten.

Bei dem Uebergange von einer Curve zu einer andern, ändern sich aber nicht nur die gegenseitigen Beziehungen der Coordinaten und Constanten, sondern auch die Gesetze der Coordinatenänderung, welche längs derselben Curve stattfindet, und man erhält in dieser Hinsicht die Uebergangsgesetze der Coordinatenänderung:

$$\frac{\partial.\frac{dy}{dx}}{\partial k} \text{ und } \frac{\partial.\frac{dz}{dx}}{\partial k},$$

in welchen x wieder constant zu nehmen ist, wenn der Uebergang parallel zur Ebene der yz geschehen soll. Auf der andern Seite werden aber auch die Gesetze für den zur Ebene der yz parallelen Uebergang sich ändern, wenn man von einem Punkte zu einem andern in derselben Curve fortgeht, und die Gesetze dieser Aenderung der Uebergangsgesetze für den ersten Punkt sind offenbar:

$$\frac{d.\frac{\delta y}{\delta k}}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{d.\frac{\delta z}{\delta k}}{dx},$$

und es ist nach den für die Aenderung der Coordinaten einer Fläche abgeleiteten Gesetzen nicht schwer sich zu überzeugen, daß die Gesetze für die Aenderung der Uebergangsgesetze dieselben sein müssen, wie die Uebergangsgesetze der Coordinatenänderung, daß man also die Gleichungen hat:

$$\frac{d.\frac{\delta y}{\delta k}}{dx} = \frac{\delta.\frac{dy}{dx}}{\delta k}, \quad \frac{d.\frac{\delta z}{\delta k}}{dx} = \frac{\delta.\frac{dz}{dx}}{\delta k},$$

worin k und x zwei unabhängige Veränderliche sind, erstere für den Uebergang von einer Curve zur andern, letztere für den Fortgang in derselben Curve. Ferner hat man auch durch Integration zwischen den Grenzen X und x_0 von x

$$\int_{x_0}^{X} dx.\frac{d.\frac{\delta y}{\delta k}}{dx} = \overset{X}{\underset{x_0}{\Delta_x}}.\frac{\delta y}{\delta k} = \int_{x_0}^{X} dx.\frac{\delta.\frac{dy}{dx}}{\delta k} = \frac{\delta.\int_{x_0}^{X} dx.\frac{dy}{dx}}{\delta k},$$

wobei jedoch zu beachten ist, daß die Grenzen X und x_0 von x durchaus unabhängig bleiben müssen von der Größe k, und es wird nicht schwer sein, diese Gleichheiten auch auf die höhern Gesetze der Coordinatenänderung auszudehnen.

§. 44.

Eine einfache und bemerkenswerthe Anwendung des Vorhergehenden bietet die Untersuchung der einhüllenden Curven und Flächen, wobei ich mich indessen auf die einfache Aufgabe beschränken muß, die Gleichung derjenigen Curve zu suchen, welche eine ebene veränderliche Curve in allen ihren Lagen und Formen berührt oder welche diese veränderliche Curve in allen Lagen einhüllt.

Sei $f(x, y, k)$ die Gleichung der veränderlichen Curve, und k diejenige Größe — Parameter — durch deren stetige Aenderung die Curve allmählig andere Formen annimmt; $F(x_{,}, y_{,}) = 0$ sei die zu suchende Gleichung der einhüllenden oder berührenden Curve. Die erste Gleichung gibt für das Fortgehen von einem Punkte xy zu einem folgenden in derselben Curve das Aenderungsgesetz:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

weil da k unveränderlich ist; die zweite Gleichung gibt ebenso

$$\frac{dF}{dx_{,}} + \frac{dF}{dy_{,}} \cdot \frac{dy_{,}}{dx_{,}} = 0,$$

und mit den Bedingungen der Berührung:

$$x = x_{,}, \quad \frac{df}{dx} = \frac{dF}{dx_{,}}, \quad \frac{df}{dy} = \frac{dF}{dy_{,}}, \quad y = y_{,}$$

schließt man daraus die nur $x_{,}$ und $y_{,}$ enthaltende Gleichung:

b.) $$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy_{,}}{dx_{,}} = 0.$$

Geht man aber von dem Berührungspunkte $x_{,}y_{,}$ der veränderlichen Curve zu dem Berührungspunkte in einer folgenden Lage über, so wird k veränderlich und $x_{,}$, $y_{,}$ sind als Functionen von k zu betrachten; das Aenderungsgesetz wird demnach:

$$\frac{df}{dx} \cdot \frac{\partial x_{,}}{\partial k} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{\partial y_{,}}{\partial k} + \frac{\partial f}{\partial k} = 0,$$

oder in einer andern Form, in welcher $y_{,}$ und k Functionen von $x_{,}$ werden:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{\partial y_{,}}{\partial x_{,}} + \frac{\partial f}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_{,}} = 0.$$

Die Bedingungsgleichung (b) für die Berührung im Punkte $x_{,}y_{,}$ fordert aber schon, daß die Summe der beiden ersten Glieder dieser Gleichung Null wird; wir erhalten also als Bedingung für die Berührung in einer der folgenden Lagen der veränderlichen Curve die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_{,}} = 0,$$

und demnach entweder $\frac{\partial k}{\partial x_{,}} = 0$, wodurch k und die veränderliche Curve

unveränderlich werden, die letztere also sich selbst einhüllt, oder da dieses hier gegen die Voraussetzung ist,

$$\frac{\partial f}{\partial k} = 0 .$$

Diese letztere Gleichung drückt mithin die Beziehung aus, welche zwischen den Coordinaten eines Punktes x, y, der veränderlichen Curve und der Größe k stattfinden muß, damit dieser Punkt ein Berührungspunkt für die Curve $F(x_{,}, y_{,}) = 0$ sein kann. Eliminirt man daher die Größe k mittels der vorhergehenden Bedingungsgleichung $\frac{\partial f}{\partial k} = 0$ aus der Gleichung $f(x, y, k) = 0$ der gegebenen veränderlichen Curve, nachdem man in dieser $x_{,}$ und $y_{,}$ für x und y gesetzt hat, so erhält man eine von k unabhängige, also für alle Lagen und Formen der veränderlichen Curve geltende Beziehung zwischen den Coordinaten $x_{,}, y_{,}$ der Berührungspunkte, und diese Beziehung wird eben die Gleichung der einhüllenden Curve sein, oder mit andern Worten: die gesuchte Gleichung $F(x_{,}, y_{,}) = 0$ der einhüllenden Curve ist das Ergebniß der Elimination von k aus der Gleichung $f(x_{,}, y_{,}, k) = 0$ und ihres Aenderungsgesetzes in Bezug auf k, nämlich: $f'_k(x_{,}, y_{,}, k) = 0$. So gibt die Gleichung der Parabel in Bezug auf die Achse und die Directrix und mit dem veränderlichen Parameter k, nämlich:

$$y^2 - 2kx + k^2 = 0 ,$$

in Bezug auf k das Aenderungsgesetz:

$$x_{,} - k = 0 ,$$

und die Elimination von k führt auf die Gleichung:

$$y_{,}^2 - x_{,}^2 = 0 ,$$

welche, wie leicht zu sehen, zwei sich rechtwinklig schneidenden Geraden angehört, die durch den Anfangspunkt gehen und alle aus der obigen Gleichung durch Aenderung des Werthes von k entstehenden Parabeln in den Endpunkten der Parameter berühren.

§. 45.

Als fernere Anwendung der Uebergangsgesetze werde noch die am Ende des §. 39 ausgesprochene Behauptung bewiesen: daß der durch zwei Punkte einer gegebenen Fläche begrenzte Bogen einer Krümmungscurve kleiner oder größer sei, als der durch dieselben Punkte begrenzte Bogen einer andern auf derselben Fläche gezogenen Curve.

Die Gleichung der gegebenen Fläche sei $z = F(x, y)$, und die Gleichungen irgend einer darauf gezogenen Curve:

$$y = f_1(x, k) \quad , \quad z = f_2(x, k) \; .$$

Man hat dann für die Länge l des Bogens dieser Curve zwischen zwei Punkten, deren Lage durch die Grenzwerthe X und x_0 von x bestimmt ist, den bekannten Ausdruck:

$$l = \int_{x_0}^{X} dx . \frac{ds}{dx} = \int_{x_0}^{X} dx . \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

und daher für den Uebergang von einer Curve zur andern in Bezug auf k das Aenderungsgesetz:

$$\frac{\delta l}{\delta k} = \frac{\delta . \int_{x_0}^{X} dx . \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\delta k} = \int_{x_0}^{X} dx . \frac{\delta . \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\delta k} ,$$

welches für einen größten oder kleinsten Werth von l unsern frühern Betrachtungen zufolge Null werden muß. Nun ist aber leicht zu finden, daß man hat:

$$\frac{\delta . \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\delta k} = \frac{\frac{dy}{dx} . \frac{\delta . \frac{dy}{dx}}{\delta k} + \frac{dz}{dx} . \frac{\delta . \frac{dz}{dx}}{\delta k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} ,$$

und wenn hier für die Wurzelgröße im Nenner der Werth: $\frac{ds}{dx}$ eingeführt, und die entsprechende Versetzung der Zeichen δ und d gemäß der in §. 43 erhaltenen Gleichungen vorgenommen wird, so ergibt sich mit der Berücksichtigung, daß

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{dy}{ds} \quad , \quad \frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{dz}{ds}$$

gesetzt werden kann, das Uebergangsgesetz $\frac{\delta l}{\delta k}$ in der einfachen Form:

$$\frac{\delta l}{\delta k} = \int_{x_0}^{X} dx . \left\{ \frac{dy}{ds} . \frac{d . \frac{\delta y}{\delta k}}{dx} + \frac{dz}{ds} . \frac{d . \frac{\delta z}{\delta k}}{dx} \right\} .$$

Integrirt man nun theilweise, so findet man den Ausdruck:

$$\frac{\delta l}{\delta k} = \overset{x}{\underset{x_0}{\Delta_x}} \left[\frac{dy}{ds}\frac{\delta y}{\delta k} + \frac{dz}{ds}\frac{\delta z}{\delta k} \right] - \int_{x_0}^{X} dx . \left\{ \frac{d . \frac{dy}{ds}}{dx} \frac{\delta y}{\delta k} + \frac{d . \frac{dz}{ds}}{dx} \frac{\delta z}{\delta k} \right\} ,$$

dessen erstes Glied auf der rechten Seite offenbar Null wird, weil alle Factoren desselben auf die beiden unveränderlichen und allen Curven gemeinschaftlichen Grenzpunkte bezogen werden müssen, und für diese die Uebergangsgesetze $\frac{\delta y}{\delta k}$ und $\frac{\delta z}{\delta k}$ den Werth: Null erhalten. Ferner gibt die Bedingung, daß alle Curven derselben Fläche angehören, wie schon erwähnt wurde, die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\delta z}{\delta k} = \frac{dz}{dy} . \frac{\delta y}{\delta k} = q \frac{\delta y}{\delta k}$$

wo $q = \frac{dz}{dy}$ das Aenderungsgesetz $F'_y(x, y)$ der Coordinaten der Fläche in einer zur Ebene der yz parallelen Richtung vorstellt. Damit erhält man also das Uebergangsgesetz:

$$\frac{\delta l}{\delta k} = - \int_{x_0}^{X} dx . \left\{ \frac{d . \frac{dy}{ds}}{dx} + q \frac{d . \frac{dz}{ds}}{dx} \right\} \frac{\delta y}{\delta k} ,$$

welches, wie leicht zu sehen ist, nur Null werden kann, wenn der unter dem Integralzeichen eingeklammerte Factor Null wird, da das Uebergangsgesetz $\frac{\delta y}{\delta k}$ unabhängig und willkürlich ist, und man findet sonach

$$\frac{d . \frac{dy}{ds}}{dx} + q \frac{d . \frac{dz}{ds}}{dx} = 0$$

als bezeichnende Gleichung für die Curve, deren Bogen zwischen zwei gegebenen Punkten einer Fläche ein kleinster oder größter ist unter den Curven, die auf dieser Fläche durch dieselben Punkte gezogen werden

können. Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit den in §. 39 erhaltenen bezeichnenden Gleichungen der Krümmungscurve zeigt dessen vollkommene Uebereinstimmung mit der zweiten der letztern Gleichungen, wenn man diese unter die Form:

$$\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds} + q\,\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds} = 0$$

bringt und sie dann durch $\frac{dx}{ds}$ dividirt, und man wird sich leicht überzeugen, daß man auf gleiche Weise die dritte jener Gleichungen der Krümmungscurve gefunden hätte, wenn die Uebergänge parallel zur Ebene der xy oder für ein unveränderliches z genommen worden wären, daß also, wie behauptet wurde, die Krümmungscurve eine kleinste oder größte Länge zwischen den gegebenen Punkten hat. —

§. 46.

Den Schluß dieser Einleitung bilde endlich die Erläuterung des Lehrsatzes von der Homogeneität oder Gleichartigkeit der Größen, dessen schon in §. 17 gedacht wurde, und welcher in der Folge uns noch wichtige Dienste leisten wird.

Es geht nämlich schon aus dem, was in dieser Einleitung angedeutet wurde, hervor, daß sich die Aufgaben der Mechanik mit sehr verschiedenartigen Größen zu befassen haben werden; denn es kommen in denselben außer denjenigen Größen, welche reine Zahlenverhältnisse darstellen, wie die Zahl π, die Winkelfunctionen, die Logarithmen, u. s. f., noch viele andere vor, welche zwar in den Gleichungen auch als Zahlen erscheinen, denen aber immer eine bestimmte, wenn auch willkürlich angenommene Einheit zu Grunde liegt, und deren Zahlenwerthe sich, bei sonst ungeänderter Größe, mit dieser Einheit und zwar im umgekehrten Verhältnisse ändern. Dahin gehören die Längen oder Entfernungen, Flächen, körperliche Räume, Massen, fördernde und drehende Kräfte, Geschwindigkeiten, Zeiten, u. s. w. Die Entfernung zweier gegebenen Punkte z. B. wird durch eine um so kleinere Zahl ausgedrückt werden, je größer die Längen-Einheit ist, auf die sie bezogen, mit welcher sie gemessen wird. — Ungeachtet dieser Veränderung nun, welche in jenen Zahlenwerthen vor sich geht, wenn eine oder mehrere jener Größen durch andere Einheiten gemessen werden, müssen die Gleichungen,

worin sie vorkommen, wahr bleiben; die Form dieser Gleichungen muß also gewissen Bedingungen Genüge leisten, welche man die Bedingungen der Homogeneität nennt.

Stellt nämlich der Ausdruck:

$$F(l, l' \dots f, f' \dots m, m' \dots v, v' \dots \text{etc.}) = 0$$

eine solche Gleichung vor, in welcher l und l' Längen, f, f' Kräfte, m, m' Massen, v, v' Geschwindigkeiten, u. s. f. ausdrücken, und man verkleinert nun die Einheit der Längen n mal, die der Kräfte n'mal, u. s. f., so werden die Zahlenwerthe aller Längen n mal, die aller Kräfte n'mal, u. s. w. größer werden, und demungeachtet muß man noch haben:

$$F(nl, nl \dots n'f, n'f' \dots n''m, n''m' \dots n''' v, n''' v' \dots \text{etc.}) = 0 .$$

Dies kann aber nur in zwei Fällen stattfinden; entweder müssen diese Coeffizienten n, n', etc. Factoren der ganzen Function werden, oder zu gleichen Potenzen erhoben, im Zähler und Nenner desselben Bruches erscheinen. Daraus ergeben sich folgende Bedingungen:

1) Eine Gleichung kann niemals eine Größe irgend einer Art allein enthalten; denn diese müßte Factor der ganzen Gleichung sein und könnte durch Division entfernt werden.

2) Wenn eine Gleichung nur zwei Größen derselben Art enthält und in Bezug auf eine derselben aufgelöset wird, so muß die andere Factor der zweiten Seite der Gleichung werden. Zieht man z. B. aus der obigen Gleichung den Werth von f', so muß man eine Gleichung von der Form:

$$f' = N . f$$

erhalten, in welcher der Coeffizient N nur eine von jeder Einheit unabhängige Zahl vorstellen kann, und deßhalb entweder aus absoluten Zahlenverhältnissen oder aus Quotienten gleicher Potenzen gleichartiger Größen oder aus einer Verbindung von diesen mit jenen bestehen muß, so daß man allgemein schreiben kann:

$$f' = f . \varphi \left(\frac{l}{l'}, \frac{m}{m'}, \frac{v}{v'}, \text{etc.}\right) .$$

3) Enthält die Gleichung dagegen drei oder mehrere Größen derselben Art und wird in Bezug auf eine derselbe aufgelöset, so kann man eine der übrigen auf der zweiten Seite der Gleichung als Factor vorsetzen, und dieser dieselbe Form geben wie vorher. Wären z. B. in

der obigen Gleichung drei Kräfte f, f′, f″ enthalten, so muß die Auflösung derselben in Bezug auf f″ den Ausdruck:

$$f'' = f \,.\, \varphi \left(\frac{f'}{f}, \frac{l}{l'}, \frac{m}{m'}, \frac{v}{v'}, \text{etc.}\right)$$

geben, in welchem der Werth der mit φ bezeichneten Function wieder von jeder willkürlichen Einheit unabhängig ist.

Von diesem allgemeinen Gesetze scheinen bisweilen Ausnahmen vorzukommen; man begegnet selbst sehr oft Gleichungen, welche den vorhergehenden Bedingungen nicht Genüge leisten. Bei näherer Betrachtung wird man aber finden, daß in solchen Gleichungen eine oder mehrere der den darin vorkommenden Größen zu Grunde gelegten Einheiten selbst enthalten sind, und daß sie homogen werden, wenn man diese Einheiten mit Buchstaben bezeichnet. So hat man für die Oberfläche O eines Rechtecks, dessen Seiten a und b sind, den Ausdruck:

$$O = ab$$

welcher nicht homogen scheint. Bezeichnet man aber die Längeneinheit mit λ, die Flächeneinheit mit ω, so wird dieser Ausdruck die homogene Form:

$$O = \omega \frac{ab}{\lambda^2}$$

erhalten; denn er folgt aus dem geometrischen Satze, daß die Oberflächen zweier Rechtecke in demselben Verhältnisse stehen, wie die Producte der Längenausmessungen zweier anliegenden Seiten, oder aus der Proportion:

$$O : O' = ab : a'b' \,,$$

in welcher man die Oberfläche O′ eines Quadrates, dessen beiden Seiten a′, b′ der Längeneinheit λ gleich sind, als Einheit ω für das Flächenmaaß annimmt.

Ebenso verhält es sich mit den Formeln für den Rauminhalt der Körper und mit vielen andern Ausdrücken, denen wir in der Folge begegnen werden; bei einigen derselben soll auf das Vorhergehende besonders aufmerksam gemacht, und ihre Homogeneität nachgewiesen werden.



Erstes Buch.

Mechanik des materiellen Punktes.

Erster Abschnitt.

Zusammensetzung und Zerlegung der fördernden Kräfte.

---

§. 1.

Die räumliche Ausdehnung eines Atoms oder materiellen Punktes liegt so weit über der Grenze unserer sinnlichen Wahrnehmung, daß wir in Wirklichkeit niemals im Stande sein werden, über den örtlichen Zustand, über Gleichgewicht oder Bewegung eines einzelnen Atoms zu urtheilen; in der Vorstellung aber können wir uns einen solchen materiellen Punkt, ebenso wie einen geometrischen, selbständig denken und sowohl die Bedingungen seines Gleichgewichtes als die Gesetze seiner Bewegung, welche offenbar nur als eine fortschreitende betrachtet werden kann, untersuchen. Diese Untersuchungen werden dann theils unmittelbare Anwendung finden in solchen Fällen, wo ein fester Körper entweder nur eine einfache fortschreitende Bewegung erhält, oder wo man von der drehenden Bewegung desselben gänzlich Umgang nimmt, wo also die fortschreitende Bewegung irgend eines seiner Punkte, in welchem man die Masse des ganzen Körpers vereinigt annehmen kann, zur Kenntniß seiner Bewegung hinreicht, theils werden sie uns zur Grundlage für die folgenden Untersuchungen der Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgesetze der verschiedenen Systeme von materiellen Punkten dienen, wie sich die Lehrsätze der Geometrie im Raume auf die in der Ebene stützen.

§. 2.

Eine Kraft, welche an einem einzelnen materiellen Punkte angreift, kann diesem, wie schon bemerkt, nur eine einfache fortschreitende

Bewegung ertheilen und demnach als eine fördernde Kraft bezeichnet werden, da hier von einer drehenden Wirkung keine Rede sein kann. Es können aber auch mehrere Kräfte, welche gleichzeitig auf denselben Punkt wirken, wie sie auch gerichtet sein mögen, diesem nur eine nach einer bestimmten Richtung fortschreitende Bewegung mittheilen oder mittheilen wollen, und es kann dann diese Bewegung, oder wenn sie verhindert wird, der entsprechende Druck auf das entgegenstehende Hinderniß immer als die Wirkung einer einzigen Kraft angesehen werden, deren Größe und Richtung natürlich von der Größe und Richtung der gegebenen Kräfte abhängt, und sich folglich auch aus diesen muß ableiten lassen; sie wird deßhalb Resultirende oder Mittelkraft der gegebenen Kräfte genannt, und das Verfahren, welches dahin zielt, ihre Größe und Richtung mittels derjenigen der gegebenen Kräfte zu berechnen, durch den Ausdruck bezeichnet: „die gegebenen Kräfte zu einer einzigen zusammensetzen."

Umgekehrt kann man auch die Wirkung einer einzigen Kraft als die Gesammtwirkung zweier oder mehrerer Kräfte ansehen, welche nach bestimmten Richtungen thätig sind, und die Intensitäten derselben gemäß ihrer zuvor bestimmten Richtungen aus der Intensität der gegebenen Kraft herleiten, oder man kann, wie man sich einfacher ausdrückt, „diese gegebene Kraft nach gegebenen Richtungen in zwei oder mehrere andere zerlegen," welche dann Componenten oder auch Seitenkräfte von jener genannt werden. Diese Zerlegung wird theils in solchen Fällen vorgenommen, wo man die Wirkung einer Kraft nach einer gegebenen Richtung sicher beurtheilen will, theils auch, wie wir bald sehen werden, um die Kenntniß der Gesammtwirkung mehrerer Kräfte durch eine vorhergehende Zerlegung einer jeden derselben nach zweckmäßigen Richtungen in zwei oder mehrere neue Kräfte, und durch eine stufenweise Zusammensetzung der letztern auf dem möglichst einfachen Wege zu erlangen.

Wir haben also vor Allem die Zusammensetzung und Zerlegung der fördernden Kräfte zu betrachten, d. h. das Verfahren, durch welches die Resultirende von beliebigen Kräften, die an demselben Punkte angreifen, gefunden werden kann, zu ermitteln, und überhaupt die wichtigsten Beziehungen kennen zu lernen, welche zwischen den fördernden Kräften und ihrer Resultirenden obwalten, wobei wir natürlich von jeder Veränderlichkeit dieser Kräfte Umgang nehmen, indem wir deren Wirkungen nur für einen bestimmten Augenblick betrachten, in welchem für eine jede sowohl ihre Intensität, als ihre Richtung nur eine einzige, bestimmte sein kann.

§. 3.

Nach der in der Einleitung (§. 14) gegebenen Erklärung von gleichen Kräften und von dem Maaß der Kräfte, nach welcher eine Kraft zwei Kraft-Einheiten gleich ist, wenn sie dieselbe Wirkung hervorbringt, wie zwei Kraft-Einheiten, die zusammen in demselben Sinne thätig sind, ist es einleuchtend, daß irgend zwei Kräfte, die in derselben Richtung und in demselben Sinne an einem materiellen Punkte angreifen, dasselbe leisten müssen, was eine bewirkt, welche ihrer Summe gleich ist, d. h. welche die Einheit der Kraft so vielmal enthält, als die beiden gegebenen Kräfte zusammen. Man hat daher in diesem Falle einfach

$$R = P + Q ,$$

wenn P und Q die Intensitäten der beiden ersten Kräfte, R die der letzten Kraft bezeichnet. Umgekehrt kann man sich auch eine Kraft R als die Summe zweier anderen denken, die in derselben Richtung und in demselben Sinne thätig sind.

Liegen die Richtungen der beiden Kräfte P und Q in derselben Geraden, ist dagegen der Sinn ihrer Wirkungen entgegengesetzt, so wird das Ergebniß dieser letztern als die Wirkung einer Kraft betrachtet werden können, deren Intensität der Differenz von P und Q gleich ist, so daß dann

$$R = P - Q \quad \text{oder} \quad = Q - P ,$$

je nachdem P oder Q die größere von beiden ist; der Sinn, in welchem R zu wirken strebt, wird jedenfalls mit dem der größern Kraft übereinkommen. Denn ist P die größere von beiden, so kann nach dem Vorhergehenden $P = Q + S$ gesetzt werden, und da sich P oder $Q + S$ und Q entgegenwirken, so werden die gleichen Kräfte ihre Wirkungen gegenseitig aufheben, und nur noch S oder $P - Q$ wirksam sein, und zwar in demselben Sinne wie P; es ist also die Resultirende R mit der Kraft S gleichbedeutend. Will man in diesem besondern Falle, wo die Richtungen der Kräfte in derselben Geraden liegen, welche die Achse der x vorstellen kann, die Zeichen der Richtungen auf die Kräfte selbst übertragen, und diese, welche im Allgemeinen absolute Zahlengrößen ohne Qualitätszeichen sind, als positive oder negative Größen nehmen, je nachdem sie nach der positiven oder nach der negativen Seite jener Achse wirken, d. h. je nachdem sie die Ordinate ihres Angriffspunktes zu vergrößern oder zu vermindern streben, so ist allgemein die Resultirende der algebraischen Summe der beiden Seitenkräfte

gleich, und wirkt in dem durch das Zeichen dieser Summe angedeuteten Sinne.

Es läßt sich damit leicht zeigen, daß auch die Mittelkraft von mehreren Kräften P_1, P_2, P_3, etc., welche in derselben Geraden und in demselben Sinne thätig sind, ihrer Summe gleich ist. Denn bezeichnet R_1 die Resultirende von P_1 und P_2, R_2 jene von R_1 und P_3, u. s. f. und R die Mittelkraft von allen oder von R_{n-2} und P_n, so hat man nach und nach

$$R_1 = P_1 + P_2$$
$$R_2 = R_1 + P_3 = P_1 + P_2 + P_3$$
$$\text{— — — — — — — — — — — — — —}$$
$$R_{n-2} = R_{n-3} + P_{n-1} = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots + P_{n-1}$$
$$R = R_{n-2} + P_n = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots + P_{n-1} + P_n$$

oder einfach

$$R = \Sigma . P ,$$

wenn man die vorstehende Summe durch das Zeichen Σ vor der allgemeinen Größe P ohne Index andeutet.

Wenn endlich eine beliebige Anzahl von Kräften P_1, P_2, P_3, etc., Q_1, Q_2, Q_3, etc. an demselben Punkte angreift, und in derselben Geraden, aber zum Theil in dem einen, zum Theil in entgegengesetztem Sinne thätig ist, nämlich die Kräfte P_1, P_2, etc. im positiven, die Kräfte Q_1, Q_2, etc. im negativen Sinne, und man bezeichnet dann die Summe aller Kräfte, welche in dem ersten Sinne wirken, d. i. ihre Resultirende, mit $\Sigma . P_1$, die Summe oder Resultirende aller in dem entgegengesetzten Sinne thätigen Kräfte mit $\Sigma . Q_1$, so wird offenbar

$$R = \Sigma . P_1 - \Sigma . Q_1 ,$$

d. h. die Resultirende ist gleich der Differenz zwischen der Summe aller in dem einen Sinne wirkenden und der Summe aller in dem entgegengesetzten Sinne thätigen Kräfte, und wirksam im Sinne der größern dieser beiden Summen. Man kann nun aber die Kräfte P als positive, die Kräfte Q als negative Größen nehmen und dann setzen

$$Q_1 = -P', \quad Q_2 = -P'', \quad \text{etc.}, \quad \Sigma . Q_1 = \Sigma . (-P') = -\Sigma . P',$$

wodurch

$$R = \Sigma . P_1 + \Sigma . P'$$

wird, oder einfacher

1.) $$R = \Sigma . P .$$

Mit Rücksicht auf die Qualitätszeichen der Kräfte ist mithin die Resultirende beliebig vieler in derselben Geraden wirkenden Kräfte ihrer algebraischen Summe gleich.

§. 4.

Wenn nun an demselben Punkte zwei Kräfte angreifen, deren Richtungen irgend einen Winkel unter sich einschließen, so ist es zuerst einleuchtend, daß die Richtung ihrer Mittelkraft in derselben Ebene liegen muß, welche die Richtungen der beiden gegebenen Kräfte enthält; denn es ist kein Grund denkbar, warum sich der Punkt lieber nach der einen als nach der andern Seite aus dieser Ebene entfernen sollte, wenn aber die Bewegung des materiellen Punktes in dieser Ebene erfolgt, so muß auch die Richtung der einzigen Kraft, welcher diese Bewegung zugeschrieben werden kann, in derselben Ebene enthalten sein.

Ferner ist es leicht darzuthun, daß wenn P und Q, Fig. 23, zwei solche Kräfte, die an demselben Punkte angreifen, vorstellen, die Mittelkraft derselben der Richtung nach in den Winkel PMQ fallen muß, welchen diese Kräfte unter sich einschließen. Denn das Streben der Kraft P geht dahin, den Punkt M einem Punkte O in ihrer Richtung zu nähern, ihn also von der Geraden MQ zu entfernen; ebenso wirkt die Kraft Q dahin, denselben Punkt M einem Punkte N in ihrer Richtung zu nähern, und ihn von MP zu entfernen. Durch das Zusammenwirken beider Kräfte wird also die Bewegung des materiellen Punktes M nach einem Punkte R gerichtet werden, welcher irgendwo zwischen O und N liegt, so daß sich der Punkt sowohl von OM als von NM entfernt.

Sind dann die beiden Kräfte P und Q einander gleich, wie in Fig. 24, so werden sie den angegriffenen Punkt von jeder Richtung gleichviel entfernen wollen; die Richtungslinie der Bewegung, oder die der Resultirenden wird demnach den Winkel PMQ halbiren. Sind sie dagegen ungleich, wie in Fig. 25, so kann man die größere von beiden, hier Q, als die Summe zweier andern: P und S, ansehen; die Resultirende R_1 der beiden gleichen Kräfte P wird den Winkel PMQ halbiren, und die Mittelkraft R von R_1 und S oder von P und Q jedenfalls in den Winkel R_1MS hineinfallen, also der Kraft Q, d. i. der größern von beiden Kräften näher zu liegen kommen, und wie leicht zu sehen ist, um so näher, je größer P im Verhältniß zu Q ist.

Im Allgemeinen wird sowohl die Intensität als Richtung der Mittelkraft R eine Function der beiden Kräfte P und Q und des von ihren Richtungen eingeschlossenen Winkels α sein; man hat demnach,

wenn man den Winkel zwischen der Richtung der Kraft P und der Richtung der Mittelkraft R mit ϑ bezeichnet,

$$R = F(P, Q, \alpha), \quad \vartheta = f(P, Q, \alpha).$$

In einem besondern Falle dagegen, in welchem über eines dieser drei Stücke eine besondere Verfügung getroffen wird, werden diese Größen R und ϑ nur noch Functionen der beiden andern sein. Wird, wie oben, $Q = P$ genommen, so ist

$$R = F(P, \alpha), \quad \vartheta = f(P, \alpha).$$

Die letzte Gleichung kann nicht homogen werden, wenn nicht P ganz daraus entfernt wird, da sich sonst der Werth von ϑ mit der Einheit der Kraft ändern müßte; es ist also nothwendig

$$\vartheta = f(\alpha)$$

und zwar, wie schon dargethan worden,

$$\vartheta = \frac{1}{2}\alpha.$$

Ferner wird aus

$$R = F(P, \alpha)$$

wegen der Homogeneität, da daß Verhältniß von R und P von der Einheit der Kraft unabhängig sein muß,

$$\frac{R}{P} = \psi(\alpha), \quad R = P.\psi(\alpha).$$

Es handelt sich also noch darum, die Form der Function $\psi(\alpha)$ zu bestimmen, um die Resultirende R von zwei gleichen Kräften sowohl der Größe als Richtung nach angeben zu können.

§. 5.

Ohne jedoch auf diese Bestimmung einzugehen, will ich einen andern Fall betrachten, wo es leichter ist, die Größe der Resultirenden und damit auch ihre Richtung zu erhalten. Anstatt nämlich eine besondere Verfügung über die Kraft Q zu treffen, lassen wir den beiden Kräften beliebige Werthe, vergleichen aber nur jene Fälle, wo ihre Richtungen einen rechten Winkel einschließen, wie in Fig. 26. Der constante Winkel $\frac{1}{2}\pi$ ist dann ohne Einfluß auf die Größe und Richtung der Resultirenden, und es bleibt noch

$$R = F(P, Q), \quad \vartheta = f(P, Q).$$

Eliminirt man daher aus den beiden Gleichungen die Kraft Q, und nimmt aus der neu entstandenen den Werth von P, so wird

$$P = f_1(R, \vartheta)$$

oder wegen der Homogeneität wie oben

$$\frac{P}{R} = \varphi(\vartheta) \quad , \quad P = R.\varphi(\vartheta) \; ;$$

und da der Winkel zwischen den Richtungen von R und Q gleich $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$ ist, so muß man auch haben

$$\frac{Q}{R} = \varphi\left(\frac{1}{2}\pi - \vartheta\right) , \quad Q = R.\varphi\left(\frac{1}{2}\pi - \vartheta\right).$$

Denkt man sich nun P als Mittelkraft zweier Kräfte P_1 und P_2, von denen die eine in die Richtung der Resultirenden fällt, die andere dagegen darauf senkrecht steht, die also unter sich auch einen rechten Winkel und mit der Kraft P die Winkel ϑ und $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$ bilden, so muß wie vorher

$$P_1 = P.\varphi(\vartheta) , \quad P_2 = P.\varphi\left(\frac{1}{2}\pi - \vartheta\right) ,$$

werden, oder, wenn man für $\varphi(\vartheta)$ und $\varphi(\frac{1}{2}\pi - \vartheta)$ ihre Werthe:

$$\varphi(\vartheta) = \frac{P}{R} \quad , \quad \varphi\left(\frac{1}{2}\pi - \vartheta\right) = \frac{Q}{R}$$

setzt,

$$P_1 = \frac{P^2}{R} \quad , \quad P_2 = \frac{PQ}{R} .$$

Auf gleiche Weise erhalten wir statt der Kraft Q zwei rechtwinklige Kräfte Q_1 und Q_2, wovon die erste wieder in die Richtung der Mittelkraft fällt, während die zweite darauf senkrecht steht, nämlich

$$Q_1 = Q.\varphi\left(\frac{1}{2}\pi - \vartheta\right) , \quad Q_2 = Q.\varphi(\vartheta)$$

oder mit den obigen Werthen von $\varphi(\vartheta)$ und $\varphi(\frac{1}{2}\pi - \vartheta)$

$$Q_1 = \frac{Q^2}{R} \quad , \quad Q_2 = \frac{PQ}{R} .$$

Daraus geht hervor, daß P_2 und Q_2 gleich sind, daß sich also, wenn sie im entgegengesetzten Sinne thätig sind, wie dies hier der Fall ist, ihre Wirkungen aufheben müssen. Die Summe der beiden andern Kräfte P_1 und Q_1, welche in derselben Geraden und nach derselben Richtung thätig sind, wird folglich die Resultirende geben müssen, und man hat demnach

$$\text{a.)} \qquad R = \frac{P^2}{R} + \frac{Q^2}{R} \quad \text{oder} \quad R^2 = P^2 + Q^2 ,$$

wodurch die Größe der Mittelkraft bestimmt ist.

Was nun ihre Richtung oder den Winkel ϑ betrifft, so ist zuerst einleuchtend, daß wenn $Q = 0$ wird, auch $\vartheta = 0$ werden muß, weil dann R und P gleichbedeutend sind; die mit φ bezeichnete Function muß demnach eine solche sein, daß man hat:

$$\varphi(0) = 1 \quad , \quad \varphi(\tfrac{1}{2}\pi) = 0 .$$

Ferner folgt aus den Erörterungen des vorhergehenden §, daß ϑ um so kleiner werden muß, je mehr man P vergrößert; man zieht aber aus der Gleichung:

$$\frac{P}{\varphi(\vartheta)} = \frac{Q}{\varphi(\frac{1}{2}\pi - \vartheta)} \quad \text{oder} \quad \frac{P}{Q} = \frac{\varphi(\vartheta)}{\varphi(\frac{1}{2}\pi - \vartheta)} ,$$

wenn P um ΔP wächst, und in Folge dessen ϑ um $\Delta\vartheta$ kleiner wird, die Beziehungen:

$$\frac{P + \Delta P}{Q} = \frac{\varphi(\vartheta - \Delta\vartheta)}{\varphi(\frac{1}{2}\pi - \vartheta + \Delta\vartheta)} \text{ und } > \frac{\varphi(\vartheta)}{\varphi(\frac{1}{2}\pi - \vartheta)} \text{ oder } \frac{P}{Q} ,$$

und schließt daraus, daß $\varphi(\vartheta)$ eine Function sein muß, deren Werth stetig zunimmt, wenn ϑ kleiner wird, und zwar von 0 bis 1, wenn ϑ von $\frac{1}{2}\pi$ bis 0 abnimmt, und umgekehrt.

Führt man endlich statt P und Q ihre Werthe: $R\varphi(\vartheta)$ und $R\varphi(\frac{1}{2}\pi - \vartheta)$ in die Gleichung (a) ein, so ergibt sich als bezeichnende Eigenschaft der betreffenden Function die Gleichung:

$$1 = \varphi^2(\vartheta) + \varphi^2(\tfrac{1}{2}\pi - \vartheta) ,$$

und man sieht sogleich, daß diese Gleichung sowohl, als die vorhergehenden Bedingungen für alle Werthe von ϑ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ befriedigt werden, wenn man $\varphi(\vartheta) = \cos\vartheta$ setzt. Nun kann es aber für zwei gegebene Kräfte nur eine einzige Resultirende geben, also auch nur einen einzigen Werth für $\frac{P}{R}$ oder $\varphi(\vartheta)$ *), und man hat deßhalb nothwendig für alle Fälle

$$\varphi(\vartheta) = \cos\vartheta\ ,\quad \varphi(\frac{1}{2}\pi - \vartheta) = \cos(\frac{1}{2}\pi - \vartheta) = \sin\vartheta\ ,$$

also auch

$$\left.\begin{array}{l} \cos\vartheta = \frac{P}{R}\ ,\quad \sin\vartheta = \frac{Q}{R}\ ,\quad \operatorname{tang}\vartheta = \frac{Q}{P}\ , \\ \text{und folglich} \\ R = \sqrt{P^2 + Q^2}\ .\quad \vartheta = \operatorname{arc\,tang}\frac{Q}{P} \end{array}\right\} \quad (2.$$

als die gesuchten, oben mit F und f bezeichneten Functionen.

Die Kräfte P und Q werden demnach durch die Projectionen der Resultirenden R auf ihre Richtungen vorgestellt, und diese der Größe nnd Richtung nach durch die Diagonale des über den Kräften P und Q construirten Rechtecks.

Es fällt von selbst in die Augen, daß die vorhergehenden Beziehungen auch dazu dienen können, irgend eine Kraft R als die Resultirende zweier unter sich rechtwinkligen Kräfte P und Q zu betrachten und sie in diese zu zerlegen, was offenbar auf unendlich viele Arten geschehen kann, da die Gleichungen:

$$P = R\cos\vartheta\ ,\quad Q = R\sin\vartheta$$

*) Es sind allerdings mehrere Functionen von ϑ denkbar, welche den obigen Gleichungen und Bedingungen Genüge leisten; sie müssen aber alle für dasselbe ϑ denselben Werth erhalten, und können nur der Form nach verschieden sein; so z. B. die Functionen:

$$\cos(2m\pi + \vartheta)\ ,\quad \frac{1}{2}\left(e^{\vartheta i} + e^{-\vartheta i}\right)\ ,\quad 1 - \frac{1}{2}\vartheta^2 + \frac{1}{24}\vartheta^4 - \text{etc.}\ ,$$

u. a., welche der Form nach ganz andere Functionen von ϑ vorstellen, als $\cos\vartheta$, welche aber, die Reihe natürlich nur annähernd, dem Werthe nach mit dieser letztern gleichbedeutend sind.

drei Unbekannte P, Q und ϑ enthalten. Ist aber ϑ gegeben, so wird auch P und Q durch die vorstehenden Gleichungen bestimmt werden können. Bei der Construction geschieht dies einfach dadurch, daß man die gegebene Kraft auf die gleichfalls gegebenen Richtungen von P und Q projicirt.

Bei dieser letzten Aufgabe kann die Forderung gestellt werden, daß der Winkel ϑ irgend einen Werth zwischen 0 und 2π habe; man erhält dann bald für die eine, bald für die andere, bald für beide Componenten negative Werthe, welche andeuten, daß die entsprechende Componente nicht in dem angenommenen Sinne wirken kann, sondern in dem gerade entgegengesetzten. So zeigt Fig. 27, daß die durch MR vorgestellte Kraft keine Componenten längs der Geraden MX und MY geben kann, da sie nicht in dem von ihnen gebildeten Winkel liegt, wohl aber längs der Geraden MY und MX'. Wird also die Lage von MR gegen MX durch den Winkel $\vartheta = \pi - \vartheta'$ bestimmt, so zeigen die analytischen Werthe: $P = R\cos\vartheta = -R\cos\vartheta'$ und $Q = R\sin\vartheta = R\sin\vartheta'$, daß die Richtung der ersten Componenten nicht durch die positive Gerade MX, von welcher aus der Winkel ϑ gemessen wird, vorgestellt werden kann, sondern daß sie in gerade entgegengesetztem, negativem Sinne wirkt.

§. 6.

Mittels der vorhergehenden Sätze kann nun die allgemeine Aufgabe: **Die Resultirende von zwei Kräften zu finden, welche an demselben Punkte angreifen, und deren Größe und Richtungen beliebig gegeben sind,** aufgelöst werden.

Seien P und Q, Fig. 28, zwei solche Kräfte, die an dem materiellen Punkte M angreifen, und deren Richtungen den Winkel α bilden; MR sei die noch unbekannte Richtung der Resultirenden, welche durch den Winkel $PMR = \vartheta$ bestimmt wird. Denkt man sich jede der beiden Kräfte P und Q in zwei unter sich rechtwinklige Kräfte, die erste in P_1 und P_2, die zweite in Q_1 und Q_2 zerlegt, von denen je eine, P_1 und Q_1, in die Richtung der Resultirenden fällt, so ist die Resultirende dieser vier Kräfte offenbar der Mittelkraft von P und Q gleich. Man hat dann zuerst zur Bestimmung jener Kräfte die Ausdrücke:

$$P_1 = P\cos\vartheta \quad , \qquad P_2 = P\sin\vartheta \; ,$$
$$Q_1 = Q\cos(\alpha - \vartheta) \quad , \qquad Q_2 = Q\sin(\alpha - \vartheta) \; ,$$

und da die Kräfte P_2 und Q_2 in derselben Geraden senkrecht zur Richtung der Resultirenden, und zwar im entgegengesetzten Sinne angreifen, so müssen sie gegenseitig ihre Wirkungen aufheben; denn wenn nach

irgend einer Seite, z. B. in der Richtung MQ_2 eine Kraft als Mittelkraft von P_2 und Q_2 wirksam bliebe, so müßte die Resultirende von dieser Mittelkraft und von jener der Kräfte P_1 und Q_1, die in derselben Geraden MR thätig sind, in den Winkel RMQ_2 hineinfallen; es müßte also auch die Resultirende der Kräfte P und Q, welche mit der vorhergehenden der vier Kräfte P_1, Q_1, P_2 und Q_2 gleiche Intensität und Richtung hat, in denselben Winkel zu liegen kommen, und es könnte MR nicht ihre Richtung sein. Es ist demnach die Resultirende R der Summe der beiden Kräfte P_1 und Q_1 gleich, und man hat zur Bestimmung ihrer Intensität und Richtung die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} P \sin \vartheta - Q \sin(\alpha - \vartheta) = 0 \\ R = P \cos \vartheta + Q \cos(\alpha - \vartheta) \end{array}\right\} . \qquad (3.$$

Wird in der letzten Gleichung mittels der ersten eine der Kräfte P oder Q eliminirt, so erhält man mit einigen Reductionen

$$R = P \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \vartheta)} \quad , \quad R = Q \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta}$$

und daraus

$$R : Q : P = \sin \alpha : \sin \vartheta : \sin(\alpha - \vartheta) .$$

Werden ferner die beiden Gleichungen zum Quadrat erhoben und addirt, so ergibt sich

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha ,$$

als diejenige Gleichung, welche den Werth der Resultirenden R durch die drei gegebenen Größen P, Q und α darstellt.

Aus allen diesen Ausdrücken geht hervor: 1) daß die Resultirende der Summe der Projectionen der beiden Kräfte auf ihre Richtung gleich ist; 2) daß jede der drei Kräfte durch den Sinus des Winkels vorgestellt werden kann, welchen die Richtungen der beiden andern einschließen: 3) daß die Resultirende R der beiden Kräfte P und Q der Größe und Richtung nach durch die Diagonale des über diesen Kräften construirten Parallelogramms vorgestellt wird; 4) daß alle Beziehungen zwischen den genannten drei Kräften und den von ihren Richtungen eingeschlossenen Winkeln durch ein Dreieck MPR, Fig. 28, gelöst werden, dessen Seiten jene drei Kräfte vorstellen, worin aber der von den Kräften P und Q eingeschlossene Winkel nicht der Winkel α selbst, sondern dessen Supplement $\pi - \alpha$ ist. Es müssen demnach immer drei Stücke und darunter wenigstens eine Kraft gegeben sein, um die übrigen ableiten zu können.

Soll also die Kraft R in zwei andere: P und Q, zerlegt werden, mit welchen ihre Richtung die Winkel α und β bildet, so hat man zur Bestimmung der Intensitäten dieser Kräfte die Gleichungen:

$$P = R \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad Q = R \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Wenn hier $\beta = \alpha$ wird, so folgt

$$P = Q = R \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{2 \cos \alpha};$$

man hat also auch

$$R = 2 P \cos \alpha,$$

wo α die Hälfte des Winkels ist, welchen die gleichen Kräfte P unter sich einschließen, und wodurch der in §. 4 betrachtete Fall seine Auflösung findet.

§. 7.

Es seien nun mehrere Kräfte gegeben, die alle an demselben materiellen Punkte angreifen, und deren Richtungen noch alle in derselben Ebene liegen, und es sei die Richtung und Größe ihrer Resultirenden zu finden. Bezeichnen wir die Kräfte der Reihe nach mit P_1, P_2, P_3, etc., so wird sich die Resultirende durch Anwendung des im vorhergehenden §. 6 gefundenen Satzes leicht construiren lassen, wenn man, wie in Fig. 29, zuerst die Resultirende R_1 der Kräfte P_1 und P_2 durch die Diagonale des über diesen Kräften ausgeführten Parallelogramms darstellt, und über dieser Mittelkraft R_1 und der dritten Kraft P_3 ein zweites Parallelogramm errichtet, durch dessen Diagonale die Mittelkraft R_2 der Kräfte P_1, P_2, P_3 gegeben ist; diese Resultirende R_2 wird wieder mit der Kraft P_4 zusammengesetzt, und so fortgefahren, bis alle Kräfte zur Bildung einer letzten Resultirenden R verwendet wurden, welche dann die gesuchte Mittelkraft aller gegebenen Kräfte ist.

Mit einiger Aufmerksamkeit wird man sogleich erkennen, daß diese Construction sehr vereinfacht werden kann, daß es nämlich nicht nothwendig ist, die Parallelogramme ganz zu construiren, daß vielmehr alle durchbrochenen Linien der Figur entbehrlich sind, wenn man durch den Endpunkt der Geraden MP_1, welche die Kraft P_1 darstellt, eine Parallele zur Richtung der Kraft P_2 zieht und deren Länge P_1R_1 dieser Kraft entsprechend, d. h. der Geraden MP_2 gleich, abschneidet, dann durch den so erhaltenen Endpunkt R_1 eine Parallele R_1R_2 zur Kraft P_3 von gleicher Länge wie MP_3 zieht, und, auf diese Weise fortfahrend, das Vieleck $MP_1R_1R_2R_3R$ construirt, dessen Seiten den Richtungen

der gegebenen Kräfte der Reihe nach parallel sind und diese Kräfte durch ihre Längen vorstellen; die letzte Seite RM dieses Vielecks, welche den Endpunkt R der zur letzten Kraft P gezogenen Parallelen R_3 R mit dem Punkte M verbindet, wird dann die Resultirende aller Kräfte der Größe und Richtung nach darstellen. Wenn sich das Vieleck von selbst schließt, d. h. wenn die Parallele zur letzten Kraft gerade im Punkte M endigt, so ist die Resultirende gleich Null.

§. 8.

So einfach aber die vorhergehende Construction ist, so wenig ist das dabei angewendete Verfahren zur Berechnung der Mittelkraft geeignet. Die Methode der analytischen Geometrie und die in §. 5 entwickelten Lehrsätze über die Zusammensetzung zweier rechtwinkligen Kräfte und die Zerlegung einer Kraft in zwei andere, deren Richtungen senkrecht zu einander sind, führen hier weit leichter zum Ziel.

Durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt M, Fig. 30, der gegebenen Kräfte legt man ganz beliebig ein rechtwinkliges Achsenpaar, und bestimmt die Richtung jeder Kraft, wie in §. 12 der Einleitung angegeben wurde, durch den Winkel α, den dieselbe mit der Achse der x bildet, und der für jede Kraft gegeben sein muß. Zerlegt man nun die Kraft P_1, deren Richtung mit der Achse der x den Winkel α_1 einschließt, in zwei Kräfte, von denen die eine nach der Achse der x, die andere nach der Achse der y gerichtet ist, die also rechtwinklig zu einander sind, so erhält man für diese die Werthe:

$$P_1 \cos \alpha_1 \quad , \qquad P_1 \sin \alpha_1 \; ,$$

und diese Componenten werden, wie in §. 5 gezeigt wurde, der Richtung nach mit den positiven Hälften der Coordinatenachsen zusammen fallen, wenn die Functionen $\cos \alpha_1$ und $\sin \alpha_1$ positive Werthe haben; im entgegengesetzten Falle werden sie im Sinne der negativen Achsen wirken, und in der Rechnung als negative Größen erscheinen. Auf gleiche Weise ergeben sich für die übrigen Kräfte P_2, P_3, etc. die Componenten

$$P_2 \cos \alpha_2 \; , \quad P_3 \cos \alpha_3 \; , \quad P_4 \cos \alpha_4 \; , \quad \text{etc.}$$

in der Achse der x, und die Componenten

$$P_2 \sin \alpha_2 \; , \quad P_3 \sin \alpha_3 \; , \quad P_4 \sin \alpha_4 \; , \quad \text{etc.}$$

in der Achse der y, und zwar bald im positiven, bald im negativen Sinne dieser Achsen wirkend. Statt der gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3, etc. haben wir demnach zwei Systeme von Kräften, deren Richtungen alle

in derselben Geraden liegen, bei dem einen in der Achse der x, bei dem zweiten in der Achse der y; wenn nun die Resultirende von einem jeden Systeme genommen wird, so sind alle Kräfte auf zwei unter sich rechtwinklige zurückgeführt, welche den Achsen entsprechend, längs denen sie wirken, mit X und Y bezeichnet seien, und deren Mittelkraft zugleich die Resultirende aller Kräfte sein wird.

Nach Gleichung (1) in §. 3 ist die Resultirende eines jeden dieser beiden Systeme der Summe der Kräfte gleich, da, wie oben bemerkt worden, der Sinn ihrer Thätigkeit durch die Zeichen der Sinus und Cosinus ausgedrückt ist; man hat also:

$$X = P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 + \text{etc.} = \Sigma . P \cos\alpha \ ,$$
$$Y = P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + P_3 \sin\alpha_3 + \text{etc.} = \Sigma . P \sin\alpha \ .$$

Die Resultirende R dieser Kräfte X und Y ist dann nach den Gleichungen (2) gegeben durch:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(\Sigma . P \cos\alpha)^2 + (\Sigma . P \sin\alpha)^2} \ ,$$

und, wenn a den Winkel bezeichnet, den ihre Richtung mit der Achse der x bildet, so hat man

$$X = R \cos a \ , \quad Y = R \sin a \ , \quad \operatorname{tang} a = \frac{Y}{X} \ ,$$

oder

$$4.) \left\{ \begin{array}{l} R \cos a = P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 \text{ etc.} = \Sigma . P \cos\alpha \\ R \sin a = P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + P_3 \sin\alpha \text{ etc.} = \Sigma . P \sin\alpha \\ \operatorname{tang} a = \dfrac{\Sigma . P \sin\alpha}{\Sigma . P \cos\alpha} \ , \quad R = \dfrac{\Sigma . P \sin\alpha}{\sin a} = \dfrac{\Sigma . P \cos\alpha}{\cos a} \ . \end{array} \right.$$

Diese letzten Ausdrücke eignen sich am besten zur Berechnung der Richtung und Intensität der Resultirenden; es ist aber dabei zu bemerken, daß für die Bestimmung des Winkels a die Zeichen von $\Sigma . P \cos\alpha$ und $\Sigma . P \sin\alpha$ wohl zu beachten sind; denn dieser Winkel liegt, wie leicht zu sehen, zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, wenn diese beiden Summen positiv sind, zwischen π und $\frac{3}{2}\pi$, wenn sie beide negativ sind, und zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π, wenn nur die erste, endlich zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und 2π, wenn nur die zweite negativ ist; R selbst muß jedenfalls positiv oder vielmehr absolut werden; es müssen also $\Sigma . P \sin\alpha$ und $\sin a$,

$\Sigma . P \cos\alpha$ und $\cos a$ immer gleiche Zeichen haben, was übrigens aus dem Vorhergehenden unmittelbar folgt.

Das folgende einfache Beispiel mag als Muster für die Anwendung der bisher gefundenen Formeln dienen; es ist in Fig. 31 constructiv aufgelöst, und dabei die Länge von 0,75 Millimeter als Vertreter für die Einheit der Kraft angenommen.

An einem materiellen Punkte M greifen 4 Kräfte an, deren Intensitäten und Richtungen folgende sind:

$$P_1 = \overset{\text{Kgr.}}{14,23}\,,\quad P_2 = \overset{\text{Kgr.}}{23,85}\,,\quad P_3 = \overset{\text{Kgr.}}{45,37}\,,\quad P_4 = \overset{\text{Kgr.}}{31,64}\,,$$

$$\alpha_1 = 23^0\,20',\quad \alpha_2 = 118^0\,40',\quad \alpha_3 = 255^0\,10',\quad \alpha_4 = 332^0\,30';$$

welches ist die Intensität und Richtung ihrer Mittelkraft?

Die Rechnung gibt Folgendes:*)

$\log P_1 = 1,15320$	$\ldots\ldots = 1,15320$	$\log P_2 = 1,37749$	$\ldots\ldots = 1,37749$
$\lg\cos\alpha_1 = 9,96294$	$\lg\sin\alpha_1 = 9,59778$	$\lg\cos\alpha_2 = 9,68098-$	$\lg\sin\alpha_2 = 9,94321$
$\lg P_1\cos\alpha_1 = 1,11614$	$\lg P_1\sin\alpha_1 = 0,75098$	$\lg P_2\cos\alpha_2 = 1,05847-$	$\lg P_2\sin\alpha_2 = 1,32070$
$P_1\cos\alpha_1 = 13,07$	$P_1\sin\alpha_1 = 5,64$	$P_2\cos\alpha_2 = -11,44$	$P_2\sin\alpha_2 = 20,93$
$\log P_3 = 1,65677$	$\ldots\ldots = 1,65677$	$\log P_4 = 1,50024$	$\ldots\ldots = 1,50024$
$\lg\cos\alpha_3 = 9,40825-$	$\lg\sin\alpha_3 = 9,98528-$	$\lg\cos\alpha_4 = 9,94793$	$\lg\sin\alpha_4 = 9,68441-$
$\lg P_3\cos\alpha_3 = 1,06502-$	$\lg P_3\sin\alpha_3 = 1,64205-$	$\lg P_4\cos\alpha_4 = 1,44817$	$\lg P_4\sin\alpha_4 = 1,16465-$
$P_3\cos\alpha_3 = -11,62$	$P_3\sin\alpha_3 = -43,86$	$P_4\cos\alpha_4 = 28,07$	$P_4\sin\alpha_4 = -14,61.$

Dadurch wird ferner.

$$\Sigma . P\cos\alpha = 41,14 - 23,06 = 18,08$$

$$\Sigma . P\sin\alpha = 26,57 - 58,47 = -31,90$$

$\log\Sigma . P\sin\alpha = 1,50379-$	$\log\Sigma . P\sin\alpha = 1,50379-$
d. E. $\log\Sigma . P\cos\alpha = 8,74280$	d. E. $\log\sin a = 0,06049-$
$\log\tang a = 0,24659-$	$\log R = 1,56428+$
$a = 270^0 + 29^0\,33' = 299^0\,33'$,	$R = 36,67$

oder auch $R = \sqrt{(18,08)^2 + (31,90)^2} = \sqrt{1344,5} = 36,66$.

*) Wenn sich hinter einem Logarithmen das Zeichen — befindet, so deutet dies an, daß die entsprechende Zahl negativ ist. — Die Logarithmen aller Zahlen, die kleiner sind als 1, also die Logarithmen aller Sinus und Cosinus, sowie die der Tangenten der kleinern Winkel als $\frac{1}{4}\pi$, u. s. f., sind als dekadische Ergänzungen zu betrachten, bei welchen -10 nicht ausdrücklich zugesetzt ist, da durch das Weglassen dieses Subtrahenden nur in sehr besondern Fällen ein Zweifel entstehen kann. Die dekadische Ergänzung eines Logarithmen ist durch d. E. angedeutet.

Die Intensität der Resultirenden ist demnach $\overset{\text{Ngr.}}{36,67}$ und ihre Richtung bildet mit der Achse der x einen Winkel $= 299^\circ 33'$.

§. 9.

Um nun zur Bestimmung der Mittelkraft beliebiger Kräfte überzugehen, deren Richtungen nicht in derselben Ebene liegen, betrachte ich zuerst den Fall, daß drei unter sich rechtwinklige Kräfte P, Q, S, Fig. 32, gegeben seien. Die Resultirende R_1 der beiden ersten: P und Q, ist dann bestimmt durch die Gleichung:

$$R_1^2 = P^2 + Q^2 .$$

Die Richtung von S ist aber senkrecht zu P und Q, also auch zu der Ebene PMQ, und folglich senkrecht zu R_1; die Mittelkraft R von R_1 und S, oder was dasselbe ist, von P, Q und S, wird demnach durch die ähnliche Gleichung:

$$R^2 = R_1^2 + S^2$$

bestimmt, welche durch Einführung des Werthes von R_1 wird

$$R^2 = P^2 + Q^2 + S^2 , \quad R = \sqrt{P^2 + Q^2 + S^2} .$$

Ferner ist es einleuchtend, daß wenn a, b, c die drei Winkel zwischen der Richtung der Kraft R und den Richtungen ihrer Seitenkräfte P, Q, S sind, man hat

$$5.) \left\{ \begin{array}{l} P = R \cos a , \quad Q = R \cos b , \quad S = R \cos c \\ \text{und} \\ \cos a = \dfrac{P}{R} , \quad \cos b = \dfrac{Q}{R} , \quad \cos c = \dfrac{S}{R} , \end{array} \right.$$

oder, wenn man den Winkel, welchen die Projection der Resultirenden in der Ebene der Kräfte P und Q mit der Richtung der Kraft S bildet, mit e bezeichnet,

$$6.) \left\{ \begin{array}{l} P = R \sin c \cos e , \quad Q = R \sin c \sin e , \quad S = R \cos c \\ \operatorname{tang} e = \dfrac{Q}{P} , \quad \operatorname{tang} c = \dfrac{Q}{S \sin e} , \quad R = \dfrac{S}{\cos c} \end{array} \right.$$

Durch diese Ausdrücke ist die Intensität und Richtung der Resultirenden bestimmt; sie zeigen, daß dieselbe durch die Diagonale des über den drei gegebenen Kräften ausgeführten Parallel-

epipeds vorgestellt wird. Sie dienen aber auch umgekehrt dazu, eine Kraft R in drei andere unter sich rechtwinklige: P, Q, S, zu zerlegen, wenn die Winkel a, b, c zwischen der Richtung der ersten und den Richtungen der drei letzten Kräfte bekannt sind, und zeigen in dieser Beziehung, daß jede dieser Seitenkräfte der Projection der Resultirenden auf ihre Richtung gleich ist. Es findet dann auch hier die oben in §. 5 über die Zeichen der Cosinus und den Sinn der Thätigkeit der Componenten gemachte Bemerkung ihre Anwendung.

Dasselbe Ergebniß hätte aus der in §. 7. besprochenen Construction abgeleitet werden können; denn es ist klar, daß diese auch auf Kräfte anwendbar ist, deren Richtungen nicht in derselben Ebene liegen, da man immer nur zwei Kräfte zugleich betrachtet. Es ergibt sich ferner durch dieselbe, wie Fig. 33 zeigt, daß für irgend drei nicht in einer Ebene liegenden Kräfte P, Q, S die Mittelkraft R immer durch die Diagonale des über denselben construirten Parallelepipeds der Größe und Richtung nach vorgestellt wird.

Zur wirklichen Ermittelung der Resultirenden von beliebigen Kräften im Raume ist indessen die erwähnte Construction wenig geeignet; verbindet man aber dieselbe mit der darstellenden Methode nach der in §. 14 der Einleitung angegebenen Weise, die Projectionen der Kräfte aufzutragen, so erhält man leicht die beiden Projectionen der Resultirenden durch den einfachen Satz, daß die Mittelkraft der Projectionen der gegebenen Kräfte in einer der Projectionstafeln auch die Projection der Resultirenden derselben Kräfte in dieser Tafel ist. Durch die Projectionen der Resultirenden hat man dann auch die wirkliche Größe und Richtung derselben. Es wird bald ein Beispiel einer solchen constructiven Bestimmung gegeben werden, worüber man einstweilen Fig. 34 vergleichen kann.

§. 10.

Es sei nun eine beliebige Anzahl Kräfte P_1, P_2, P_3, etc. gegeben, und deren Richtungen gegen ein willkürlich durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt gezogenes rechtwinkliges Coordinatensystem, entweder durch die Winkel α, β, γ mit den drei Achsen, oder durch die Winkel γ und ε bestimmt. Man zerlege die Kraft P_1 in drei andere, welche nach den drei Achsen gerichtet und demnach durch

$$P_1 \cos\alpha_1 \ , \quad P_1 \cos\beta_1 \ , \quad P_1 \cos\gamma_1 \ ,$$

oder

$$P_1 \sin\gamma_1 \cos\varepsilon_1 \ , \quad P_1 \sin\gamma_1 \sin\varepsilon_1 \ , \quad P_1 \cos\gamma_1$$

ausgedrückt sind. Auf dieselbe Weise verfahre man mit allen übrigen Kräften P_2, P_3, etc. und verwandle sie dadurch in drei unter sich rechtwinklige Systeme von Kräften, die längs derselben Geraden (einer der drei Achsen) thätig sind. Die Resultirende eines jeden Systems ist der algebraischen Summe der betreffenden Kräfte gleich; wenn also diese Mittelkräfte den Achsen entsprechend mit X, Y und Z bezeichnet werden, so hat man

$$7.)\quad \begin{cases} X = P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 + \text{etc.} = \Sigma.\, P\cos\alpha \\ Y = P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 + P_3 \cos\beta_3 + \text{etc.} = \Sigma.\, P\cos\beta \\ Z = P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2 + P_3 \cos\gamma_3 + \text{etc.} = \Sigma.\, P\cos\gamma \end{cases},$$

oder auch

$$\begin{rcases} X = P_1 \sin\gamma_1 \cos\varepsilon_1 + P_2 \sin\gamma_2 \cos\varepsilon_2 + P_3 \sin\gamma_3 \cos\varepsilon_3 + \text{etc.} = \Sigma.\, P\sin\gamma\cos\varepsilon \\ Y = P_1 \sin\gamma_1 \sin\varepsilon_1 + P_2 \sin\gamma_2 \sin\varepsilon_2 + P_3 \sin\gamma_3 \sin\varepsilon_3 + \text{etc.} = \Sigma.\, P\sin\gamma\sin\varepsilon \\ Z = P_1 \cos\gamma_1 \quad + P_2 \cos\gamma_2 \quad + P_3 \cos\gamma_3 \quad + \text{etc.} = \Sigma.\, P\cos\gamma \end{rcases}.$$

Die Mittelkraft dieser Resultirenden X, Y, Z ist zugleich die des ganzen Systems, und man hat

$$8.)\quad \begin{cases} R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(\Sigma.\, P\cos\alpha)^2 + (\Sigma.\, P\cos\beta)^2 + (\Sigma.\, P\cos\gamma)^2}, \\ \cos a = \dfrac{X}{R}, \quad \cos b = \dfrac{Y}{R}, \quad \cos c = \dfrac{Z}{R} \end{cases}$$

oder auch

$$9.)\quad \operatorname{tang} e = \frac{Y}{X}, \quad \operatorname{tang} c = \frac{Y}{Z \sin e}, \quad R = \frac{Z}{\cos c},$$

womit dann sowohl die Intensität als die Richtung der gesuchten Mittelkraft bestimmt ist. Hinsichtlich der Zeichen der Größen X, Y, Z kann in Bezug auf die Winkel a, b, c kein Zweifel entstehen, da sie zwischen den Grenzen 0 und π liegen; in Bezug auf den Winkel e, der sich von 0 bis 2π erstreckt, gilt dasselbe, was oben (§. 8) in Betreff des Winkels a gesagt worden ist.

§. 11.

Als Beispiel für die vorhergehende analytische Bestimmung, so wie für die constructive Darstellung der Resultirenden von beliebig gegebenen Kräften im Raume diene folgende Aufgabe.

An demselben materiellen Punkte M, Fig. 34, wirken 4 Kräfte, deren Intensitäten und Richtungen folgende sind:

$\overset{\text{Kgr}}{P_1 = 25,30}$, $\overset{\text{Kgr}}{P_2 = 16,75}$, $\overset{\text{Kgr}}{P_3 = 32,63}$, $\overset{\text{Kgr}}{P_4 = 20,87}$,
$\varepsilon_1 = 41^0\,20'$, $\varepsilon_2 = 123^0\,30'$, $\varepsilon_3 = 225^0\,10'$, $\varepsilon_4 = 305^0\,40'$,
$\gamma_1 = 63^0\,50'$, $\gamma_2 = 48^0\,20'$, $\gamma_3 = 156^0\,30'$, $\gamma_4 = 151^0\,40'$;
welches ist die Intensität und Richtung ihrer Resultirenden?

Bei der in Fig. 34 dargestellten Construction ist der doppelte Millimeter als Einheit der Kraft angenommen, die Horizontal-Projectionen sind mit einem, die Vertikal-Projectionen mit zwei Accenten bezeichnet; die erstern Projectionen sind wie Kräfte in derselben Ebene zu einer Mittelkraft MR′, die Vertikal-Projectionen ebenso zu der Kraft MR″ vereinigt, und sodann durch Umlegen der vertikalen projicirenden Ebene in die vertikale Tafel die wahre Länge der Mittelkraft und der Winkel c oder CMR, den ihre Richtung mit der Vertikalen bildet, gefunden worden; der Winkel e ist durch den Winkel AMR′ bekannt.

Die Rechnung gibt:

$\log P_1 = 1,40149$	$\ldots\ldots = 1,40449$	$\ldots\ldots = 1,40449$
$\log \sin \gamma_1 = 9,95304$	$\ldots\ldots = 9,95304$	$\log \cos \gamma_1 = 9,64442$
$\log \cos \varepsilon_1 = 9,87557$	$\log \sin \varepsilon_1 = 9,81983$	
$\log P_1 \cos \alpha_1 = 1,23310$	$\log P_1 \cos \beta_1 = 1,17736$	$\log P_1 \cos \gamma_1 = 1,04891$
$P_1 \cos \alpha_1 = 17,10$	$P_1 \cos \beta_1 = 15,04$	$P_1 \cos \gamma_1 = 11,19$
$\log P_2 = 1,22401$	$\ldots\ldots = 1,22401$	$\ldots\ldots = 1,22401$
$\log \sin \gamma_2 = 9,87334$	$\ldots\ldots = 9,87334$	$\log \cos \gamma_2 = 9,82269$
$\log \cos \varepsilon_2 = 9,74189-$	$\log \sin \varepsilon_2 = 9,92111$	
$\log P_2 \cos \alpha_2 = 0,83924-$	$\log P_2 \cos \beta_2 = 1,01846$	$\log P_2 \cos \gamma_2 = 1,04670$
$P_2 \cos \alpha_2 = -6,91$	$P_2 \cos \beta_2 = 10,43$	$P_2 \cos \gamma_2 = 11,14$
$\log P_3 = 1,51495$	$\ldots\ldots = 1,51495$	$\ldots\ldots = 1,51495$
$\log \sin \gamma_3 = 9,60070$	$\ldots\ldots = 9,60070$	$\log \cos \gamma_3 = 9,96240-$
$\log \cos \varepsilon_3 = 9,84822-$	$\log \sin \varepsilon_3 = 9,85074-$	
$\log P_3 \cos \alpha_3 = 0,96387-$	$\log P_3 \cos \beta_3 = 0,96639-$	$\log P_3 \cos \gamma_3 = 1,47735-$
$P_3 \cos \alpha_3 = -9,20$	$P_3 \cos \beta_3 = -9,26$	$P_3 \cos \gamma_3 = -30,02$
$\log P_4 = 1,31952$	$\ldots\ldots = 1,31952$	$\ldots\ldots = 1,31952$
$\log \sin \gamma_4 = 9,67633$	$\ldots\ldots = 9,67633$	$\log \cos \gamma_4 = 9,94458-$
$\log \cos \varepsilon_4 = 9,76572$	$\log \sin \varepsilon_4 = 9,90978-$	
$\log P_4 \cos \alpha_4 = 0,76157$	$\log P_4 \cos \beta_4 = 0,90563-$	$\log P_4 \cos \gamma_4 = 1,26410-$
$P_4 \cos \alpha_4 = 5,78$	$P_4 \cos \beta_4 = -8,05$	$P_4 \cos \gamma_4 = -18,37$.

Dadurch wird sodann

$$X = \Sigma . P \cos \alpha = 22,88 - 16,11 = 6,77$$
$$Y = \Sigma . P \cos \beta = 25,47 - 17,31 = 8,16$$
$$Z = \Sigma . P \cos \gamma = 22,33 - 48.39 = -26,06$$

$$\begin{array}{rl}
\log \Sigma.P\cos\beta & = 0{,}91169 \\
\text{d.E.}\lg \Sigma.P\cos\alpha & = 9{,}16941 \\ \hline
\log\ \text{tang}\ e & = 0{,}08110
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log \Sigma.P\cos\beta & = 0{,}91169 \\
\text{d.E.}\lg \Sigma.P\cos\gamma & = 8{,}58403- \\
\text{d. E.}\log \sin e & = 0{,}11373 \\ \hline
\log\ \text{tang}\ c & = 9{,}60945-
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log \Sigma.P\cos\gamma & = 1{,}41597- \\
\text{d.E.}\lg\cos c & = 0{,}03326- \\ \hline
\log R & = 1{,}44923+
\end{array}$$

$$e = 50^\circ 19',1 \quad , \qquad c = 157^\circ 51',6 \quad , \qquad R = 28{,}134 .$$

Man hat auch

$$R = \sqrt{(6{,}77)^2 + (8{,}16)^2 + (26{,}06)^2} = \sqrt{791{,}53} = \overset{\text{Kgr}}{28{,}134} .$$

$$\begin{array}{rl}
\log \Sigma.P\cos\alpha & = 0{,}83059 \\
\text{d. E. }\log R & = 8{,}55077 \\ \hline
\log\cos a & = 9{,}38136
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log \Sigma.P\cos\beta & = 0{,}91169 \\
\text{d. E. }\log R & = 8{,}55077 \\ \hline
\log\cos b & = 9{,}46246
\end{array}$$

und

$$\begin{array}{rl}
\log\sin c & = 9{,}57619 \\
\log\cos e & = 9{,}80517 \\ \hline
\log\cos a & = 9{,}38136 \\
a & = 76^\circ 4',6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log\sin c & = 8{,}57619 \\
\log\sin e & = 9{,}88627 \\ \hline
\log\cos b & = 9{,}46246 \\
b & = 73^\circ 8',4 .
\end{array}$$

Durch diese Resultate ist in Uebereinstimmung mit der Construction die Mittelkraft der Größe und Richtung nach bestimmt.

§. 12.

Mittels der Gleichungen (7) läßt sich nun auch ein Ausdruck für die Mittelkraft finden, welcher unabhängig ist von der Lage der Coordinaten und der nur die Kräfte und die von diesen paarweise gebildeten Winkel enthält. Erhebt man nämlich diese Gleichungen zum Quadrat, substituirt die so erhaltenen Werthe von X^2, Y^2 und Z^2 in die Gleichung

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

und beachtet dabei, daß

$$\begin{array}{l}
\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1 \\
\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1 \\
\text{etc.} ,
\end{array}$$

und daß nach §. 19 der Einleitung

$$\begin{array}{l}
\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = \cos \widehat{P_1 P_2} \\
\cos\alpha_1 \cos\alpha_3 + \cos\beta_1 \cos\beta_3 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_3 = \cos \widehat{P_1 P_3} \\
\text{etc.} ,
\end{array}$$

wo $\widehat{P_1 P_2}$ den Winkel bezeichnet, den die Richtungen der Kräfte P_1

und P_2, $\widehat{P_1 P_3}$ denjenigen, welchen die Richtungen der Kräfte P_1 und P_3 einschließen, u. s. f., so findet man

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + \text{etc.} + 2P_1P_2 \cos\widehat{P_1P_2} + 2P_1P_3 \cos\widehat{P_1P_3} + 2P_2P_3 \cos\widehat{P_2P_3} + \text{etc.}$$

oder

$$R^2 = \Sigma . P^2 + 2\Sigma . P P' \cos\widehat{P P'} \qquad (10.$$

als den gesuchten Ausdruck. Man sieht sogleich, daß er derselbe ist, wie derjenige, durch welchen eine Seite eines Vielecks berechnet wird, nur mit dem Unterschiede, daß in unserm vorstehenden Ausdrucke nicht wie dort, die innern, sondern die äußern Winkel des Vielecks genommen sind; ferner, daß der für zwei Kräfte erhaltene Lehrsatz, das sogenannte Paralellogramm der Kräfte, nur ein besonderer Fall des vorhergehenden allgemeinen Satzes ist.

Endlich besteht zwischen der Resultirenden und ihren Seitenkräften noch eine weitere allgemeine Beziehung, welche häufig angewendet und auf folgende Art aus denselben Gleichungen (7) abgeleitet wird.

Es sei MN irgend eine beliebige, durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt gezogene Gerade, und l, m, n die Winkel XMN, YMN, ZMN, welche dieselbe mit den drei Coordinatenachsen bildet. Man multiplicire die Gleichungen (7) unter der Form:

$$R \cos a = \Sigma . P \cos \alpha = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \text{etc.}$$
$$R \cos b = \Sigma . P \cos \beta = P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + P_3 \cos \beta_3 + \text{etc.}$$
$$R \cos c = \Sigma . P \cos \gamma = P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + P_3 \cos \gamma_3 + \text{etc.}$$

der Reihe nach mit cos l, cos m und cos n und addire die Producte, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} R(\cos a \cos l + \cos b \cos m + \cos c \cos n) &= \Sigma . P(\cos \alpha \cos l + \cos \beta \cos m + \cos \gamma \cos n) \\ &= P_1(\cos \alpha_1 \cos l + \cos \beta_1 \cos m + \cos \gamma_1 \cos n) \\ &\quad + P_2(\cos \alpha_2 \cos l + \cos \beta_2 \cos m + \cos \gamma_2 \cos n) \\ &\quad + \text{etc.} \end{aligned}$$

oder, wenn man den Winkel, welcher von der Richtung der Mittelkraft R mit der Geraden MN eingeschlossen wird, wieder mit $\widehat{RN}$, die von derselben Geraden mit den Richtungen der Kräfte P_1, P_2, etc. gebildeten, mit $\widehat{P_1 M}$, $\widehat{P_2 N}$, etc. bezeichnet, die Gleichung:

$$R \cos\widehat{RN} = P_1 \cos\widehat{P_1 N} + P_2 \cos\widehat{P_2 N} + \text{etc.}$$
$$= \Sigma . P \cos\widehat{PN} \, ; \qquad (11.$$

und durch diese Gleichung wird ausgesprochen, daß die Projection der Resultirenden auf eine beliebige Gerade gleich ist der algebraischen Summe der Projectionen aller Seitenkräfte auf dieselbe Gerade.

Man hat also auch, wenn man den Winkel $\widehat{RN}$ mit ϑ bezeichnet, für die drei rechtwinkligen Componenten

12.) $$R \cos\vartheta = X \cos l + Y \cos m + Z \cos n \ .$$

Fällt die Gerade MN mit der Richtung der Resultirenden zusammen, so wird $\cos\widehat{RN} = 1$, und demnach

$$R = P_1 \cos\widehat{P_1R} + P_2 \cos\widehat{P_2R} + \text{etc.}$$
$$= \Sigma . P \cos\widehat{PR} \ ;$$

d. h. die Resultirende ist gleich der algebraischen Summe der Projectionen aller Kräfte auf ihre Richtung. Als besondern Fall davon vergleiche man die zweite der Gleichungen (3) in §. 6. Für drei rechtwinklige Kräfte X, Y, Z, welche mit der Mittelkraft R die Winkel a, b, c bilden, ist demnach

$$R = X \cos a + Y \cos b + Z \cos c \ ,$$

wie sich auch aus den Gleichungen (8) ergibt. Bringt man nämlich die erste:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

unter die Form:

$$R = X\frac{X}{R} + Y\frac{Y}{R} + Z\frac{Z}{R} \ ,$$

und substituirt für $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$, $\frac{Z}{R}$ ihre Werthe (8), so findet man ebenfalls die betreffende Gleichung wieder.

§. 13.

Um das Vorhergehende, namentlich die Gleichung (12) anzuwenden, sei die Aufgabe gestellt, die in §. 11 berechnete Resultirende nach zwei unter sich rechtwinkligen Richtungen zu zerlegen, von denen die eine durch die Winkel:

$$\gamma' = 107^\circ 15' \ , \quad \varepsilon' = 75^\circ 36'$$

bestimmt ist, indem man die Werthe der Componenten $X = \Sigma . P \cos\alpha$, $Y = \Sigma . P \cos\beta$, $Z = \Sigma . P \cos\gamma$ als gegeben voraussetzt.

Die eine, in die gegebene Richtung fallende, Componente der Resultirenden ist nach §. 4 der Projection der letztern auf jene Richtung gleich, und wenn sie mit Q_1 bezeichnet wird, hat man zuerst nach Gleichung (12)

$$Q_1 = X \sin\gamma' \cos\varepsilon' + Y \sin\gamma' \sin\varepsilon' + Z \cos\gamma' .$$

Die Rechnung gibt also mit den in §. 11 gefundenen Werthen:

$$X = 6{,}77 \;,\quad Y = 8{,}16 \;,\quad Z = -26{,}06$$

Folgendes:

$\log X = 0{,}83059$	$\log Y = 0{,}91169$	$\log Z = 1{,}41597-$
$\log\sin\gamma' = 9{,}98001$	$\log\sin\gamma' = 9{,}98001$	$\log\cos\gamma' = 9{,}47209-$
$\log\cos\varepsilon' = 9{,}39566$	$\log\sin\varepsilon' = 9{,}98614$	
$\log X\cos\alpha' = 0{,}20626$	$\log Y\cos\beta' = 0{,}87784$	$\log Z\cos\gamma' = 0{,}88806+$

$$Q_1 = 1{,}608 + 7{,}548 + 7{,}728 = 16\overset{Kgr}{,}884 \;;$$

daraus zieht man dann den Winkel ϑ, welchen die Richtung der Resultirenden mit ihrer Componenten Q_1 bildet:

$$\cos\vartheta = \frac{Q_1}{R} = \cos 53^0\, 7'{,}3 \;,$$

und die zweite Componente Q_2, nämlich:

$$Q_2 = \sqrt{R^2 - Q_1{}^2} = R\sin\vartheta = 22\overset{Kgr}{,}504 \;.$$

Soll dann noch die Richtung dieser letztern Componenten bestimmt werden, so wird dieses dadurch geschehen, daß man die Winkel α'', β'', γ'' zwischen dieser Richtung und den drei Coordinatenachsen aus den drei Gleichungen:

$$\cos\alpha' . \cos\alpha'' + \cos\beta' \cos\beta'' + \cos\gamma' \cos\gamma'' = 0$$
$$\cos a \cos\alpha'' + \cos b \cos\beta'' + \cos c \cos\gamma'' = \sin\vartheta$$
$$\cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' = 1$$

berechnet, von denen die erste und zweite die Bedingungen ausdrücken, daß die gesuchte Richtung mit derjenigen der Kraft Q_1 einen rechten Winkel, mit derjenigen der Kraft R den Winkel $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$ einschließt; in denen also zugleich die Bedingung enthalten ist, daß die drei Kräfte in einer Ebene liegen.

Man kann aber auch diese letztere Bedingung unmittelbar darstellen, indem man zuerst nach §. 21 der Einleitung die drei Winkel l, m, n

bestimmt, welche die Normale zu der Ebene der Kräfte Q_1 und R mit den drei Achsen einschließt; die entsprechende Bedingung ist dann

$$\cos\alpha'' \cos l + \cos\beta'' \cos m + \cos\gamma'' \cos n = 0 ,$$

und wird statt der zweiten der obigen Gleichungen angewendet. Man zieht aus der zuletzt erhaltenen und aus der ersten der obigen Gleichungen durch aufeinanderfolgende Elimination von $\cos\beta''$ und $\cos\alpha''$

$$\cos\alpha'' (\cos l \cos\beta' - \cos m \cos\alpha') + \cos\gamma'' (\cos n \cos\beta' - \cos m \cos\gamma') = 0$$
$$\cos\beta'' (\cos l \cos\beta' - \cos m \cos\alpha') + \cos\gamma'' (\cos l \cos\gamma' - \cos n \cos\alpha') = 0.$$

Nach dem angeführten § der Einl. ist aber

$$\cos l = \frac{\cos\beta' \cos c - \cos\gamma' \cos b}{\sin\vartheta} , \quad \cos m = \frac{\cos\gamma' \cos a - \cos\alpha' \cos c}{\sin\vartheta} ,$$
$$\cos n = \frac{\cos\alpha' \cos b - \cos\beta' \cos a}{\sin\vartheta}$$

und mit der Beachtung, daß

$$\cos\alpha' \cos a + \cos\beta' \cos b + \cos\gamma' \cos c = \cos\vartheta$$

ist, ergibt sich dann

$$(\cos l \cos\beta' - \cos m \cos\alpha') \sin\vartheta = \cos c - \cos\gamma' \cos\vartheta$$
$$(\cos l \cos\gamma' - \cos n \cos\alpha') \sin\vartheta = \cos b - \cos\beta' \cos\vartheta$$
$$(\cos n \cos\beta' - \cos m \cos\gamma') \sin\vartheta = \cos a - \cos\alpha' \cos\vartheta ,$$

und es ist leicht zu sehen, daß sich die Summe der drei Quadrate der vorstehenden Werthe auf $\sin^2\vartheta$ reduzirt; daraus folgt endlich

$$\cos\alpha'' = \frac{\cos a - \cos\alpha' \cos\vartheta}{\sin\vartheta} , \quad \cos\beta'' = \frac{\cos b - \cos\beta' \cos\vartheta}{\sin\vartheta} ,$$
$$\cos\gamma'' = \frac{\cos c - \cos\gamma' \cos\vartheta}{\sin\vartheta} .$$

Wendet man diese Werthe zur unmittelbaren Bestimmung der Kraft Q_2 an, so wird

$$Q_2 = X \cos\alpha'' + Y \cos\beta'' + Z \cos\gamma''$$
$$= \frac{X \cos a + Y \cos b + Z \cos c}{\sin\vartheta} - \frac{(X \cos\alpha' + Y \cos\beta' + Z \cos\gamma') \cos\vartheta}{\sin\vartheta}$$

oder

$$Q_2 = \frac{R}{\sin\vartheta} - \frac{Q_1 \cos\vartheta}{\sin\vartheta} ,$$

woraus sich wieder

$$R = Q_1 \cos \vartheta + Q_2 \sin \vartheta$$

ergibt, wie dies in der That stattfinden muß.

Mit den gegebenen und bereits gefundenen Zahlenwerthen berechnen sich die gesuchten Winkel:

$$\alpha'' = 82^{0}\ 57',3\ ,\ \beta'' = 109^{0}\ 18',7\ ,\ \gamma'' = 159^{0}\ 0'\ ,\ \varepsilon'' = 290^{0}\ 20',8\ .$$

Um die Aufgabe durch Zeichnung zu lösen, wird man entweder die Projectionen der bekannten Richtungen der Kräfte R und Q_1 auftragen, und eine Ebene durch dieselben legen; eine zweite Ebene senkrecht zu der Richtung von Q_1 gelegt, schneidet dann die erste nach der Geraden, in welche die Richtung von Q_2 fällt. Man erhält auf diese Weise die Projectionen der Richtungen der Componenten und kann mittels des Parallelogramms in jeder der beiden Tafeln die Zerlegung der entsprechenden Projection von R nach jenen Richtungen vornehmen, wodurch die Projectionen der beiden Componenten, also auch diese selbst, und die Winkel γ'' und ε'' bekannt werden. Oder man kann durch den Endpunkt der Geraden, welche die Resultirende vorstellt, eine Ebene senkrecht auf die gegebene Richtung der Kraft Q_1 legen, und den Durchgang dieser Richtung durch jene Ebene bestimmen, wodurch ebenfalls die beiden Componenten erhalten werden, u. s. f.

Diese Andeutungen mögen genügen, um den Leser in den Stand zu setzen, die Fig. 35, welche den vorhergehenden Fall in der ersten Weise aufgelöset, darstellt, bei welcher aber die horizontale Tafel nach Oben in die vertikale umgeschlagen ist, zu verstehen, und ihn zur zeichnenden Auflösung unserer Aufgabe in einer andern Weise, sowie anderer ähnlicher Aufgaben zu veranlassen.

Zweiter Abschnitt.

Gleichgewicht des materiellen Punktes.

§. 14.

Aus der Erklärung, welche in der Einleitung von zwei gleichen Kräften gegeben wurde, folgt unmittelbar, daß ein materieller Punkt im Gleichgewicht bleiben muß, wenn an demselben zwei gleiche Kräfte längs derselben geraden Linie in entgegengesetztem Sinne angreifen. Umgekehrt ist es auch für das Gleichgewicht eines materiellen Punktes unumgänglich nothwendig, daß sich alle Kräfte, welche an demselben thätig sind, durch zwei gleiche und gerade entgegengesetzt wirkende ersetzen lassen; denn die Gesammtwirkung aller Kräfte kann nach dem vorhergehenden Abschnitte jedenfalls durch die Wirkung von zwei im entgegengesetzten Sinne thätigen Kräften vertreten werden, und der materielle Punkt wird nicht im Zustande des Gleichgewichtes sein können, wenn diese beiden Kräfte ungleich sind.

Wir verstehen übrigens hier unter Gleichgewicht im allgemeinen Sinne denjenigen Zustand des materiellen Punktes, wo alle Kräfte, sowohl bewegende als widerstehende, ihre Wirkungen gegenseitig so aufheben, daß sie keine Aenderung in dem örtlichen Befinden ihres Angriffspunktes, namentlich keine in seiner Bewegung hervorbringen können, also nicht blos die engere Bedeutung der durch die angreifenden Kräfte nicht gestörten Ruhe; denn diese setzt nur voraus, daß die bewegenden Kräfte nicht stärker sind, als die Widerstände, da die Ruhe um so mehr gesichert ist, je mehr die letztern die ersten überwiegen. Man wird übrigens leicht einsehen, daß die Bedingungen des Gleichgewichtes in unserm allgemeinen Sinne auch den Grenzen des ruhenden Gleichgewichtes entsprechen, d. h. demjenigen Zustande, wo die geringste Vermehrung der bewegenden Kraft den materiellen Punkt aus der Ruhe in Bewegung versetzt, und dieser Zustand ist im Folgenden immer zu verstehen, wenn vom Gleichgewicht im Gegensatze zur Bewegung gesprochen wird.

Verbinden wir also mit der oben ausgesprochenen nothwendigen und genügenden Bedingung für das Gleichgewicht eines materiellen Punktes die im vorhergehenden Abschnitte für die Zusammensetzung der fördernden Kräfte gefundenen Lehrsätze, so können wir daraus die Gleichgewichtsbedingungen für die verschiedenen Fälle und örtlichen Umstände ableiten, in welchen sich der materielle Punkt befinden kann. Man faßt diese letztern am besten unter drei Gesichtspunkten zusammen, und denkt sich den materiellen Punkt entweder

1) ganz frei, so daß eine Bewegung desselben nach jeder Seite hin möglich ist, oder
2) in seiner Bewegung auf eine feste Fläche beschränkt, auf welcher er jedoch noch jeden beliebigen Weg einschlagen kann, oder endlich
3) an eine feste Curve gebunden, so daß er sich nur längs derselben in dem einen oder in dem andern Sinne bewegen kann.

I. Gleichgewicht des freien materiellen Punktes.

§. 15.

Wenn an einem freien materiellen Punkte mehrere Kräfte längs derselben Richtung und in demselben Sinne angreifen, so kann, wie in §. 3 gezeigt wurde, ihre Wirkung durch die einer einzigen Kraft ersetzt werden, welche ihrer Summe gleich ist, weßhalb denn auch in diesem Falle kein Gleichgewicht stattfinden kann. Wirken dagegen mehrere Kräfte an demselben Punkte längs derselben Richtung zum Theil in positivem, zum Theil in negativem Sinne, so wird derselbe im Gleichgewicht sein, wenn die Resultirende $\Sigma . P_1$ der erstern der Mittelkraft $\Sigma . Q_1$ der letztern gleich ist, also wenn man hat

$$\Sigma . P_1 = \Sigma . Q_1 \quad \text{oder} \quad \Sigma . P_1 - \Sigma . Q_1 = 0 .$$

Es ist aber auch

$$\Sigma . P_1 - \Sigma . Q_1 = R ,$$

wenn R die Resultirende aller Kräfte bezeichnet, und demnach für das Gleichgewicht

$$R = 0 ,$$

wie dies wohl von selbst einleuchtet. Deutet man endlich den Sinn,

in welchem die Kräfte thätig sind, durch die Qualitätszeichen an, so hat man $R = \Sigma . P$, und es ergibt sich damit

13.) $$\Sigma . P = 0$$

als einzige nothwendige und genügende Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht eines Punktes, an welchem beliebig viele Kräfte längs derselben Richtung in Thätigkeit sind.

§. 16.

Zwei Kräfte P und Q, welche an demselben Punkte M Fig. 36 angreifen, deren Richtungen aber einen andern Winkel als 180° oder π zwischen sich einschließen, können diesen Punkt nie im Gleichgewicht erhalten; denn wenn man an diesem Punkte eine der P gleiche Kraft P′ in entgegengesetztem Sinne angreifen läßt, so wird diese die Wirkung von P aufheben, und der Punkt M sich so bewegen, als wenn Q allein an ihm thätig wäre, also in der Richtung MQ. Sollen aber die Kräfte P und Q sich auch das Gleichgewicht halten, oder ihre Thätigkeit gegenseitig aufheben, so müßte sich offenbar der Punkt M auch so bewegen, als wenn P′ die einzige Kraft wäre, welche auf ihn wirkt, mithin in der Richtung MP′. Da es aber unmöglich ist, daß sich derselbe Punkt in zwei verschiedenen Richtungen bewege, so können auch die Kräfte P und Q den Punkt M nicht für sich allein im Gleichgewicht halten.

Das Gleichgewicht wird aber immer durch eine dritte Kraft, welche in derselben Ebene mit den beiden andern liegt, hergestellt werden können, und es ist einleuchtend, daß diese der Mittelkraft der beiden ersten gleich und gerade entgegengesetzt sein muß. So müssen drei gleiche Kräfte P, P′, P″, Fig. 37, deren Richtungen je zwei denselben Winkel von $\frac{2}{3}\pi$ oder 120° einschließen, offenbar ihren Angriffspunkt im Gleichgewicht halten, da kein Grund denkbar ist, warum er sich lieber nach der einen, als nach der andern Richtung bewegen sollte, und die Figur zeigt sogleich, daß jede dieser Kräfte, z. B. P″, der Resultirenden R der beiden andern gleich und gerade entgegengesetzt ist.

Nehmen wir dann zwei beliebige Kräfte P und Q, Fig. 38, deren Richtungen den Winkel $PMQ = \alpha$ einschließen, so hat man nach §. 6 für ihre Mittelkraft R, deren Richtung mit der Richtung der Kraft P den Winkel ϑ bildet,

$$R : Q : P = \sin\alpha : \sin\vartheta : \sin(\alpha - \vartheta) .$$

Die dritte Kraft S, welche die beiden ersten im Gleichgewicht halten soll, muß aber der R gleich und gerade entgegengesetzt sein, also die Winkel $\pi - \vartheta$ und $\pi - (\alpha - \vartheta)$ mit den Richtungen der Kräfte P und Q einschließen; ferner weiß man, daß $\sin\vartheta = \sin(\pi - \vartheta) = \sin\beta$, $\sin(\alpha - \vartheta) = \sin[\pi - (\alpha - \vartheta)] = \sin\gamma$ ist, und damit ergibt sich, wenn S für R in die vorstehende Proportion eingeführt wird,

$$S : Q : P = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma ,$$

oder wenn man die Winkel α, β, γ durch $\widehat{PQ}$, $\widehat{PS}$, $\widehat{QS}$ bezeichnet:

$$S : Q : P = \sin\widehat{PQ} : \sin\widehat{PS} : \sin\widehat{QS} .$$

Es kann demnach von drei Kräften, welche ihren Angriffspunkt im Gleichgewicht halten, jede durch den Sinus des Winkels vorgestellt werden, den die Richtungen der beiden andern unter sich bilden, und umgekehrt werden drei Kräfte, von denen jede in demselben Verhältnisse zu dem Sinus des Winkels steht, welchen die beiden andern einschließen, ihren Angriffspunkt immer im Gleichgewicht halten; denn es wird in diesem Falle jede derselben der Mittelkraft der beiden andern gleich und in gerade entgegengesetztem Sinne thätig sein.

Mittels ähnlicher Betrachtungen wird man nun leicht den Schluß ziehen, daß drei Kräfte, welche sich gegenseitig das Gleichgewicht halten sollen, nothwendig in derselben Ebene liegen müssen, weil im entgegengesetzten Falle die Wirkung von zwei dieser Kräfte in zwei ganz verschiedenen Richtungen aufgehoben werden könnte, einmal nach dem Vorhergehenden durch eine in der Ebene dieser Kräfte liegende, und dann durch die nicht in dieser Ebene gerichtete dritte Kraft, was offenbar unmöglich ist, und umgekehrt, daß drei Kräfte, deren Richtungen nicht in derselben Ebene liegen, sich niemals im Gleichgewicht halten können.

§. 17.

Im Allgemeinen wird es für das Gleichgewicht eines materiellen Punktes, welcher sich ganz frei und ungehindert bewegen kann, und an welchem beliebig viele und nach beliebigen Richtungen wirkende Kräfte thätig sind, wie in dem besondern Falle von §. 15, jedenfalls hinreichend sein, daß die Resultirende dieser Kräfte Null wird; da sein Zustand dann offenbar derselbe ist, als wenn keine Kraft an ihm thätig wäre.

Die Bedingung: $R = 0$ ist aber auch nothwendig. Denn wenn man in dem Falle, wo die Richtungen aller Kräfte in derselben Ebene liegen, sie nach §. 8 nach zwei unter sich rechtwinkligen Richtungen

zerlegt, und die beiden Hauptcomponenten X und Y gebildet, oder das System auf diese beide zurückgeführt hat, so sieht man nach dem Vorhergehenden, daß diese rechtwinklig gerichteten Kräfte ihren Angriffspunkt nicht im Gleichgewicht halten können, wenn nicht jede für sich denselben im Gleichgewicht hält oder nach (13) Null ist, woraus auch

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = R = 0$$

folgt.

Wir erhalten dadurch in dem erwähnten Falle für das Bestehen des Gleichgewichtes die beiden Bedingungen:

14.) $$X = \Sigma . P \cos\alpha = 0 \ , \quad Y = \Sigma . P \sin\alpha = 0 \ ,$$

welche ausdrücken, daß das Bestehen des Gleichgewichtes in einer beliebigen Richtung durch das Vorhandensein des Gleichgewichtes in zwei unter sich rechtwinkligen, in der Ebene der Kräfte liegenden Richtungen bedingt wird.

Im allgemeinsten Falle, wenn die Richtungen der gegebenen Kräfte gegen drei rechtwinklige Achsen bestimmt sind; führen die Gleichungen (7) und der Satz, daß drei Kräfte, die nicht in derselben Ebene liegen, also namentlich drei unter sich rechtwinklige Kräfte ihren Angriffspunkt nicht im Gleichgewicht halten können, wenn nicht eine jede für sich Null ist, zu den drei Gleichungen:

15.) $$\begin{cases} X = \Sigma . P \cos\alpha = \Sigma . P \sin\gamma \cos\varepsilon = 0 \\ Y = \Sigma . P \cos\beta = \Sigma . P \sin\gamma \sin\varepsilon = 0 \\ Z = \Sigma . P \cos\gamma = 0 \ ; \end{cases}$$

diese drücken demnach die allgemeinen Bedingungen für das Gleichgewicht eines freien materiellen Punktes aus, an welchem beliebige Kräfte angreifen, und zeigen, daß, wenn nach drei unter sich rechtwinkligen Richtungen Gleichgewicht stattfindet, der materielle Punkt auch in jeder andern Richtung im Gleichgewicht ist, und daß umgekehrt der letztere Zustand durch das Bestehen des Gleichgewichtes längs drei unter sich rechtwinkligen Geraden bedingt wird.

Untersucht man die Gesammtwirkung der gegebenen Kräfte mittels Construction derselben nach §. 9, so wird sich im Falle des Gleichgewichtes, da die Resultirende Null ist, jedes der beiden Vielecke, welche aus den Projectionen der Kräfte entstehen, von selbst schließen, weil auch die Seite, welche im allgemeinen Falle die entsprechende Projection der Resultirenden vorstellt, Null geworden ist. Schließt sich nur eines von

beiden, so ist die Resultirende senkrecht zur Ebene dieses Vielecks, und es findet noch nicht Gleichgewicht statt.

Denkt man sich also das Vieleck im Raume, von welchem die vorherbetrachteten die Projectionen darstellen, so muß auch dieses im Falle des Gleichgewichtes geschlossen sein, und nach dem bekannten Lehrsatze von den Vielecken wird man dann die Summe der Projectionen seiner Seiten auf irgend eine Gerade gleich Null finden. Umgekehrt kann aber nicht behauptet werden, daß das Vieleck geschlossen ist, wenn die Summe der Projectionen seiner Seiten auf eine beliebige Gerade Null gibt; denn dies wird auch bei einem Vieleck, in welchem eine Seite fehlt, für jede Gerade der Fall sein, welche in der zur Richtung der fehlenden Seite senkrechten Ebene liegt. Will man also aus der Summe der Projectionen schließen, ob die Resultirende Null ist oder nicht, so muß man drei solcher Summen, und zwar in Bezug auf drei Geraden nehmen, die nicht in derselben Ebene liegen, weil dann in dem Falle, daß die Resultirende nicht Null ist, die Summe der Projectionen der Vieleckseiten wenigstens in Bezug auf eine jener Geraden ebenfalls nicht Null sein wird, und man deßhalb umgekehrt mit Sicherheit behaupten kann, daß das Polygon geschlossen ist, wenn man die Summe der Projectionen seiner Seiten auf jene drei Geraden gleich Null findet.

Dasselbe Ergebniß hätte aus der Gleichung (11):

$$R \cos \widehat{RN} = \Sigma . P \cos \widehat{PN}$$

gezogen werden können, da diese im Grunde nichts anders, als die obenangeführte Eigenschaft der Vielecke ausdrückt, und es geht aus demselben hervor, daß das Bestehen des Gleichgewichtes in drei beliebigen, nicht in einer Ebene liegenden Richtungen Bürge ist für das Bestehen des Gleichgewichtes in jeder Richtung, daß also die obengefundenen Bedingungen (15) nur einen besondern Fall dieses letztern Satzes darstellen.

§. 18.

Unsere allgemeine Gleichgewichtsbedingung fordert aber, daß sich alle Kräfte auf zwei gleiche und gerade entgegengesetzte zurückführen lassen, oder was dasselbe ist, daß jede der wirkenden Kräfte der Resultirenden aller übrigen gleich und entgegengesetzt ist; es muß sich also dieser Satz auch aus unsern Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht ableiten lassen, und in der That kann dieses auf folgende Weise geschehen.

Sind die Kräfte P_1, P_2, P_3, etc. um ihren gemeinschaftlichen Angriffspunkt im Gleichgewicht, und bezeichnet man die Resultirende aller Kräfte P_2, P_3, etc. mit Ausnahme von P_1 durch $R_,$, die Winkel ihrer Richtung mit den drei Achsen durch $a_,$, $b_,$, $c_,$, endlich die Summen:

$$P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 + \text{etc. durch } \Sigma . P_2 \cos\alpha_2$$
$$P_2 \cos\beta_2 + P_3 \cos\beta_3 + \text{etc. „ } \Sigma . P_2 \cos\beta_2$$
$$P_2 \cos\gamma_2 + P_3 \cos\gamma_3 + \text{etc. „ } \Sigma . P_2 \cos\gamma_2,$$

so ist zuerst

$$R_, \cos a_, = \Sigma . P_2 \cos\alpha_2, \quad R_, \cos b_, = \Sigma . P_2 \cos\beta_2, \quad R_, \cos c_, = \Sigma . P_2 \cos\gamma_2 .$$

und dann nach den Bedingungen (15) für das Gleichgewicht

$$\Sigma . P \cos\alpha = P_1 \cos\alpha_1 + \Sigma . P_2 \cos\alpha_2 = 0$$
$$\Sigma . P \cos\beta = P_1 \cos\beta_1 + \Sigma . P_2 \cos\beta_2 = 0$$
$$\Sigma . P \cos\gamma = P_1 \cos\gamma_1 + \Sigma . P_2 \cos\gamma_2 = 0$$

also auch

$$P_1 \cos\alpha_1 + R_, \cos a_, = 0 \qquad P_1 \cos\alpha_1 = - R_, \cos a_,$$
$$P_1 \cos\beta_1 + R_, \cos b_, = 0 \quad \text{oder} \quad P_1 \cos\beta_1 = - R_, \cos b_,$$
$$P_1 \cos\gamma_1 + R_, \cos c_, = 0 \qquad P_1 \cos\gamma_1 = - R_, \cos c_, .$$

Erhebt man diese letztern Gleichungen ins Quadrat und addirt sie, so erhält man mit Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$$
$$\cos^2 a_, + \cos^2 b_, + \cos^2 c_, = 1$$

die Gleichung:

$$P_1^2 = R_,^2$$

also auch

$$P_1 = \pm R_, .$$

Die Kräfte sind aber allgemein absolute Größen ohne Qualitätszeichen; es muß also $P = R$ sein, und damit wird

$$\cos\alpha_1 = - \cos a_, , \quad \cos\beta_1 = - b_, , \quad \cos\gamma_1 = - \cos c_, ,$$

woraus folgt, daß die Winkel α_1 und $a_,$, β_1 und $b_,$, γ_1 und $c_,$ Supplemente, und daß die Kräfte P_1 und $R_,$ längs derselben Geraden, aber im entgegengesetzten Sinne thätig sind, wie es oben ausgesprochen wurde.

Es geht daraus noch ferner hervor, daß wenn die an einem Punkte thätigen Kräfte sich nicht das Gleichgewicht halten, dieses immer durch eine einzige Kraft, welche der Resultirenden aller gegebenen Kräfte gleich und dem Sinne nach entgegengesetzt ist, aber auch nur durch diese hergestellt werden kann.

II. Gleichgewicht eines materiellen Punktes auf einer festen Fläche.

§. 19.

Wenn ein materieller Punkt nicht ganz frei ist, sondern sich auf einer festen Fläche befindet, auf welcher er sich sonst frei bewegen kann, und wenn an ihm eine Kraft angreift, deren Richtung normal zu dieser Fläche und deren Thätigkeit gegen diese Fläche gerichtet ist, die ihren Angriffspunkt also durch die Fläche hindurch bewegen will, so ist einleuchtend, daß dieser Punkt, wenn er vorher in Ruhe war, sich durch die Wirkung jener Kraft nach keiner Seite hinbewegen wird, da die Verhältnisse auf jeder Seite dieselben sind, also kein Grund denkbar ist, warum die Bewegung lieber nach dieser, als nach jener Seite erfolgen sollte, und weil der Widerstand der Fläche die Wirkung der normalen Kraft aufhebt. Es findet noch derselbe Schluß seine Anwendung, wenn an dem materiellen Punkte mehrere Kräfte thätig sind, deren Resultirende eine zur Fläche normale Richtung hat und ein Bestreben zeigt, ihren Angriffspunkt durch die Fläche hindurch zu bewegen, wobei immer vorausgesetzt bleibt, daß die Fläche fest genug ist, um diesem Streben der Resultirenden widerstehen, oder mit andern Worten, den Druck, welchen diese auf sie ausübt, ohne Aenderung ihrer Form ertragen zu können.

Unter der obengenannten Voraussetzung wird also der materielle Punkt im Gleichgewichte bleiben, ohne daß die an ihm thätigen Kräfte sich selbst das Gleichgewicht halten, oder ohne daß deren Resultirende Null ist; es genügt, wenn ihre Richtung normal zu der Fläche und dadurch dem immer ebenso großen Widerstande derselben gerade entgegengesetzt ist. Diese letztere Bedingung ist aber auch für das Gleichgewicht nothwendig; denn wenn die Resultirende eine schiefe Richtung zur Fläche hat, so kann sie immer in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, von denen die eine längs der Normalen zur Fläche, die andere dagegen in der Tangential=Ebene thätig ist, und während die erstere, der Druck auf die Fläche, durch den Widerstand der Fläche unwirksam gemacht wird, steht

der Thätigkeit der zweiten durchaus kein Hinderniß entgegen. Der Druck der Resultirenden und der Widerstand der Fläche gegen denselben, sind aber immer als zwei gleiche und gerade entgegengesetzte Kräfte anzusehen, und es ist demnach das Bestehen des Gleichgewichtes auch im gegenwärtigen Falle an unsere allgemeine Bedingung geknüpft.

In allen Fällen, die in der Natur vorkommen, wird ferner durch die zur Fläche normale Seitenkraft der Resultirenden ein Widerstand, die Reibung, hervorgerufen, welcher immer der Bewegung des materiellen Punktes, also der tangentialen Seitenkraft entgegen wirkt, und deren Intensität der Erfahrung zufolge zwar von der Beschaffenheit der Fläche abhängt, übrigens aber immer dem auf sie ausgeübten Drucke, also der normalen Componenten proportional ist. Es ist dann für das Gleichgewicht nicht mehr erforderlich, daß die Resultirende normal zur Fläche gerichtet ist, es ist hinreichend, wenn die tangentiale Seitenkraft der durch den normalen Druck hervorgebrachten Reibung gleich ist, was offenbar wieder darauf hinaus kommt, daß sich alle Kräfte, bewegende und widerstehende, auf zwei Paar gleiche und gerade entgegengesetzte zurückführen lassen.

§. 20.

Um nun diese verschiedenen Bedingungen für das Gleichgewicht analytisch auszudrücken, sei $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Fläche, auf welcher sich der materielle Punkt befindet, dessen Coordinaten demnach auch x, y, z sein werden; seien ferner P, P', etc. die Kräfte, welche an ihm thätig sind, R deren Resultirende und $X = \Sigma . P \cos\alpha$, $Y = \Sigma . P \cos\beta$, $Z = \Sigma . P \cos\gamma$ die drei rechtwinkligen Componenten derselben, endlich a, b, c die Winkel, welche ihre Richtungen mit den drei Coordinatenachsen, beziehungsweise mit jenen Componenten einschließen, so hat man zuerst:

$$\cos a = \frac{X}{R}, \quad \cos b = \frac{Y}{R}, \quad \cos c = \frac{Z}{R}.$$

Ferner gibt die Gleichung der Fläche für die Winkel zwischen der Normalen in dem Punkte xyz, und den drei Coordinatenachsen nach §. 34 der Einleitung

$$\cos\lambda = \pm V \frac{dF}{dx}, \quad \cos\mu = \pm V \frac{dF}{dy}, \quad \cos\nu = \pm V \frac{dF}{dz},$$

wo zur Abkürzung, wie dort,

$$\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}=V$$

gesetzt wurde.

Wird also zuerst auf die Reibung keine Rücksicht genommen, in welchem Falle die Resultirende mit der Normalen zusammen fallen muß, so hat man als Bedingungen des Gleichgewichtes

$$\cos a=\cos\lambda\ ,\quad \cos b=\cos\mu\ ,\quad \cos c=\cos\nu\ ,$$

oder mit den vorangehenden Werthen

$$\frac{X}{R}=\pm V\frac{dF}{dx}\ ,\quad \frac{Y}{R}=\pm V\frac{dF}{dy}\ ,\quad \frac{Z}{R}=\pm V\frac{dF}{dz}\ .$$

Eliminirt man dann aus diesen Ausdrücken das Product $\pm VR$, so findet man folgende Gleichungen:

$$X\frac{dF}{dy}-Y\frac{dF}{dx}=0\ ,\quad Z\frac{dF}{dx}-X\frac{dF}{dz}=0 \qquad (16.$$

als die beiden nothwendigen und genügenden Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht.

In den meisten Fällen wird die Untersuchung einfacher, wenn man den Widerstand, welchen die Fläche leistet, als eine unbekannte Kraft in die Rechnung einführt, von der Fläche ganz Umgang nimmt, und den Punkt als ganz frei betrachtet. Die Richtung dieses Widerstandes ist immer die desjenigen Theiles der Normalen zur Fläche, welcher auf derselben Seite der Fläche liegt, auf der sich der materielle Punkt befindet. Bezeichnet man also die unbekannte Intensität dieser normalen Kraft, welche die Fläche ersetzt, mit N, so erhält man als Componenten derselben, parallel zu den drei Coordinatenachsen,

$$\pm NV\frac{dF}{dx}\ ,\quad \pm NV\frac{dF}{dy}\ ,\quad \pm NV\frac{dF}{dz}\ ,$$

und damit als Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht

$$X\pm NV\frac{dF}{dx}=0\ ,\quad Y\pm NV\frac{dF}{dy}=0\ ,\quad Z\pm NV\frac{dF}{dz}=0\ , \qquad (17.$$

woraus wieder durch Elimination von $\pm NV$

$$X\frac{dF}{dy}-Y\frac{dF}{dx}=0\ ,\quad Z\frac{dF}{dx}-X\frac{dF}{dz}=0$$

als die beiden nothwendigen und genügenden Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht hervorgehen. Bringt man dann die vorausgehenden Gleichungen (17) unter die Form:

$$X = \mp N V \frac{dF}{dx}, \quad Y = \mp N V \frac{dF}{dy}, \quad Z = \mp N V \frac{dF}{dz},$$

und erhebt sie zum Quadrat, so gibt ihre Summe die Intensität von N durch die Gleichung:

$$N^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

welche zeigt, daß der Widerstand N der Fläche der Resultirenden R gleich ist. Vergleicht man ferner dieselben Ausdrücke mit denen, aus welchen die Gleichungen (16) erhalten wurden, so sieht man, daß N und R dem Sinne nach direct entgegengesetzt sind, wie dies als nothwendig bereits gezeigt wurde.

§. 21.

Ist die Lage des materiellen Punktes auf der Fläche gegeben, sind also die Werthe von x, y, z bestimmt, so zeigen die Gleichungen (16), wenn diese Werthe in die abgeleiteten Functionen $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$ substituirt worden, je nachdem sie beide befriedigt werden oder nicht, ob Gleichgewicht stattfinden kann oder nicht. Man kann sie zu diesem Zwecke dadurch, daß das ganze Coordinatensystem gedreht wird, bis eine Achse, z. B. die der z, mit der Normalen im Punkte xyz zusammenfällt, unter eine einfachere Form bringen.

Für die Cosinus der Winkel λ, μ, ν erhält man nämlich in diesem Falle die Werthe:

$$\cos\lambda = 0, \quad \cos\mu = 0, \quad \cos\nu = \pm 1;$$

damit werden die Gleichungen (17)

$$X' = 0, \quad Y' = 0, \quad Z' \pm N = 0,$$

und zeigen, daß die Seitenkräfte, welche in der zur Ebene der x′ y′ parallelen Tangentialebene thätig sind, sich unabhängig von der gegebenen Fläche im Gleichgewicht halten müssen, und daß die Resultirende der längs der Achse der z′ wirkenden Kräfte dem Widerstande N gleich und entgegengesetzt ist, oder die Intensität des Druckes gibt, welchen die Fläche zu tragen hat.

Werden die Gleichungen (16) nicht befriedigt, so kann man dem System eine neue Kraft P hinzufügen, welche das Gleichgewicht hervorbringt, und es ist leicht zu sehen, daß es solcher Kräfte unendlich viele gibt, da nur zwei Gleichungen zu befriedigen sind, und zur Bestimmung einer Kraft drei Stücke (Intensität und zwei Winkel) erfordert werden; daß aber die Richtung dieser Kräfte nicht ganz willkürlich ist, sondern immer in die Ebene fallen muß, welche durch die Richtung der Resultirenden R und die Normale zur Fläche gelegt werden kann, und zwar bezüglich der Lage von R auf die entgegengesetzte Seite der Normalen; denn nur unter diesen Voraussetzungen kann durch Vereinigung von R und P eine neue Resultirende R_1 entstehen, welche der Richtung nach mit der Normalen zusammenfällt, und so den materiellen Punkt im Gleichgewicht zu erhalten vermag.

Zu demselben Schlusse führen auch die Gleichungen (16). Diese können nämlich zuerst unter die Form gebracht werden:

$$X V \frac{dF}{dy} - Y V \frac{dF}{dx} = 0 \;, \quad Z V \frac{dF}{dx} - X V \frac{dF}{dz} = 0 \;,$$

oder wenn man die Winkel λ, μ, ν einführt:

$$X \cos\mu - Y \cos\lambda = 0 \;, \quad Z \cos\lambda - X \cos\nu = 0 \;.$$

Denkt man sich dann die Resultirende R durch eine Gerade vorgestellt, so können die Größen X, Y, Z als die Coordinaten des Endpunktes oder auch, R als veränderlich genommen, eines beliebigen Punktes dieser Geraden angesehen werden; die vorhergehenden Gleichungen werden dann die Gleichungen dieser Geraden, und zugleich nach §. 18 der Einleitung die Gleichungen einer zur Normalen parallelen Geraden. Fügt man nun dem Systeme, für welches diese Gleichungen nicht stattfinden, eine neue Kraft P hinzu, so werden diese Gleichungen die Form annehmen:

$$\left.\begin{aligned} (Y + P\cos\beta)\frac{dF}{dx} - (X + P\cos\alpha)\frac{dF}{dy} &= 0 \\ (Z + P\cos\gamma)\frac{dF}{dx} - (X + P\cos\alpha)\frac{dF}{dz} &= 0 \end{aligned}\right\},$$

und nehmen mittels einer ähnlichen Vorstellungsweise, indem man nun die Größen X, Y, Z als die unveränderlichen Coordinaten des Endpunktes der Geraden betrachtet, welche die Resultirende R der Größe und Richtung nach vorstellt, und indem man die veränderlichen Coor-

dinaten des Endpunktes von P, welche den Größen P $\cos\alpha$, P $\cos\beta$, P $\cos\gamma$ proportional sind, mit x, y, z bezeichnet, die Form an:

$$18.)\quad \left\{ \begin{array}{l} (y+Y)\cos\lambda-(x+X)\cos\mu=0 \\ (z+Z)\cos\lambda-(x+X)\cos\nu=0 \end{array} \right. ;$$

sie stellen dann die Gleichungen einer Geraden vor, welche zur Normalen parallel und durch einen Punkt gezogen ist, dessen Coordinaten — X, — Y, — Z sind. Sind demnach MN, Fig. 39, die Normale zur gegebenen Fläche, MR die Resultirende der gegebenen Kräfte, und demnach X, Y, Z die Coordinaten des Punktes R, so werden — X, — Y, — Z die Coordinaten des Punktes R′ auf der Verlängerung von MR und R′P wird die Gerade sein, welche durch die letzten Gleichungen dargestellt wird und offenbar in der Ebene der Geraden MN und MR liegt. Es kann also jeder Punkt dieser Geraden R′P als Endpunkt der gesuchten Kraft P angenommen werden, welche den Punkt M im Gleichgewicht hält. Die kleinste dieser Kräfte ist natürlich die von M auf die R′P gefällte Senkrechte MP_1, welche zugleich auf der MN senkrecht ist, und demnach in die Tangential-Ebene fällt. Die Congruenz der Dreiecke MRT und $MR'P_1$ gibt dann auch $MT = MP_1$, woraus folgt, daß die kleinste Kraft, welche den materiellen Punkt im Gleichgewicht zu halten vermag, der nach der Tangential-Ebene thätigen Seitenkraft von R gleich und direct entgegengesetzt ist und demnach durch R $\sin\vartheta$ ausgedrückt wird, wenn ϑ den Winkel RMN zwischen der Richtung der Kraft R und der Normalen bezeichnet. Es darf dabei noch bemerkt werden, daß die Gerade MR′ eine Scheidegrenze für die verschiedenen Kräfte P bildet, je nachdem der Punkt M auf der converen oder auf der concaven Seite der Fläche liegt, und daß der Druck, den die Fläche nach Hinzufügung der Kraft P zu tragen hat, durch die neue Resultirende R_1 von R und P dargestellt wird.

Endlich können die Gleichungen (16) in Verbindung mit der Gleichung der Fläche $F(x, y, z) = 0$ dazu dienen, die Coordinaten x, y, z des Ortes auf der letztern zu bestimmen, wo der materielle Punkt, welcher der Wirkung eines gegebenen Systems von Kräften unterworfen ist, im ruhenden Gleichgewicht bleiben kann, sei es, daß diese Kräfte immer parallele Richtungen und dieselben Intensitäten behalten, oder daß diese Eigenschaften von der Lage des Angriffspunktes abhängig sind.

Es wird solcher Orte auf einer krummen Fläche im Allgemeinen mehrere geben, das ruhende Gleichgewicht des materiellen Punktes findet aber nicht in allen auf dieselbe Weise statt. Nimmt man z. B. eine Cylinderfläche, deren zur Achse senkrechter Schnitt eine Ellipse AMBM′,

Fig. 40, ist, und wird vorausgesetzt, daß die Kräfte, welche auf den materiellen Punkt wirken, unabhängig sind von seiner Lage, und daß die Normale MR die Richtung ihrer Resultirenden vorstellt, so wird der Punkt in M außen auf der Cylinderfläche im Gleichgewicht bleiben. Er wird ebenso in M', wo die Normale M'R' der ersten parallel ist, aber nur auf der innern Seite der Fläche, im Gleichgewicht sein. Diese beiden Lagen unterscheiden sich aber hauptsächlich dadurch, daß, wenn man den materiellen Punkt in M ein wenig aus seiner Lage entfernt, derselbe fortfahren wird, sich in derselben Richtung fortzubewegen, während er ein wenig von M' entfernt, wieder nach M' in die Gleichgewichtslage zurückkehrt. Man nennt deßhalb die letztere Lage die beständige (stabile) Gleichgewichtslage, die erstere die unbeständige (labile) Gleichgewichtslage. Man unterscheidet noch einen dritten Fall, die gleichgültige (indifferente) Gleichgewichtslage, welche aber nur auf der Ebene stattfinden kann, wo der materielle Punkt weder in die Gleichgewichtslage zurückkehrt, noch sich von derselben entfernt, wenn er daraus verrückt wird, da er sich in jedem Punkte der Ebene auf gleiche Weise im Gleichgewicht befindet.

§. 22.

Nehmen wir nun zugleich auf die durch den normalen Druck entstehende Reibung Rücksicht, bezeichnen, wie vorher, den Widerstand der Fläche, welcher jenem Drucke gleich und entgegengesetzt ist, mit N, und drücken das Verhältniß des Druckes zur Reibung mit 1 : f aus, so wird die Intensität dieser letztern durch fN vorgestellt; ihre Richtung liegt in der Tangential-Ebene und ist der in dieser Ebene thätigen Seitenkraft der Resultirenden R entgegengesetzt. Man hat aber für den Winkel ϑ zwischen dieser letztern und der Normalen, wenn a, b, c die Winkel zwischen der Richtung der Resultirenden und den drei Coordinatenachsen, λ, μ, ν die Winkel zwischen diesen und der Normalen bezeichnen,

$$\cos\vartheta = \cos a \cos\lambda + \cos b \cos\mu + \cos c \cos\nu \ ,$$

und die genannte Seitenkraft T ist gegeben durch

$$T = R \sin\vartheta \ ,$$

woraus sich dann nach der oben am Ende des §. 19 ausgesprochenen Bedingung für das Gleichgewicht die Gleichung ergibt:

$$T = fN \ .$$

Es ist aber auch

$$N = R \cos \vartheta \ ,$$

und sonach wird die Bedingung für das Gleichgewicht

$$\sin \vartheta = f \cos \vartheta \text{ oder } \tan \vartheta = f \ ,$$

woraus folgt, daß die Tangente des Winkels, welchen die Resultirende mit der Normale bildet, dem Verhältnisse f zwischen dem normalen Druck und der Reibung, das gewöhnlich Reibungscoeffizient genannt wird, gleich sein muß.

Diese Bedingung kann im Allgemeinen wieder in mehreren Punkten der gegebenen Fläche erfüllt werden, und es wird hier eine ähnliche Verschiedenheit in den Gleichgewichtslagen eintreten, wie in dem Falle, wo keine Reibung stattfindet. Zwischen beiden Fällen besteht jedoch der Unterschied, daß in unserm jetzigen, wo die Reibung berücksichtigt wird, der Punkt in die stabile Lage nur dann zurückkehrt, wenn er nach der Seite hingerückt wird, welche der Wirkung der Kräfte entgegen ist, während diese Verrückung in der nicht stabilen (labilen) Lage nach der Seite hin geschehen muß, wohin die Kräfte ohnehin den Punkt bewegen wollen, da derselbe bei entgegengesetzter Verrückung in beiden Lagen in Ruhe bleibt.

Wenn die gegebenen Kräfte die obige Bedingung nicht erfüllen, so kann das Gleichgewicht immer durch eine Kraft P hergestellt werden, und man sieht leicht ein, daß, da nur eine Bedingungsgleichung zu befriedigen ist, bei der Wahl dieser Kraft eine viel größere Freiheit gestattet ist, als in dem Falle, wo keine Reibung stattfindet. So kann z. B. die Richtung ganz beliebig genommen werden, und es bleibt dann nur die Intensität der neuen Kraft und der Sinn, in welchem sie angreifen muß, zu bestimmen übrig. Zu diesem Zwecke kann man, damit die Ausdrücke einfacher werden, wieder die Normale zur gegebenen Fläche als Achse der z annehmen, dann die Kräfte N und fN, von denen die erste längs der Achse der z, die zweite in der Ebene der xy wirkt, und mit der Achse der x einen unbekannten Winkel ξ bildet, in die Gleichungen des Gleichgewichtes eines freien Punktes einführen; diese nehmen dadurch die Form an:

$$\left.\begin{array}{l} P\cos\alpha + X + fN\cos\xi = 0 \\ P\cos\beta + Y + fN\sin\xi = 0 \\ P\cos\gamma + Z + N \qquad\quad = 0 \end{array}\right\} ,$$

und wenn aus denselben N und ξ eliminirt werden, so findet man

$$(P\cos\alpha + X)^2 + (P\cos\beta + Y)^2 = f^2(P\cos\gamma + Z)^2 \quad (19.$$

oder

$$P^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta - f^2\cos^2\gamma) + 2P(X\cos\alpha + Y\cos\beta - f^2 Z\cos\gamma)$$
$$+ X^2 + Y^2 - f^2 Z^2 = 0 \ .$$

Ersetzt man hier $\cos^2\alpha + \cos^2\beta$ durch $1 - \cos^2\gamma$, bezeichnet den Winkel, den die Richtungen der Kräfte P und R unter sich bilden, durch η, wodurch nach §. 12

$$X\cos\alpha + Y\cos\beta = R\cos\eta - Z\cos\gamma \ ,$$

wird, beachtet, daß $X^2 + Y^2 = R^2 - Z^2$, und drückt $1 + f^2$ durch k^2 aus, so wird der voranstehende Ausdruck

$$P^2(1 - k^2\cos^2\gamma) + 2P(R\cos\eta - k^2 Z\cos\gamma) + R^2 - k^2 Z^2 = 0 \ ,$$

und gibt die Werthe der Kraft P, welche den materiellen Punkt im Gleichgewicht erhält, wenn die Winkel γ und η, welche die Richtung von P mit der Normalen und der Richtung der Resultirenden R bildet, bestimmt sind.

Man schließt daraus sogleich, daß es im Allgemeinen für dieselbe Richtung zwei Werthe für P oder zwei Kräfte gibt, welche das Gleichgewicht herzustellen vermögen. Es kann dieser Gleichung aber noch eine andere Form gegeben werden, wenn man $f = \tang\varrho$ setzt, wonach $\varrho < \vartheta$ sein wird, und $1 + f^2 = k^2 = \frac{1}{\cos^2\varrho}$; dann ist auch $Z = R\cos\vartheta$, und man erhält damit die Gleichung:

$$P^2(\cos^2\varrho - \cos^2\gamma) + 2PR(\cos\eta\cos^2\varrho - \cos\vartheta\cos\gamma) + R^2(\cos^2\varrho - \cos^2\vartheta) = 0,$$

woraus man die Werthe zieht:

$$P = R\,\frac{\cos\eta\cos^2\varrho + \cos\vartheta\cos\gamma \pm \cos\varrho\sqrt{\cos^2\gamma - 2\cos\eta\cos\gamma\cos\vartheta + \cos^2\vartheta - \cos^2\varrho\sin^2\eta}}{\cos^2\gamma - \cos^2\varrho} \ .$$

Soll also die Richtung von P mit der Normalen zusammen fallen, dann ist $\gamma = 0$, $\eta = \vartheta$, und der vorstehende Werth von P wird nach einigen Reductionen

$$P = R\,\frac{\sin(\vartheta \pm \varrho)}{\sin\varrho} \ .$$

Setzt man dagegen $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, $\eta = \frac{1}{2}\pi + \vartheta$, in welchem Falle die Richtung von P in die Durchschnittslinie der Tangential-Ebene und der durch die Kraft R gelegten Normal-Ebene fällt, so findet man

$$P = R\,\frac{\sin(\vartheta \pm \varrho)}{\cos\varrho}\ ;$$

diese Werthe kommen auch, wie leicht zu sehen, auf die folgenden zurück:

$$P = R \sin\vartheta \pm f R \cos\vartheta\ ,$$

von denen der zweite sich auch auf anderem Wege leicht ableiten läßt.

§. 23.

Solcher einfachen Werthe könnten leicht noch mehrere gefunden werden; um aber alle gleichsam mit einem Blicke zu umfassen, werden wir in der Gleichung:

$$(P\cos\alpha + X)^2 + (P\cos\beta + Z)^2 = f^2\,(P\cos\gamma + Z)^2$$

wieder $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$ durch x, y, z ersetzen, und sie wie X, Y, Z als die Coordinaten eines Punktes betrachten; dadurch wird dieselbe

20.) $(x+X)^2 + (y+Y)^2 = f^2(z+Z)^2 = \tang^2\varrho\,(z+Z)^2$.

und kann nun als die Gleichung einer Kegelfläche angesehen werden, deren Scheitel durch die Coordinaten $-X$, $-Y$, $-Z$ bestimmt, deren Achse der Achse der z oder der Normalen parallel ist, und deren Erzeugende mit dieser den Winkel ϱ bildet. Verlängert man also die Richtung der Resultirenden MR, Fig. 41, um ein gleiches Stück MR′, zieht durch R′ eine Parallele R′O zur Normalen MN, und eine zweite Gerade R′P, welche mit jener einen Winkel ϱ bildet, dessen Tangente dem Reibungs-Coeffizienten f gleich ist, und läßt diese zweite Gerade sich um die erste herumdrehen, so wird diese die in der Figur angedeutete Kegelfläche beschreiben, welche alle Endpunkte der Kräfte P enthält; d. h. jede Gerade MP, die von dem Punkt M zu irgend einem Punkte P dieser Kegelfläche gezogen werden kann, wird der Größe und Richtung nach eine Kraft P vorstellen, welche den Punkt M im Gleichgewicht hält. Die kleinste dieser Kräfte wird offenbar durch die Senkrechte dargestellt, welche von M auf die zunächst liegende Erzeugende der Kegelfläche gefällt werden kann. Diese liegt aber mit der Normalen und der Kraft R in derselben Ebene, und da Winkel OR′M $= \vartheta$, Winkel OR′P $= \varrho$ ist, so hat man

$$MP = R \sin(\vartheta - \varrho)$$

für die Intensität der kleinsten Kraft; die Winkel, welche ihre Richtung mit der Normale und der Resultirenden R bildet, ergeben sich leicht; sie sind:

$$\gamma = \frac{1}{2}\pi - \varrho\ , \quad \eta = \frac{1}{2}\pi + \vartheta - \varrho\ ,$$

wodurch denn auch ihre Lage bestimmt ist.

Endlich ist noch zu erwähnen, daß die beiden Kräfte, welche sich im Allgemeinen für jede Richtung sowohl durch unsere Kegelfläche, wie durch den analytischen Werth von P ergeben, das Gleichgewicht nicht auf dieselbe Weise herstellen; denn während die Kraft P_1, Fig. 41, z. B. der Kraft R mit Hülfe der Reibung das Gleichgewicht hält, stellt, wie leicht zu sehen, die Kraft P_2 diesen Zustand gegen die Reibung und die Kraft R her; der analytische Werth von P und unsere Kegelfläche umfassen demnach alle möglichen Fälle für die Grenzen des ruhenden Gleichgewichtes zwischen der Kraft R, der Kraft P und der erzeugten Reibung, sei es, daß diese zu Gunsten der ersten, oder der zweiten jener Kräfte wirkt; der Grund davon liegt einfach darin, daß die Größe f nur in der zweiten Potenz in jenem Ausdrucke vorkommt, also ebensowohl positiv als negativ, d. h. sowohl in dem einen, wie in dem andern Sinne genommen werden kann. Für das ruhende Gleichgewicht wird es demnach genügen, wenn die Kraft P zwischen den beiden Werthen liegt, welche ihrer Richtung entsprechen, und es wird am meisten gesichert sein, wenn die Intensität jener Kraft die Mitte hält zwischen diesen Werthen. Für gewisse Richtungen gibt es jedoch nur einen Werth für P; sie liegen alle in den beiden berührenden Ebenen, welche durch den Punkt M an die Kegelfläche gelegt werden können.

III. Gleichgewicht des materiellen Punktes auf einer festen Curve.

§. 24.

Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich nun leicht auch auf den Fall ausdehnen, wo der materielle Punkt, an welchem beliebige Kräfte angreifen, auf einer gegebenen Curve oder auf der Durchschnittslinie zweier gegebenen Flächen bleiben muß, vorausgesetzt, daß diese Flächen oder jene Curve hinreichende Festigkeit besitzen, um der durch

die Wirkung jener Kräfte beabsichtigten Aenderung ihrer Gestalt zu widerstehen.

Es ist nach dem Frühern sogleich einleuchtend, daß es bei Vernachlässigung der Reibung für das Gleichgewicht des Punktes M nothwendig und genügend ist, wenn die Resultirende aller Kräfte zur Curve, beziehungsweise zu ihrer Tangente senkrecht gerichtet ist, ihre Richtung also in der Normalebene liegt, die durch ihren Angriffspunkt geht. Sind also wieder a, b, c die Winkel zwischen der Richtung der Resultirenden und den drei Coordinatenachsen und

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0$$

die Gleichungen der beiden Flächen, aus welchen man durch Elimination

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, z) = 0,$$

als Gleichungen ihrer Durchschnittscurve erhalten kann, so hat man zuerst für die Winkel l, m, n, welche die Tangente mit den drei Achsen bildet, nach §. 26 der Einleitung

$$\cos l = \frac{dx}{ds}, \quad \cos m = \frac{dy}{ds}, \quad \cos n = \frac{dz}{ds};$$

ferner ist

$$\cos a = \frac{X}{R}, \quad \cos b = \frac{Y}{R}, \quad \cos c = \frac{Z}{R},$$

und dadurch ergibt sich für die Bedingung, daß die Resultirende zur Tangente senkrecht ist, die einzige Gleichung:

21.) $$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = 0$$

oder, wenn wie gewöhnlich x die unabhängige Veränderliche ist,

$$X + Y\frac{dy}{dx} + Z\frac{dz}{dx} = 0,$$

worin die Werthe der Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ aus den obigen Gleichungen der Curve eingeführt werden müssen.

Wenn diese Bedingungsgleichung nicht befriedigt wird, so kann man die Coordinaten x, y, z des Angriffspunktes der Kräfte veränderlich annehmen, und durch Verbindung der letzten Gleichung mit denen der Curve ihre Werthe für den Ort auf dieser bestimmen, wo der materielle Punkt im Gleichgewicht bleiben wird. Es gilt dann in Betreff der

Verschiedenheit der Gleichgewichtslagen auf derselben Curve das nämliche, was in dem frühern Falle für die Flächen bemerkt wurde.

Soll aber dieser Punkt in seiner gegebenen Lage durch eine neue Kraft P im Gleichgewicht erhalten werden, so wird man diese in die Bedingungsgleichung (21) einführen, wodurch sie die Form annimmt:

$$(X+P\cos\alpha)\frac{dx}{ds}+(Y+P\cos\beta)\frac{dy}{ds}+(Z+P\cos\gamma)\frac{dz}{ds}=0$$

oder, wenn man $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$ durch x', y', z' ersetzt,

$$(X+x')\frac{dx}{ds}+(Y+y')\frac{dy}{ds}+(Z+z')\frac{dz}{ds}=0\,; \qquad (22.$$

sie stellt dann eine zur Normal-Ebene parallele Ebene vor, welche durch den Punkt $-X$, $-Y$, $-Z$ geht, und zeigt, daß alle Geraden, die einen Punkt dieser Ebene mit dem materiellen Punkte M verbinden, der Größe und Richtung nach die Kräfte P vorstellen, welche der Forderung, den letztern Punkt im Gleichgewichte zu halten, Genüge leisten. Die kleinste dieser Kräfte wird offenbar durch das zwischen der Normal-Ebene und der ihr parallelen Ebene liegende Stück der Tangente vorgestellt; man hat dann

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}\,,\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds}\,,\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}$$

und demnach mit der Beachtung, daß

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1\,,$$

$$P=-\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right).$$

Die zweite Seite dieser Gleichung drückt aber nach §. 12 die Projection der Resultirenden auf die Tangente aus, und es folgt daraus, was ohnehin klar ist, daß die kleinste Kraft P dieser Projection oder Seitenkraft gleich und entgegengesetzt sein muß.

§. 25.

Aus dem eben Gesagten ist ferner zu schließen, daß die Gleichung (21) auch die einleuchtende Bedingung ausdrückt, für das Gleichgewicht müsse die längs der Tangente wirkende Seitenkraft der Resultirenden Null sein. Zu diesem Schlusse, so wie zur Gleichung (21) kann man auch wieder auf folgende Weise gelangen.

Seien N und N' zwei unbekannte Kräfte, welche den Widerstand der beiden gegebenen Flächen, auf deren Durchschnittscurve der materielle Punkt bleiben muß, darstellen, l, m, n und l', m', n' die Winkel ihrer zu den Flächen normalen Richtungen mit den Coordinatenachsen; fügt man diese beiden Kräfte dem System der gegebenen Kräfte hinzu, so kann der Punkt als frei betrachtet werden, und die Gleichungen für das Gleichgewicht werden:

$$\left.\begin{array}{l} N \cos l + N' \cos l' + X = 0 \\ N \cos m + N' \cos m' + Y = 0 \\ N \cos n + N' \cos n' + Z = 0 \end{array}\right\} .$$

Die Winkel l, m, n und l', m', n' zwischen den Coordinatenachsen und den Normalen zu beiden Flächen, welche mit der gemeinschaftlichen Tangente rechte Winkel bilden, sind wie in §. 20 durch die Ausdrücke

$$\cos l = \pm V_1 \frac{dF_1}{dx}, \quad \cos m = \pm V_1 \frac{dF_1}{dy}, \quad \cos n = \pm V_1 \frac{dF_1}{dz},$$

$$\cos l' = \pm V_2 \frac{dF_2}{dx}, \quad \cos m' = \pm V_2 \frac{dF_2}{dy}, \quad \cos n' = \pm V_2 \frac{dF_2}{dz}$$

gegeben, wo V_1 und V_2 den dem V entsprechenden Werth in Bezug auf die Functionen F_1 und F_2 bezeichnen. Multiplicirt man nun die erste der obigen Gleichungen mit $\frac{dx}{ds}$, die zweite mit $\frac{dy}{ds}$, die dritte mit $\frac{dz}{ds}$, und beachtet, daß

$$\frac{dx}{ds} \cos l + \frac{dy}{ds} \cos m + \frac{dz}{ds} \cos n = 0$$

$$\frac{dx}{ds} \cos l' + \frac{dy}{ds} \cos m' + \frac{dz}{ds} \cos n' = 0,$$

so gibt die Summe derselben wie oben die Gleichung:

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} = 0$$

als einzige nothwendige Bedingung für das Gleichgewicht. Betrachtet man in derselben X, Y, Z als laufende Coordinaten, so stellt sie nach §. 26 der Einleitung die Gleichung der Normal-Ebene vor, und spricht demnach aus, daß der Endpunkt der Resultirenden in dieser Ebene liegen muß, wenn Gleichgewicht stattfinden soll. Bringt man ferner die obigen Gleichungen auf die Form:

$$\left.\begin{array}{r} N\cos l + N'\cos l' = -X \\ N\cos m + N'\cos m' = -Y \\ N\cos n + N'\cos n' = -Z \end{array}\right\}$$

und erhebt sie zum Quadrat, so gibt ihre Summe den Ausdruck:

$$N^2 + N'^2 + 2NN'\cos\psi = X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2,$$

worin

$$\cos\psi = \cos l \cos l' + \cos m \cos m' + \cos n \cos n'$$

den Cosinus des Winkels ausdrückt, den die beiden Normalen unter sich bilden, und woraus folgt, daß die beiden Widerstände N und N′ den Componenten der Resultirenden nach diesen Normalen gleich sind.

Man kann aber auch das Coordinatensystem so drehen, daß die Ebene der yz mit der Normal-Ebene zur Curve, und demnach die Achse der x mit der Tangente zusammenfällt. Es wird dann

$$\frac{dx}{ds} = 1, \quad \frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{dz}{ds} = 0,$$

$$\cos l = 0, \quad \cos l' = 0,$$

und damit reduziren sich die obigen Gleichungen auf folgende:

$$\left.\begin{array}{r} X' = 0 \\ N\cos m + N'\cos m' + Y' = 0 \\ N\cos n + N'\cos n' + Z' = 0 \end{array}\right\},$$

von denen die erste die Bedingung des Gleichgewichtes ausdrückt, nämlich, daß die Seitenkraft der Resultirenden nach der Tangente Null sein muß, während die beiden folgenden die Werthe von N und N′ durch die normalen Seitenkräfte Y′ und Z′ bestimmen.

§. 26.

Um nun auch in diesem Falle die Reibung zu berücksichtigen, setze ich zuerst voraus, daß die beiden Flächen, deren Durchschnitt die gegebene Curve bildet, von gleicher Beschaffenheit seien, so daß für beide dasselbe Verhältniß 1 : f zwischen Druck und Reibung stattfindet. Ist dann ϑ der Winkel zwischen der Resultirenden und der Normalebene, also $R\sin\vartheta$ die nach der Tangente gerichtete, $R\cos\vartheta$ die normale Seitenkraft, so wird es für das Gleichgewicht jedenfalls genügend sein, daß man hat

$$fR\cos\vartheta = R\sin\vartheta,$$

woraus wie oben

$$\tang \vartheta = f$$

folgt. Der Winkel ϑ wird bestimmt durch die Gleichung:

$$R \sin \vartheta = X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} .$$

Die eben ausgesprochene Bedingung ist aber für das Gleichgewicht nicht nothwendig; denn nimmt man die Gleichungen am Ende des vorigen §, und fügt die durch die Widerstände N und N' entstehenden Kräfte f N und f' N' hinzu, indem man nun auch die beiden Flächen von ungleicher Beschaffenheit voraussetzt, so daß für die eine Fläche das Verhältniß zwischen Druck und Reibung 1 : f, für die andere 1 : f' ist, so kann man den Punkt wieder als ganz frei betrachten, und man erhält als Bedingungen für das Gleichgewicht

$$\left.\begin{array}{l} fN + f'N' + X = 0 \\ N \cos m + N' \cos m' + Y = 0 \\ N \cos n + N' \cos n' + Z = 0 \end{array}\right\} ,$$

da die Achse der x in der Richtung der Kräfte f N und f' N' liegt. Die beiden letzten dieser Gleichungen geben die Werthe von N und N', nämlich:

$$N = -\frac{Y \cos n' - Z \cos m'}{\cos m \cos n' - \cos n \cos m'} , \quad N' = \frac{Y \cos n - Z \cos m}{\cos m \cos n' - \cos n \cos m'} ,$$

oder, da $\cos n = \sin m$, $\cos n' = \sin m'$, und $m' - m = \psi$ ist, wenn m und m' die Winkel YMN und YMN', Fig. 42, sind, welche die beiden Normalen mit der Achse der y oder mit der Richtung der Seitenkraft Y einschließen, und ψ den Winkel NMN' bezeichnet, welchen sie unter sich bilden,

$$N = -\frac{Y \sin m' - Z \cos m'}{\sin \psi} , \quad N' = -\frac{Z \cos m - Y \sin m}{\sin \psi} .$$

Man kann dann noch den Winkel YMR', welchen die Projection R' der Resultirenden R in der Ebene der yz mit der Achse der y einschließt, durch η, den mit der Richtung der Kraft N gebildeten Winkel NMR' durch ν bezeichnen, so wird

$$Y = R \cos \vartheta \cos \eta , \quad Z = R \cos \vartheta \sin \eta ,$$

und damit

$$Y \sin m' - Z \cos m' = R \cos \vartheta (\sin m' \cos \eta - \cos m' \sin \eta)$$
$$= R \cos \vartheta \sin (m' - \eta) = R \cos \vartheta \sin (\psi - \nu),$$
$$Z \cos m - Y \sin m = R \cos \vartheta (\sin \eta \cos m - \cos \eta \sin m)$$
$$= R \cos \eta \sin (\eta - m) = R \cos \vartheta \sin \nu .$$

Die Werthe von N und N′ sind demnach, wie leicht vorherzusehen war, die der Componenten von $R \cos \vartheta$, nämlich:

$$N = -\frac{R \cos \vartheta \sin (\psi - \nu)}{\sin \psi}, \quad N' = -\frac{R \cos \vartheta \sin \nu}{\sin \psi};$$

und die erste der obigen Gleichungen wird dadurch

$$R \sin \vartheta = \frac{R \cos \vartheta}{\sin \psi} [f \sin (\psi - \nu) + f' \sin \nu];$$

die nothwendige und genügende Bedingung für das Gleichgewicht ist also

$$\tang \vartheta = \frac{f \sin (\psi - \nu) + f' \sin \nu}{\sin \psi}. \qquad (23.$$

Wird wie früher $f' = f$, so läßt sich diese Gleichung vereinfachen; sie wird nach einigen Reductionen

$$\tang \vartheta = f \frac{\cos(\frac{1}{2} \psi - \nu)}{\cos \frac{1}{2} \psi} \qquad (23^a.$$

und zeigt, daß $\tang \vartheta$ im Allgemeinen größer sein kann als f, da $\cos(\frac{1}{2} \psi - \nu)$ immer größer ist, als $\cos \frac{1}{2} \psi$, wenn ν nicht größer wird als ψ, was unter den gemachten Voraussetzungen nicht stattfinden kann. Es geht ferner daraus hervor, daß es im jetzigen Falle, wenn nämlich die Reibung berücksichtigt wird, nicht gleichgültig ist, durch welche Flächen die gegebene Curve gebildet wird, und welche Winkel die Projection der Resultirenden in der Normalebene mit den Normalen der beiden Flächen bildet. Sind diese letztern z. B. senkrecht zu einander, und halbirt die genannte Projection ihren Winkel, so hat man

$$\tang \vartheta = f \sqrt{2};$$

wird aber $\nu = 0$, und dies ist der Fall, wenn die Resultirende mit

einer der Normalen und der Tangente in derselben Ebene liegt, so ergibt sich

$$\tang \vartheta = f ,$$

als wenn die zweite Fläche nicht vorhanden wäre.

§. 27.

Wenn die vorhergehenden Bedingungen durch die gegebenen Kräfte nicht erfüllt werden, so substituirt man wieder in die drei Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts im vorigen §. die Summen: $X + P\cos\alpha$, $Y + P\cos\beta$, $Z + P\cos\gamma$ statt X, Y und Z, und eliminirt die Unbekannten N und N'; dieses wird einfach dadurch erreicht, daß man in den obengefundenen Werthen von N und N' dieselben Substitutionen vornimmt, wodurch man findet:

$$N\sin\psi = -[(Y + P\cos\beta)\sin m' - (Z + P\cos\gamma)\cos m']$$
$$N'\sin\psi = -[(Z + P\cos\gamma)\cos m - (Y + P\cos\beta)\sin m].$$

Wenn man dann die erste jener Gleichungen mit $\sin\psi$ multiplicirt, und die vorstehenden Werthe einführt, so ergibt sich

$$(X + P\cos\alpha)\sin\psi = (Y + P\cos\beta)(f\sin m' - f'\sin m) + (Z + P\cos\gamma)(f'\cos m - f\cos m') ,$$

und für $f = f'$ mit einigen Reductionen

$$(X + P\cos\alpha)\cos\frac{1}{2}\psi = f(Y + P\cos\beta)\cos(\frac{1}{2}\psi + m) + f(Z + P\cos\gamma)\sin(\frac{1}{2}\psi + m)$$

als einzige Gleichung zur Bestimmung der Kraft P und ihrer Richtung.

Diese Gleichungen können einfacher werden dadurch, daß man die Achse der y mit der Normalen N zusammenfallen läßt, während die der x wie früher in der Tangente liegt, und die Größen X, Y, Z, $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$ auf diese neuen Achsen bezogen sind. Es wird dann $m = 0$, $m' = \psi$, und man hat allgemein

$$(P\cos\alpha + X)\sin\psi = (P\cos\beta + Y) f\sin\psi + (P\cos\gamma + Z)(f' - f\cos\psi) ;$$

also für $f' = f$ einfacher

$$P\cos\alpha + X = f(P\cos\beta + Y) + (P\cos\gamma + Z) f \tang\frac{1}{2}\psi .$$

Werden endlich $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$ als Coordinaten des Endpunktes der Geraden genommen, welche die Kraft P der Größe und Richtung nach vorstellt, und mit x, y, z bezeichnet, so erhalten die beiden letztern Gleichungen die Formen:

$$\left.\begin{array}{c}(x+X)\sin\psi=(y+Y)f\sin\psi+(z+Z)(f'-f\cos\psi)\\ x+X=f(y+Y)+(z+Z)f\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\psi\,;\end{array}\right\}\quad(24.$$

eine jede stellt also die Gleichung einer Ebene dar, welche durch einen Punkt $-X, -Y, -Z$ geht, und es ist aus ihnen zu schließen, daß bei einer jeden der Riß in der Ebene der xy, d. h. in der Ebene der Tangente und der Normale N, mit dieser letztern (der Achse der y) einen Winkel ϱ bildet, für welchen $f = \mathrm{tang}\,\varrho$ ist; der Riß in der Ebene der yz dagegen bildet bei der ersten Ebene mit der Achse der z einen Winkel, dessen Tangente durch

$$\frac{f' - f\cos\psi}{f\sin\psi}$$

ausgedrückt wird, während er bei der zweiten Ebene parallel zu einer Geraden ist, welche den Winkel der beiden Normalen halbirt. Der letztere Fall ist in Fig. 43 dargestellt, welche durch die angewendete Bezeichnung nun von selbst verständlich sein wird.

Die kleinste Kraft, welche der Forderung Genüge leistet, ist in jedem Falle die auf die entsprechende Ebene gefällte Senkrechte, und kann durch Benützung der in §. 18 der Einleitung dargestellten Formen aus der Gleichung der Ebene leicht erhalten werden. Wenn $f' = f$ ist, findet man

$$P = X - f\,Y - f\,Z\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\psi$$

als Werth der kleinsten Kraft, welche den gemeinschaftlichen Angriffspunkt auf der gegebenen Curve mit Hülfe der Reibung im Gleichgewicht halten wird.

§. 28.

Es bleiben nun noch einige Bemerkungen über die Art und Weise übrig, wie die letzten Untersuchungen auf dem Wege geometrischer Darstellung vorgenommen werden können.

Wenn von der Reibung Umgang genommen wird, ist es in beiden Fällen, sei es, daß der materielle Punkt auf einer Fläche, oder auf einer Curve bleiben muß, leicht, sich zu überzeugen, ob Gleichgewicht stattfindet oder nicht, indem man die Resultirende der gegebenen Kräfte, beziehungsweise ihre Projectionen auf die früher angegebene Weise darstellt, und ebenso die Projectionen der Normalen im ersten, oder die Risse der Normal-Ebene im zweiten Falle zeichnet. Es wird dann der

materielle Punkt im Gleichgewicht bleiben, vorausgesetzt, daß die Resultirende diesen gegen die Fläche oder die Curve drückt, wenn die Projectionen der Resultirenden mit denen der Normalen oder ihrer Verlängerungen zusammenfallen, oder im zweiten Falle, wenn der Endpunkt der Resultirenden der Normal=Ebene angehört.

Findet das Gesagte nicht statt, besteht also kein Gleichgewicht, so wird man die Resultirende auf die Tangential=Ebene, beziehungsweise auf die Tangente projiciren, die wahre Länge dieser Projection darstellen, und dadurch die Intensität der kleinsten Kraft erhalten, welche das Gleichgewicht herzustellen vermag, wenn sie in gerade entgegengesetztem Sinne jener Projection angreift.

Die übrigen Kräfte, welche das System im Gleichgewicht halten können, werden für den Fall, daß der materielle Punkt gezwungen ist, auf einer Fläche zu bleiben, durch die Gerade begrenzt, welche man durch den Endpunkt der kleinsten Kraft parallel zur Normalen ziehen kann, im andern Falle, wenn der Punkt auf einer Curve bleiben muß, durch eine Ebene, welche auch durch den Endpunkt der kleinsten Kraft gelegt und der Normal=Ebene parallel ist.

Soll nun auch auf die Reibung Rücksicht genommen werden, so wird man im ersten Falle, wenn der materielle Punkt sich blos auf einer Fläche befindet, die Resultirende sowohl auf die Tangential=Ebene, als auf die Normale projiciren, oder nach diesen Richtungen in zwei unter sich rechtwinklige Kräfte zerlegen; die nach der Normale wirkende wird dann den Druck auf die Ebene vorstellen, und die Reibung erzeugen, welche als viertes Glied der Proportion

$$1 : f = N : fN$$

gefunden wird, und nicht kleiner sein darf, als die in der Tangential=Ebene thätige Seitenkraft der Resultirenden, wenn Gleichgewicht stattfinden soll. Im zweiten Falle, wenn der Punkt auf zwei Flächen Reibung erzeugt, zerlegt man die Resultirende der gegebenen Kräfte zuerst in zwei rechtwinklige Componenten nach der Tangente und der Normal=Ebene, und die letztere wieder in zwei andere nach den Normalen zu beiden Flächen, und construirt die vierten Proportionalen zu

$$1 \text{ , } f \text{ und } N$$
$$1 \text{ , } f' \text{ und } N' \text{ ;}$$

die Summe der beiden dadurch erhaltenen Kräfte fN und $f'N'$ muß im Falle des Gleichgewichts so groß sein, als die längs der Tangente angreifende Seitenkraft der Resultirenden.

Werden diese Bedingungen für das Gleichgewicht nicht erfüllt, und es soll dieses durch eine neue Kraft geschehen, so bleibt nichts übrig, als die in §. 23 besprochene, in Fig. 41 dargestellte Kegelfläche und beziehungsweise die im vorigen § gefundene und für den Fall, daß $f' = f$ ist, in Fig. 43 dargestellte Ebene zu Hülfe zu nehmen, und dann nach Belieben eine der Kräfte zu wählen, welche durch diese Flächen begrenzt werden.

IV. Besondere Fälle.

§. 29.

Als Anwendung des Vorhergehenden werde zuerst das Gleichgewicht eines schweren Punktes auf einer Ebene oder einer Geraden betrachtet, die auf irgend eine Weise gegen die als Achse der z angenommene Lothlinie geneigt ist.

Nehmen wir zuerst das Gewicht des Punktes als die einzige Kraft an, welche an demselben thätig ist, so ergibt sich nach der in §. 19 ausgesprochenen Bedingung, daß die Resultirende der Richtung nach mit der Normalen zusammenfallen muß, wenn der Punkt im Gleichgewicht bleiben soll, nur eine einzige, die wagrechte Lage für die gegebene Ebene, in welcher dieses möglich ist, weil jene Kraft immer lothrecht von oben nach unten gerichtet ist. Um dies auch aus den Gleichungen abzuleiten, sei der Anfangspunkt der Coordinaten in den materiellen Punkt verlegt, und dann

$$ax + by + cz = 0 = F(x, y, z)$$

die Gleichung der gegebenen Ebene, aus welcher man zieht:

$$\frac{dF}{dx} = a\,, \quad \frac{dF}{dy} = b\,, \quad \frac{dF}{dz} = c\,;$$

ferner hat man nach unserer Annahme

$$X = 0\,, \quad Y = 0\,, \quad Z = -Q\,,$$

wenn Q das in dem Sinne der negativen Z wirkende Gewicht des materiellen Punktes bezeichnet.

Mit diesen Werthen wird die erste der Gleichungen (16) unabhängig von der Lage der Ebene gleich Null; leitet man also aus diesen Gleichungen durch Elimination von X eine dritte ab, so sind die Bedingungen des Gleichgewichtes

$$Z\frac{dF}{dx} - X\frac{dF}{dz} = 0\ ,\quad Y\frac{dF}{dz} - Z\frac{dF}{dy} = 0\ ,$$

oder mit den vorigen Werthen

$$-aQ = 0\quad ,\qquad bQ = 0\ ,$$

welche nur stattfinden können, wenn

$$a = 0 \quad \text{und} \quad b = 0\ ,$$

d. h. wenn die gegebene Ebene mit der wagrechten Ebene der xy zusammenfällt.

Wird zugleich die Reibung berücksichtigt, so muß der Punkt auf der Ebene in Ruhe bleiben, so lange die Normale derselben mit der Achse der z keinen größern Winkel bildet als den, dessen Tangente $= f$ ist. Dieser Winkel ist aber derselbe, wie der, welchen die gegebene Ebene mit der Ebene der xy einschließt. Bezeichnet man diesen mit α, so hat man für den größten Werth desselben

$$\tang \alpha = f\ .$$

Man kann daraus auch umgekehrt den Werth von f annähernd bestimmen, indem man den Winkel α allmählig wachsen läßt, bis das Gleichgewicht gestört wird, also der materielle Punkt anfängt, sich zu bewegen, und indem man die Tangente dieses Grenzwerthes von α berechnet. Offenbar ist aber der so erhaltene Werth von f zu groß, da für das gestörte Gleichgewicht $\tang \alpha > f$ sein muß.

Es wird später bei der Lehre von der Bewegung gezeigt werden, daß man nur dann streng $\tang \alpha = f$ hat, wenn der materielle Punkt sich auf der geneigten Ebene mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, d. h. wenn er die Bewegung, welche man ihm durch einen Stoß oder eine andere nur augenblicklich wirkende Kraft ertheilt, unverändert beibehält. Es ist dann auch nicht schwer einzusehen, daß diese Unveränderlichkeit der Bewegung nicht leicht mit Genauigkeit beurtheilt und wohl noch schwerer erreicht werden kann, daß also auch dieses Mittel zur Bestimmung von f ungenügend ist. Auf diese Bestimmung werden wir daher bei der Lehre von der Bewegung fester Systeme zurückkommen.

Um ferner in dem Falle, daß keine Reibung stattfindet, die Kraft zu bestimmen, welche den materiellen Punkt M auf der geneigten Ebene AB, Fig. 44, die auf der Ebene der xz senkrecht ist, im Gleichgewicht halten kann, wird man auf der Achse der z von M nach Q' eine dem Gewichte Q proportionale Länge auftragen, durch den Punkt Q' eine

Gerade PQ′ zu der Normalen parallel ziehen, und eine der Kräfte MP wählen, welche durch diese Gerade begrenzt werden. Die kleinste von diesen Kräften ist die in der Ebene AB selbst liegende MP_1, deren Intensität der nach derselben Ebene gerichteten Seitenkraft von Q gleich ist; und woraus

$$P_1 = Q \sin\alpha \qquad (25.$$

folgt. Ferner ist noch die horizontal wirkende Kraft MP_2 bemerkenswerth, mit der die vorhergehende den Winkel α bildet, und von welcher diese als eine rechtwinklige Seitenkraft angesehen werden kann; man hat also $P_1 = P_2 \cos\alpha$, und mit dem obigen Werthe von P_1 wird

$$P_2 = Q \tang\alpha\ . \qquad (26.$$

In dem eben besprochenen Falle muß die neue Kraft immer in der Ebene liegen, welche die Normale und die Richtung der Schwere enthält; dieses ist aber nicht mehr nothwendig, wenn der Druck auf die geneigte Ebene Reibung erzeugt. Denn zieht man durch den Punkt Q′, Fig. 45, welcher von M ebenso weit entfernt ist, als Q, die Gerade Q′c parallel zur Normalen MN, so wird Q′c′ = Qd den Druck vorstellen, welchen die Ebene erleidet; macht man dann a′c′ und b′c′ gleich fQ, und construirt die Kegelfläche Q′a′e′b′, welche die geneigte Ebene nach einem Kreise a′e′b′ durchschneidet, so kann jede Kraft MP, welche von dieser Fläche begrenzt wird, zur Bewirkung des Gleichgewichtes gewählt werden. Die kleinste Kraft MP_1 liegt nicht mehr in der geneigten Ebene selbst; sie ist senkrecht zu der Erzeugenden Q′a der Kegelfläche, welche der Achse der z zunächst liegt; ihre Intensität ist demnach, wenn $\tang\varrho = f$ genommen wird

$$P_2 = Q \sin(\alpha - \varrho) = Q \cos\varrho\,(\sin\alpha - f\cos\alpha)\ , \qquad (27.$$

und ihre Richtung bildet mit der Lothlinie den Winkel: $\frac{1}{2}\pi - \alpha + \varrho$, oder mit der geneigten Ebene den Winkel ϱ. Die kleinste von den in der schiefen Ebene selbst wirkenden Kräften ist

$$P_2 = Q\,\frac{\sin(\alpha - \varrho)}{\cos\varrho} = Q\,(\sin\alpha - f\cos\alpha)\ , \qquad (28.$$

und die kleinste horizontal angreifende Kraft P_3 wird durch

$$P_3 = Q \tang(\alpha - \varrho) = Q\,\frac{\tang\alpha - f}{1 + f\tang\alpha} \qquad (29.$$

ausgedrückt.

Alle diese Kräfte wollen in Verbindung mit der Reibung das Sinken des Punktes verhindern; will man dagegen eine Kraft finden, welche dem Gewichte des Punktes und der Reibung das Gleichgewicht hält, so muß man eine der Kräfte nehmen, welche von der Erzeugenden Q'b begrenzt werden. Die kleinste derselben ist die Senkrechte, welche mit der Ebene den Winkel $-\varrho$ bildet, also aufwärts wirkt; ihre Intensität ist

$$P'_1 = Q \sin(\alpha + \varrho) = Q \cos\varrho\,(\sin\alpha + f\cos\alpha)\ ;$$

für die längs der Ebene wirkende Kraft findet man

$$P'_2 = Q\,\frac{\sin(\alpha+\varrho)}{\cos\varrho} = Q\,(\sin\alpha + f\cos\alpha)\,,$$

endlich für die horizontale

$$P'_3 = Q \operatorname{tang}(\alpha+\varrho) = Q\,\frac{\operatorname{tang}\alpha + f}{1 - f\operatorname{tang}\alpha}\,,$$

und man sieht, daß diese aus den vorhergehenden durch den Zeichenwechsel des Reibungscoeffizienten f erhalten werden.

Um das Gleichgewicht eines schweren Punktes auf einer Ebene zu untersuchen, wenn an demselben außer seinem Gewichte noch andere Kräfte wirken, wird man zuerst die Größe und Richtung der Resultirenden aller Kräfte bestimmen, und dann das Coordinatensystem so drehen, daß diese Resultirende mit der Achse der z parallel ist; es leuchtet ein, daß dadurch dieser Fall ganz auf den vorigen zurückkommt, wenn man das Gewicht Q mit der Resultirenden R vertauscht.

Ebenso ist nach den allgemeinen Erörterungen leicht einzusehen, daß das Gleichgewicht eines Punktes, der an einem bestimmten Orte auf einer gegebenen krummen Fläche bleiben muß, immer durch das Gleichgewicht auf der Tangential-Ebene bedingt wird. So kann ein schwerer Punkt, an dem sonst keine Kräfte angreifen, auf einer krummen Fläche nur an solchen Orten im Gleichgewichte bleiben, wo die berührende Ebene wagrecht ist. Mit Hülfe der Reibung kann sich derselbe jedoch von diesen Orten so weit entfernen, bis die Normale des neuen Ortes mit der Lothlinie einen Winkel ϱ bildet, dessen Tangente f ist. Der Druck, welchen die Fläche in diesem Falle zu erleiden hat, ist

$$N = Q\cos\varrho = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}\,Q\ ;$$

und die dadurch bewirkte Reibung wird demnach

$$f\,N = Q\,\frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = Q \sin\varrho\ . \qquad (30.$$

Was die verschiedenen Gleichgewichtslagen betrifft, so ist es klar, daß wenn keine Reibung vorhanden ist, alle diejenigen Punkte der Fläche, in welchen die Tangential=Ebene wagrecht ist, und welche tiefer liegen, als alle Punkte in ihrer nächsten Umgebung, deren Ordinate z also ein Minimum ist, stabile Gleichgewichtslagen sind, während diejenigen Punkte, welche höher liegen, als alle, welche sie zunächst umgeben, oder deren Ordinate z ein Maximum ist, unbeständige Gleichgewichts=lagen darbieten. Unter Mitwirkung der Reibung gehören diejenigen Punkte, in welchen die Normale den Winkel ϱ mit der Normalen eines höchsten Punktes bildet, zu den nicht stabilen, jene dagegen, wo derselbe Winkel mit der Normalen eines tiefsten Punktes gebildet wird, zu den stabilen Gleichgewichtslagen.

Sind außer dem Gewichte noch andere Kräfte vorhanden, so wird man das Coordinatensystem wieder so drehen, daß die Achse der z in die Richtung der Resultirenden aller Kräfte zu liegen kommt, oder ihr parallel wird, und alles Vorhergehende wird sich dann auch auf diesen Fall anwenden lassen.

§. 30.

Zur Uebung in den bisher angestellten Betrachtungen möge noch folgende spezielle Aufgabe aufgelöset werden.

Auf einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems genommen ist, wird ein materieller Punkt M in einer solchen Lage, daß seine Coordinaten durch $x = 2^m, 47$, $x = 1^m, 86$, $z = 2^m, 78$ ausgedrückt sind, von einer Kraft $Q = 26^{Kgr}, 37$ in Angriff genommen, deren Richtung den Winkel $c = 154^0\,18'$ mit der Achse der z, und deren Projection in der Ebene der x y den Winkel $e = 126^0\,43'$ mit der Achse der x bildet, und welche sich als Resultirende mehrerer andern Kräfte ergeben hat. Es soll die kleinste Kraft P sowohl der Intensität als Richtung nach bestimmt werden, welche jenen Punkt im Gleichgewicht zu halten vermag, und zwar 1) wenn keine Reibung vorhanden ist, 2) wenn die Fläche eine solche Beschaffenheit hat, daß das Verhältniß zwischen der erzeugten Reibung und dem Drucke des Punktes auf die Fläche durch $f = 0, 34$ gegeben ist.

Aus den gegebenen Coordinaten des Punktes M folgen zuerst der Halbmesser der Kugel

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(2,47)^2 + (1,86)^2 + (2,78)^2} = 4^m, 158,$$

und für die Winkel λ, μ, ν, welche die Normale in diesem Punkte mit den drei Achsen bildet, die Functionen:

$$\cos\lambda = \frac{x}{r}\ , \quad \cos\mu = \frac{y}{r}\ , \quad \cos\nu = \frac{z}{r}\ .$$

Ferner geben die bekannten Verhältnisse:

$$\cos a = \sin e \cos e\ , \quad \cos b = \sin c \sin e$$

auch die Winkel a und b, welche die Richtung der Kraft Q mit den Achsen der x und y einschließt.

Man erhält also den Winkel ϑ zwischen dieser Richtung und jener Normalen durch die Gleichung:

$$\cos\vartheta = \cos a \cos\lambda + \cos b \cos\mu + \cos c \cos\nu\ ,$$

oder mit den voranstehenden Werthen von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$:

$$\cos\vartheta = \frac{x \cos a + y \cos b + z \cos c}{r} = \frac{p}{r}\ ;$$

in diesem Ausdrucke bezeichnet nach §. 18 der Einleitung $p = r\cos\vartheta = x\cos a + y\cos b + z\cos c$ die Länge der Senkrechten zwischen dem Anfangspunkte und der durch den Punkt xyz gehenden Ebene, deren Normale die Winkel a, b, c mit den drei Achsen bildet, also zur Richtung der Kraft Q parallel ist, oder mit andern Worten das Stück der Geraden MQ, welches von dem Punkte xyz und einer dazu senkrecht durch den Anfangspunkt gelegten Ebene begrenzt wird. Die in dieser Ebene liegende, vom Anfangspunkt auf die Richtung der Kraft Q gefällte Senkrechte hat daher zum Ausdruck:

$$p' = r \sin\vartheta = \sqrt{r^2 - (x\cos a + y\cos b + z\cos c)^2}\ ,$$

oder wenn für r^2 sein Werth $x^2 + y^2 + z^2$ gesetzt wird, wie in §. 20 der Einleitung,

$$p' = \sqrt{(x\cos b - y\cos a)^2 + (z\cos a - x\cos c)^2 + (y\cos c - z\cos b)^2}.$$

Für die Intensität der kleinsten Kraft erhält man endlich nach §. 21 in dem gegenwärtigen Abschnitte

$$P = Q \sin\vartheta\ .$$

Die Rechnung gibt nun nach und nach

$$\left.\begin{array}{l} \log\cos\lambda = 9,77382 = \log\cos 53^0\ 33',3 \\ \log\cos\mu = 9,65063 = \log\cos 63^0\ 25',6 \\ \log\cos\nu = 9,82516 = \log\cos 48^0\ \ 2',5 \end{array}\right\},$$

ferner

$$\left.\begin{array}{l} \log\cos a = 9,41375 - = \log\cos 105^0\ \ 1',6 \\ \log\cos b = 9,54111 + = \log\cos\ \ 69^0\ 39',5 \\ \log\cos c = 9,95476 - = \log\cos 154^0\ 18' \end{array}\right\};$$

damit folgt zunächst

$$\cos\vartheta = -\ 0,60097 = \cos 126^0\ 56',4$$

und dann

$$P = Q\sin\vartheta = 21\overset{\text{Kgr}}{,}077$$

als Intensität der kleinsten Kraft, welche den Punkt M im Gleichgewicht hält, wenn keine Reibung vorhanden ist.

Um nun auch die Richtung dieser Kraft zu bestimmen, d. h. die Winkel, welche sie mit den Coordinatenachsen einschließt, kann man von dem in §. 21 vorgetragenen Satze ausgehen, daß die Kraft P in der Tangential-Ebene liegt, und wie alle übrigen Kräfte, welche das Gleichgewicht herzustellen vermögen, zugleich in der durch die Richtung der Kraft Q und die Normale gelegten Ebene, daß ihre Richtung also mit der Durchschnittslinie dieser Ebenen zusammenfällt, und zwar mit demjenigen Theile derselben, welcher der Projection der Kraft Q in der berührenden Ebene entgegengesetzt ist, und welcher in unserm Falle offenbar einen spitzen Winkel mit der Achse der z bildet.

Die Gleichung einer Ebene, deren Normale die Winkel λ, μ, ν mit den drei Achsen bildet, hat nach §. 18 der Einleitung die Form:

$$x'\cos\lambda + y'\cos\mu + z'\cos\nu = p\ ,$$

und es folgt daraus jene der Tangential-Ebene in dem Punkte xyz, wenn für $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ die obigen Werthe $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ und $\frac{z}{r}$, ferner für die vom Anfangspunkte auf die Ebene gefällte Senkrechte p der Halbmesser r gesetzt wird, die bekannte Form:

$$xx' + yy' + zz' = r^2\ .$$

Ferner hat man in §. 21 der Einleitung gesehen, wie die Richtung einer Geraden, welche auf zwei andern gegebenen Geraden senkrecht steht, bestimmt wird; man findet damit, wie in §. 13 für die Winkel l, m, n, welche die auf der Normalen im Punkte xyz und der Richtung der Kraft Q errichtete Senkrechte mit den drei Achsen einschließt,

$$\cos l = \pm \frac{\cos\mu\cos c - \cos\nu\cos b}{\sin\vartheta}, \quad \cos m = \pm \frac{\cos\nu\cos a - \cos\lambda\cos c}{\sin\vartheta},$$

$$\cos n = \pm \frac{\cos\lambda\cos b - \cos\mu\cos a}{\sin\vartheta},$$

oder, wenn man diese Werthe im Zähler und Nenner mit r multiplicirt, und beachtet, daß $r\sin\vartheta = p'$ ist,

$$\cos l = \pm \frac{y\cos c - z\cos b}{p'}, \quad \cos m = \pm \frac{z\cos a - x\cos c}{p'},$$

$$\cos n = \pm \frac{x\cos b - y\cos a}{p'}.$$

Damit findet man dann als Gleichung der Ebene, welche die Normale und die Kraft Q enthält,

$$(y\cos c - z\cos b)x' + (z\cos a - x\cos c)y' + (x\cos b - y\cos a)z' = 0,$$

und durch aufeinanderfolgende Elimination zweier Veränderlichen aus dieser Gleichung und derjenigen der Tangential-Ebene die beiden Gleichungen der Durchschnittslinie, welche nach einigen Reductionen und mit der Beachtung, daß x^2+y^2 durch r^2-z^2, x^2+z^2 durch r^2+y^2, u. s. f. ersetzt werden kann, ferner daß $x\cos a + y\cos b + z\cos c = r\cos\vartheta$ ist, die Formen annehmen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x'-x}{r\cos a - x\cos\vartheta} &= \frac{z'-z}{r\cos c - z\cos\vartheta} \\ \frac{y'-y}{r\cos b - y\cos\vartheta} &= \frac{z'-z}{r\cos c - z\cos\vartheta} \end{aligned}\right\}.$$

Die Winkel α, β, γ, welche diese Gerade mit den drei Achsen bildet, werden demnach ausgedrückt durch

$$\cos\alpha = \frac{r\cos a - x\cos\vartheta}{\pm r\sin\vartheta}, \quad \cos\beta = \frac{r\cos b - y\cos\vartheta}{\pm r\sin\vartheta},$$

$$\cos\gamma = \frac{r\cos c - z\cos\vartheta}{\pm r\sin\vartheta};$$

denn, wie leicht zu sehen ist, läßt sich

$$\sqrt{(r\cos a - x\cos\vartheta)^2 + (r\cos b - y\cos\vartheta)^2 + (r\cos c - z\cos\vartheta)^2}$$

auf $r\sin\vartheta$ zurückführen. Da nun, wie oben bemerkt wurde, in unserm Falle $\cos\gamma$ positiv sein muß, so wird man darnach das Zeichen von $r\sin\vartheta$ bestimmen, und dann die beiden andern Winkel α und β berechnen.

Mit den oben Gegebenen erhält man auf diese Weise

$$r\cos a = -1,0788\ ,\quad r\cos b = -1,4454\ ,\quad r\cos c = -3,7466,$$
$$x\cos\vartheta = -1,4879\ ,\quad y\cos\vartheta = -1,1179\ ,\quad z\cos\vartheta = -1,6708$$

und damit

$$r\cos a - x\cos\vartheta = 0,4099\ ,\quad r\cos b - y\cos\vartheta = 2,5633\ ,$$
$$r\cos c - z\cos\vartheta = -2,0758\ ,$$

Es folgt aber aus diesem letzten Werthe, daß man $r\sin\vartheta = 3,3233$ negativ nehmen muß, um $\cos\gamma$ positiv zu erhalten, und es wird demnach

$$\log\cos\alpha = 9,09111 - = \log\cos\ 97^0\ 5',1$$
$$\log\cos\beta = 9,88723 - = \log\cos 140^0\ 28',3$$
$$\log\cos\gamma = 9,79562 + = \log\cos\ 51^0\ 20',7,$$

womit die Richtung der Kraft P bestimmt ist. Will man indessen noch den Winkel ε erhalten, den die Projection dieser Kraft in der Ebene der xy mit der Achse der x bildet, so hat man

$$\tang\varepsilon = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \tang 260^0\ 54',9\ ,$$

indem man beachtet, daß sowohl $\cos\alpha$ als $\cos\beta$ negativ ist.

Die vorhergehende Bestimmung der Winkel α, β, γ kann aber einfacher dadurch erreicht werden, daß man nach §. 21 durch den Punkt, dessen Coordinaten $-Q\cos a$, $-Q\cos b$, $-Q\cos c$ sind, eine Gerade parallel zur Normalen legt und den Durchgangspunkt derselben in der Tangential-Ebene sucht, d. h. die Werthe der Coordinaten x', y', z' aus der Gleichung:

$$xx' + yy' + zz' = r^2$$

dieser letztern, und den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(x' + Q\cos a)\,y &= (y' + Q\cos b)\,x\\ (z' + Q\cos c)\,x &= (x' + Q\cos a)\,z\end{aligned}\right\}$$

jener Geraden ableitet. Man findet auf diese Weise und mit Beachtung des Werthes von $\cos\vartheta$ die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + Q\,\frac{r\cos a - x\cos\vartheta}{r} \\ y' &= y + Q\,\frac{r\cos b - y\cos\vartheta}{r} \\ z' &= z + Q\,\frac{r\cos c - z\cos\vartheta}{r} \end{aligned}\right\},$$

und hat nun offenbar

$$\cos\alpha = \frac{x'-x}{P} = \frac{r\cos a - x\cos\vartheta}{r\sin\vartheta},$$

$$\cos\beta = \frac{y'-y}{P} = \frac{r\cos b - y\cos\vartheta}{r\sin\vartheta},$$

$$\cos\gamma = \frac{z'-z}{P} = \frac{r\cos c - z\cos\vartheta}{r\sin\vartheta},$$

wie vorher.

§. 31.

Wird nun die das Gleichgewicht herstellende Kraft durch die Reibung unterstützt, so hat man nach dem vorigen §.

$$P_1 = Q\sin(\vartheta - \varrho) = Q\cos\varrho\,(\sin\vartheta' - f\cos\vartheta'),$$

indem man das Supplement von ϑ mit ϑ' bezeichnet, und

$$\varrho = \operatorname{arc}\operatorname{tang} f$$

setzt. Für unsern Reibungscoefficienten $f = 0,34$ wird

$$\varrho = \operatorname{arc}(\log\operatorname{tang} = 9,53148) = 18^0\,46',7\ ,$$

und damit ergibt sich

$$P_1 = Q\sin(53^0\,3',6 - 18^0\,46,7) = 14\overset{\text{Kgr}}{,}853$$

als Intensität der gesuchten Kraft P_1.

Die Richtung dieser Kraft, von welcher man weiß, daß sie in der Ebene der Kräfte P und Q liegt, und mit der erstern einen Winkel $\varrho = 18^0\,46',7$ einschließt, kann nun wieder auf verschiedene Weise gefunden werden.

Legt man durch die Richtungen der Kräfte P und P_1 zwei Ebenen, welche zur Achse der z parallel sind, so bilden diese mit der Ebene der Kugel-Normale und der Kraft Q ein dreiseitiges körperliches Eck, dessen drei ebene Winkel γ, $\gamma_{,}$ und ϱ sind, wo dann $\gamma_{,}$ den Winkel zwischen der Richtung der Kraft P_1 und der Achse der z bezeichnet. Die Ebenen der Winkel γ und ϱ bilden ferner mit der Ebene der xy ein rechtwinkliges dreiseitiges Eck, worin ein ebener Winkel $= \frac{1}{2}\pi - \gamma$, und der diesem gegenüberliegende Flächenwinkel $= \pi$ bekannt ist. Man erhält damit den an jener Seite anliegenden Flächenwinkel C durch das Verhältniß:

$$\sin C = \frac{\cos n}{\sin \gamma},$$

und da dieser Winkel C das Supplement zu demjenigen Flächenwinkel ist, welcher dem ebenen Winkel $\gamma_{,}$ in dem ersten körperlichen Eck gegenüberliegt, so folgt:

$$\cos \gamma_{,} = \cos \gamma \cos \varrho - \sin \gamma \sin \varrho \cos C,$$

wodurch $\gamma_{,}$ gefunden werden kann. Aehnliche Ausdrücke ergeben sich auch für die Winkel $\alpha_{,}$ und $\beta_{,}$.

Will man dagegen zu diesen Ergebnissen auf directem Wege kommen, so hat man die Werthe der Functionen: $\cos \alpha_{,}$, $\cos \beta_{,}$, $\cos \gamma_{,}$ aus folgenden Gleichungen zu bestimmen:

$$\cos \alpha \cos \alpha_{,} + \cos \beta \cos \beta_{,} + \cos \gamma \cos \gamma_{,} = \cos \varrho$$
$$\cos \alpha_{,} \cos l + \cos \beta_{,} \cos m + \cos \gamma_{,} \cos n = 0$$
$$\cos^2 \alpha_{,} + \cos^2 \beta_{,} + \cos^2 \gamma_{,} = 1,$$

von denen die erste ausdrückt, daß die Richtung der Kraft P_1 mit derjenigen der Kraft P den Winkel ϱ einschließt, und die zweite, daß diese Richtung in der Ebene der Kraft Q und der Kugel-Normalen liegt, oder vielmehr, daß die Richtung der Kraft P_1 senkrecht ist zu der Normalen der genannten Ebene.

Aus diesen beiden Gleichungen zieht man zuerst

$$\cos \alpha_{,} = \cos \gamma_{,} \frac{\cos \gamma \cos m - \cos \beta \cos n}{\cos \beta \cos l - \cos \alpha \cos m} - \frac{\cos m}{\cos \beta \cos l - \cos \alpha \cos m} \cos \varrho,$$

$$\cos \beta_{,} = \cos \gamma_{,} \frac{\cos \alpha \cos n - \cos \gamma \cos l}{\cos \beta \cos l - \cos \alpha \cos m} + \frac{\cos l}{\cos \beta \cos l - \cos \alpha \cos m} \cos \varrho,$$

und wenn diese Werthe in die dritte Gleichung eingeführt werden, so folgt mit Beachtung der Beziehung:

$$\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n = 0$$

nach einigen Reductionen die Gleichung:

$$\cos^2\gamma_{,} - 2\cos\varrho\cos\gamma\cos\gamma_{,} = (\cos\beta\cos l - \cos\alpha\cos m)^2 - \cos^2\varrho(\cos^2 l + \cos^2 m),$$

welche in Bezug auf $\cos\gamma_{,}$ vom zweiten Grade ist und die beiden Werthe gibt:

$$\cos\gamma_{,} = \cos\varrho\cos\gamma \pm \sqrt{\cos^2\varrho(\cos^2\gamma - \cos^2 l - \cos^2 m) + (\cos\beta\cos l - \cos\alpha\cos m)^2},$$

von denen in unserm Falle offenbar der zweite genommen werden muß, da $\gamma_{,}$ größer sein muß als γ. Diese Werthe nehmen indessen eine sehr einfache Form an, wenn man für die Functionen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\cos l$, $\cos m$ unter dem Wurzelzeichen ihre oben angegebenen Werthe substituirt; denn man findet nach mehrfachen Reductionen

$$\cos^2\gamma - \cos^2 l - \cos^2 m = -\frac{z^2}{r^2} = -\cos^2\nu\ ,$$

$$\cos\beta\cos l - \cos\alpha\cos m = \frac{z}{r} = \cos\nu\ ,$$

und dadurch

$$\cos\gamma_{,} = \cos\gamma\cos\varrho - \cos\nu\sin\varrho\ ;$$

nach den Regeln der Symmetrie erhält man dann ebenso

$$\cos\alpha_{,} = \cos\alpha\cos\varrho - \cos\lambda\sin\varrho\ ,$$

$$\cos\beta_{,} = \cos\beta\cos\varrho - \cos\mu\sin\varrho\ ,$$

womit die Aufgabe gelöset erscheint.

Vergleicht man diesen Werth von $\cos\gamma_{,}$ mit dem zuerst erhaltenen, so ergibt sich

$$\sin\gamma\cos C = \cos\nu\ ;$$

in der That folgen auch aus dem obigen Werthe die Ausdrücke

$$\cos C\sin\gamma = \sqrt{\sin^2\gamma - \cos^2 n} = \sqrt{1 - \cos^2 n - \cos^2\gamma}$$

$$= \sqrt{\cos^2 l + \cos^2 m - \cos^2\gamma} = \frac{z}{r} = \cos\nu\ ,$$

so daß die beiden für $\cos\gamma_{,}$ gefundenen Werthe identisch sind.

Für unsern Fall findet man mit Benützung der frühern Zahlenwerthe

$$\log\cos\alpha_{,} = 9,48855 - = \log\cos 107^{0}\ 56',3$$

$$\log\cos\beta_{,} = 9,94163 - = \log\cos 150^{0}\ 57',3$$

$$\log\cos\gamma_{,} = 9,57536 \quad = \log\cos 67^{0}\ 54',3$$

und dann für die Projection in der Ebene der x y

$$\log\tan\varepsilon_{,} = 0,45308 = \log\tan 280^{0}\ 35',5\ ,$$

womit die Richtung der Kraft P_1 vollständig bekannt ist.

§. 32.

Es dürfte nicht ohne Nutzen sein, die vorgelegte Aufgabe auch noch durch Construction zu lösen, wie dies in den Figuren 46 und 47 für den gegebenen besondern Fall in folgender Weise geschehen ist.

Nachdem man die Projectionen M′ und M″ des gegebenen Punktes M auf der Kugelfläche bestimmt und die Projectionen AM′ und AM″ der Normalen in diesem Punkte gezogen hat, zeichnet man die Risse BT′ und BT″ der berührenden Ebene auf die bekannte Weise senkrecht zu den genannten Projectionen der Normalen. Mittels der gegebenen Winkel c und e wird man nun die Projectionen der Kraft Q darstellen, die Durchgangspunkte q′ und q″ ihrer Richtung in den Ebenen der x y und x z bestimmen, und durch diese und den Anfangspunkt (Mittelpunkt der Kugel) A die Risse AN′ und AN″ der durch die Richtung der Kraft Q und die Normale gelegten Ebene ziehen.

Die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Tangential-Ebene gibt die Richtung der Kraft P, deren Projectionen leicht zu erhalten sind; denn zieht man durch die Endpunkte der Projectionen der Kraft Q senkrecht auf die Spuren der Tangential-Ebene oder parallel zu den Projectionen der Normalen die Geraden Q′p′ und Q″p″, welche dann die Projectionen der von dem Endpunkte der Kraft Q auf diese Ebene gefällten Senkrechten sind, so bestimmen diese auf den Projectionen jener Durchschnittslinie die Projectionen M′p′ und M″p″ der tangentialen Seitenkraft von Q, und diese sind zugleich in entgegengesetzter Richtung von M′ und M″ nach P′ und P″ aufgetragen die Projectionen der Kraft P. Die wahre Länge, so wie die Richtungswinkel γ und ε werden dann daraus auf die früher angegebene Weise gefunden. So weit es die Genauigkeit der Construction erreichen läßt, gibt die Figur 46 diese Größen in Uebereinstimmung mit den oben durch die Rechnung erhaltenen Werthen.

Die Intensität der Kraft P allein kann auch einfacher dadurch gefunden werden, daß man die Ebene, welche die Kraft Q und die Normale enthält, um ihren Riß in der horizontalen Tafel in diese umlegt, wie dies Figur 47 zeigt, auf der Durchschnittslinie mit der Tangential-Ebene den Punkt M bestimmt, und die Richtung Mq' der Kraft Q zieht; die Projection Mp derselben auf jener Durchschnittslinie von M aus in entgegengesetzter Richtung MP genommen, gibt die Intensität und Lage der Kraft P in der betreffenden Ebene.

Dieses Verfahren wird nun auch sehr einfach zur Construction der Intensität und Richtung der kleinsten Kraft P_1 dienen, welche der Kraft Q mittels der Reibung das Gleichgewicht hält. Verlängert man nämlich die Richtung dieser letztern Kraft rückwärts um ein gleiches Stück MQ_1, zieht durch M die Gerade MP_1 unter einem Winkel $\varrho = 18^0 46'$ mit der Richtung MP, und fällt darauf die Senkrechte $Q_1 P_1$, so bestimmt diese nach §. 23 die Intensität der Kraft P_1. Die Projectionen derselben ergeben sich dann dadurch, daß man die Durchgangspunkte R' und R'' ihrer Richtung in den beiden Coordinaten-Ebenen durch entsprechende Verlängerung der Geraden MP_1 bestimmt, und einen derselben, z. B. den letztern, in die verticale Tafel überträgt; mittels dieser Projectionen können endlich noch die Winkel $\gamma_{,}$ und $\varepsilon_{,}$ dargestellt werden, womit der Aufgabe Genüge geleistet ist. — In beiden Figuren ist die Einheit der Länge durch 1^{cm}, die der Kräfte durch 1^{mm} vorgestellt.

V. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für einen materiellen Punkt.

§. 33.

Die vorangehenden Betrachtungen, durch welche wir die nothwendigen Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht eines materiellen Punktes nach seinen verschiedenen örtlichen Umständen ermittelt haben, stützen sich auf den einleuchtenden Satz, daß es für das Gleichgewicht eines materiellen Punktes überhaupt nothwendig ist und genügt, wenn sich alle Kräfte, sowohl bewegende als widerstehende, auf zwei gleiche und gerade entgegengesetzte zurückführen lassen.

Es ist aber schon in der Einleitung ausgesprochen worden, daß der Zustand des Gleichgewichts nur ein besonderer Fall des allgemeineren Zustandes der Bewegung sei, nämlich derjenige Fall, wo die Kräfte, welche in irgend einem Augenblicke auf den Körper wirken, ihre Wirkungen

gegenseitig aufheben, und, wenn das Gleichgewicht im engern Sinne gemeint sein soll, der Körper selbst von frühern Wirkungen her, nicht schon eine Bewegung besitzt. Es folgt daraus, daß die Gesetze des Gleichgewichtes nothwendig in denen der Bewegung enthalten sein müssen, daß sie aber dort auf eine andere Weise ausgedrückt sein werden, als es z. B. die für den materiellen Punkt auf dem bisher eingeschlagenen Wege gefundenen Gesetze sind. Während aber diese Ausdrücke, welche aus der Betrachtung der augenblicklichen Gesammtwirkung der Kräfte und für besondere Verhältnisse ihrer Angriffspunkte abgeleitet werden, in den meisten Fällen leichter zu verstehen und anzuwenden sind, haben jene, aus den Gesetzen der Bewegung abstrahirten Ausdrücke vor diesen den Vortheil weit größerer Allgemeinheit voraus, und dienten deßhalb bisher den schwierigsten Untersuchungen in der Bewegungslehre selbst wieder als Grundlage. Man muß also diese Gesetze, oder vielmehr das eine, welches alle Fälle des Gleichgewichtes in sich faßt, und den Namen Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten erhalten hat, unabhängig von jenen der Bewegung zu ermitteln, beziehungsweise seine Wahrheit zu beweisen suchen. Die allgemeinste Erörterung dieses Prinzips bleibt der Untersuchung des Gleichgewichts eines veränderlichen Systems vorbehalten; hier soll dasselbe einstweilen für unsern bisher erörterten Fall, das Gleichgewicht des materiellen Punktes, erläutert und bewiesen werden.

Wenn ein materieller Punkt der Einwirkung beliebiger Kräfte unterworfen ist, und diesen dann während einer sehr kleinen Zeit eine neue, verhältnißmäßig sehr kleine Kraft hinzugefügt wird, so wird der Punkt vermöge dieser neuen Kraft einen kleinen, geraden oder krummen Weg zurücklegen, welchen man seine virtuelle Geschwindigkeit benannt hat, weil das Verhältniß dieses kleinen Weges zu der angewendeten kleinen Zeit dem Ausdruck für die Geschwindigkeit eines bewegten Punktes ähnlich ist. Projicirt man diesen kleinen Weg auf die Richtung einer der Kräfte, welche an dem materiellen Punkte thätig sind, so erhält man die virtuelle Geschwindigkeit desselben in der Richtung dieser Kraft, oder einfacher, den virtuellen Weg dieser Kraft. Endlich bezeichnet man das Product aus der Intensität einer Kraft in ihren virtuellen Weg mit dem Namen: virtuelles Moment, womit man jedoch nicht den Begriff einer drehenden Kraft verbinden darf. Dieses Product wird positiv sein, wenn die Projection der virtuellen Geschwindigkeit auf die Richtung der Kraft selbst fällt, negativ dagegen, wenn sie auf die entgegengesetzte Verlängerung trifft.

Mit diesen Benennungen läßt sich nun das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten in Bezug auf einen materiellen Punkt so aussprechen:

Wenn an einem materiellen Punkte beliebige Kräfte thätig sind, und derselbe, sei es vermöge dieser Kräfte allein, oder mit Hülfe einer festen Fläche oder Curve, im Gleichgewichte bleibt, so hat das Verhältniß der Summe der virtuellen Momente aller Kräfte zu der virtuellen Geschwindigkeit des Punktes für alle virtuelle Versetzungen, welche dem Punkte durch eine sehr kleine neue Kraft ertheilt werden können, den Anfangswerth Null;

und umgekehrt:

Wenn das Verhältniß der Summe der virtuellen Momente beliebiger Kräfte, welche an einem Punkte angreifen, zu der virtuellen Geschwindigkeit dieses Punktes für alle virtuelle Verrückungen, die derselbe durch eine sehr kleine neue Kraft erleiden kann, den Entstehungswerth Null hat, so halten diese Kräfte für sich ihren Anfangspunkt im Gleichgewicht.

Um diese Sätze zu beweisen, sei M, Fig. 48, die ursprüngliche Lage des materiellen Punktes, an welchem ein beliebiges System von Kräften, wie MP, angreift; die Richtungen derselben seien durch die Winkel α, β, γ gegeben, welche sie mit drei rechtwinkligen Achsen MX, MY und MZ bilden; ferner sei N die Lage des Punktes nach seiner Verrückung, also MN, der gerade oder krummlinige Weg, welchen er von M nach N genommen hat, seine virtuelle Geschwindigkeit. Wird diese mit Δs, die Projection Mm derselben auf die Richtung der Kraft P, d. i. die virtuelle Geschwindigkeit des Punktes M in der Richtung dieser Kraft, oder der virtuelle Weg der Kraft P mit Δp bezeichnet, und demnach das virtuelle Moment derselben Kraft durch $P\Delta p$ ausgedrückt, so wird man für die Summe der virtuellen Momente aller Kräfte den Ausdruck $\Sigma . P\Delta p$, und für das Verhältniß dieser Summe zu der virtuellen Geschwindigkeit des Punktes M den Ausdruck:

$$\frac{\Sigma . P\Delta p}{\Delta s}$$

erhalten.

Bezeichnet man dann die Winkel, welche die Sehne MN mit den drei Achsen bildet, durch ξ, η, ζ, jenen, welchen sie mit der Richtung der Kraft P bildet, durch $\widehat{PN}$, und ihre Länge mit Δw, so hat man

$$\cos \widehat{PN} = \cos\alpha \cos\xi + \cos\beta \cos\eta + \cos\gamma \cos\zeta = \frac{\Delta p}{\Delta w};$$

ferner ist

$$\frac{\Sigma . P \Delta p}{\Delta s} = \frac{\Sigma . P \dfrac{\Delta p}{\Delta w}}{\dfrac{\Delta s}{\Delta w}} = \frac{\Sigma . P \cos \widehat{PN}}{\dfrac{\Delta s}{\Delta w}}.$$

Der Anfangswerth des Verhältnisses $\frac{\Delta s}{\Delta w}$ ist aber $= 1$, und sonach wird:

$$\text{Anf:} \frac{\Sigma . P \Delta p}{\Delta s} = \text{Anf:} \ \Sigma . P \frac{\Delta p}{\Delta s} = \Sigma . P \frac{\delta p}{\delta s} = \Sigma . P \cos \widehat{PN},$$

wenn man den Anfangswerth des Verhältnisses $\frac{\Delta p}{\Delta s}$ nach §. 43 der Einleitung durch das Uebergangsgesetz $\frac{\delta p}{\delta s}$ bezeichnet, worin p als eine willkürliche Function von s zu betrachten ist.

Wenn nun der Punkt ganz frei und im Gleichgewicht ist, so hat man nach §. 17 für jede beliebige Richtung

$$\Sigma . P \cos \widehat{PN} = 0,$$

also auch nach dem Vorstehenden

$$\Sigma . P \frac{\delta p}{\delta s} = 0.$$

In jedem andern Falle ist nach §. 12 (11):

$$\Sigma . P \cos \widehat{PN} = R \cos \widehat{RN},$$

wo R die Intensität der Resultirenden aller Kräfte, und $\widehat{RN}$ den Winkel zwischen ihrer Richtung und der Geraden MN vorstellt. Bezeichnet man dann die Winkel, welche die Richtung der Resultirenden mit den drei Achsen bildet, durch a, b, c, und drückt den virtuellen Weg der Resultirenden in entsprechender Weise durch Δr aus, so erhält man zuerst

$$\cos \widehat{RN} = \cos a \cos\xi + \cos b \cos\eta + \cos c \cos\zeta = \frac{\Delta r}{\Delta w};$$

ferner wird

$$\Sigma . P \frac{\Delta p}{\Delta w} = R \frac{\Delta r}{\Delta w}, \quad \frac{\Sigma . P \Delta p}{\Delta s} = R \frac{\Delta r}{\Delta s},$$

und wenn die Anfangswerthe genommen werden,

31.) $$\Sigma . P \frac{\delta p}{\delta s} = R \frac{\delta r}{\delta s}.$$

Man schließt daraus, daß das Verhältniß der Summe der virtuellen Momente aller Kräfte zu der virtuellen Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes denselben Anfangswerth hat, wie das Verhältniß zwischen dem virtuellen Momente der Resultirenden und derselben virtuellen Geschwindigkeit.

Ist dann der materielle Punkt in seiner Bewegung auf eine gegebene Fläche oder Curve beschränkt, nnd mittels dieser Widerstände im Gleichgewicht, in welchem Falle die Resultirende nach §§. 19 und 24 eine normale Richtung zu dieser Fläche oder Curve haben muß, so ist vorerst einleuchtend, daß die virtuelle Bewegung nur auf der Fläche oder auf der Curve stattfinden kann, weil dies einerseits in der ausgesprochenen Bedingung liegt, und weil man auf der andern Seite die neue Kraft, welche die virtuelle Verrückung verursacht, immer kleiner voraussetzen kann, als die Kraft, mit welcher der materielle Punkt gegen die Fläche oder Curve gedrückt wird, und er in diesem Falle die Fläche oder Curve nicht verlassen kann. Sind also x, y, z die laufenden Coordinaten der Fläche oder Curve, mithin auch die des Punktes M, und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ die des Punktes N, so ergibt sich

$$\cos \xi = \frac{\Delta x}{\Delta w}, \quad \cos \eta = \frac{\Delta y}{\Delta w}, \quad \cos \zeta = \frac{\Delta z}{\Delta w},$$

oder

$$\cos \xi = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta s}}{\frac{\Delta w}{\Delta s}}, \quad \cos \eta = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta s}}{\frac{\Delta w}{\Delta s}}, \quad \cos \zeta = \frac{\frac{\Delta z}{\Delta s}}{\frac{\Delta w}{\Delta s}},$$

und wenn man zu den Anfangswerthen zurückgeht,

$$\cos \xi = \frac{\delta x}{\delta s}, \quad \cos \eta = \frac{\delta y}{\delta s}, \quad \cos \zeta = \frac{\delta z}{\delta s}.$$

Bezeichnet man ferner die Winkel, welche eine beliebige Tangente an der Fläche oder die einzige an der Curve im Punkte M mit den drei Achsen bildet, durch l, m, n, so hat man auch für alle Punkte auf der Fläche oder Curve

$$\cos l = \frac{\partial x}{\partial s}, \quad \cos m = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \cos n = \frac{\partial z}{\partial s},$$

und im Falle des Gleichgewichtes ist nach §§. 20 und 24

$$\cos a \cos l + \cos b \cos m + \cos c \cos n = 0;$$

darnach wird mittels der vorhergehenden Werthe

$$\text{Anf: } \cos \widehat{RN} = \text{Anf: } \frac{\frac{\Delta r}{\Delta s}}{\frac{\Delta w}{\Delta s}} = \frac{\partial r}{\partial s} = 0;$$

also auch

$$\text{Anf: } \frac{\Sigma . P \Delta p}{\Delta s} = \text{Anf: } \frac{R \cos \widehat{RN}}{\frac{\Delta s}{\Delta w}} = R \frac{\partial r}{\partial s} = 0 .$$

Man hat folglich in allen Fällen, wenn der materielle Punkt im Gleichgewicht ist

$$\text{Anf: } \frac{\Sigma . P \Delta p}{\Delta s} = \Sigma . P \frac{\partial p}{\partial s} = 0, \qquad (32.$$

wie es oben ausgesprochen wurde.

Umgekehrt, wenn der Punkt M ganz frei ist, und für jede beliebige virtuelle Versetzung desselben, für welche offenbar $\frac{\partial r}{\partial s}$ nicht immer Null werden kann, wenn eine Resultirende vorhanden ist, die Gleichung:

$$\Sigma . P \frac{\partial p}{\partial s} = 0 \quad \text{oder} \quad R \frac{\partial r}{\partial s} = 0$$

stattfindet, so schließen wir daraus, daß

$$R = 0,$$

daß also der Punkt im Gleichgewicht sein muß, oder vielmehr, daß sich die an demselben thätigen Kräfte das Gleichgewicht halten. Ist der

Punkt M aber gezwungen, auf einer Fläche oder Curve zu bleiben, so schließt man aus der Gleichung:

$$\Sigma . P \frac{\delta p}{\delta s} = R \frac{\delta r}{\delta s} = 0 ,$$

daß, wenn nicht R selbst Null ist, in welchem Falle sich die Kräfte auch ohne die Fläche oder Curve im Gleichgewicht halten, $\frac{\delta r}{\delta s} = 0$ sein wird; da nun $\frac{\delta r}{\delta s}$ den Cosinus des Winkels ausdrückt, welchen die Richtung der Resultirenden mit der Tangente an der Curve der virtuellen Bewegung ihres Angriffspunktes bildet, und da alle virtuellen Versetzungen nur auf der Fläche oder Curve selbst stattfinden können, so folgt aus der letzten Gleichung, daß die Richtung der Resultirenden mit jeder Tangente an der gegebenen Fläche, oder mit der einzigen Tangente der gegebenen Curve einen rechten Winkel bildet, also normal zu der Fläche oder Curve ist, daß also die Wirkung sämmtlicher Kräfte durch diese festen Widerstände aufgehoben werden muß.

§. 34.

Es ist demnach durch das Vorhergehende nachgewiesen, daß das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten:

$$\Sigma . P \frac{\delta p}{\delta s} = 0$$

die einzige nothwendige und genügende Bedingungs-Gleichung für das Gleichgewicht von Kräften, die denselben Angriffspunkt haben, darstellt, und daß die oben aufgestellte Behauptung der größern Allgemeinheit dieses Gesetzes gerechtfertigt erscheint. Es ist dabei leicht zu sehen, daß sich aus ihm die Gleichgewichtsbedingungen für die verschiedenen örtlichen Umstände, welchen der materielle Punkt unterworfen sein kann, unmittelbar ableiten lassen. Soll z. B. das Gleichgewicht eines ganz freien Punktes untersucht werden, so wird man sich überzeugen müssen, ob der Ausdruck $\Sigma . P \frac{\delta p}{\delta s} = 0$ wenigstens für drei nicht in derselben Ebene liegende, virtuelle Geschwindigkeiten des zu untersuchenden Punktes befriedigt wird. Offenbar wählt man diese virtuellen Verrückungen am einfachsten in den drei Coordinatenachsen, und bezeichnet sie mit Δx, Δy, Δz, wobei

zu beachten ist, daß diese Größen ganz unabhängig von einander sind; dadurch erhält man die drei Bedingungen:

$$\Sigma.P\frac{\delta p'}{\delta x}=0,\quad \Sigma.P\frac{\delta p''}{\delta y}=0,\quad \Sigma.P\frac{\delta p'''}{\delta z}=0,$$

welche nichts Anderes sind, als unsere frühern Gleichungen:

$$\Sigma.P\cos\alpha=0,\quad \Sigma.P\cos\beta=0,\quad \Sigma.P\cos\gamma=0,$$

da, wie man leicht einsieht, $\frac{\delta p'}{\delta x}=\cos\alpha$, $\frac{\delta p''}{\delta y}=\cos\beta$, $\frac{\delta p'''}{\delta z}=\cos\gamma$ ist, wenn α, β, γ die Winkel zwischen der Richtung einer der Kräfte P und den drei Achsen bezeichnen. Es ist aber noch zu zeigen, daß diese drei Bedingungen auch genügen, d. h. daß, wenn sie erfüllt sind, die Gleichung (32) auch für jede andere beliebige virtuelle Versetzung befriedigt wird. Dazu seien wieder ξ, η, ζ die drei Winkel, welche die Richtung der Sehne Δw dieser virtuellen Geschwindigkeit mit den drei Achsen einschließt, so daß man hat

$$\cos\widehat{PN}=\cos\xi\cos\alpha+\cos\gamma\cos\beta+\cos\zeta\cos\gamma,$$

wo $\widehat{PN}$ den Winkel zwischen jener Sehne und der Richtung der Kraft P bezeichnet; es ist aber auch

$$\cos\alpha=\frac{\Delta p'}{\Delta x},\quad \cos\beta=\frac{\Delta p''}{\Delta y},\quad \cos\gamma=\frac{\Delta p'''}{\Delta z},$$

und demnach

$$\Sigma.P\cos\widehat{PN}=\Sigma.P\frac{\Delta p'}{\Delta x}\cos\xi+\Sigma.P\frac{\Delta p''}{\Delta y}\cos\eta+\Sigma.P\frac{\Delta p'''}{\Delta z}\cos\zeta,$$

oder da die Winkel ξ, η, ζ für alle Kräfte gelten, und demnach $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ gemeinschaftliche Coeffizienten von allen Gliedern derselben Summe sind,

$$\Sigma.P\cos\widehat{PN}=\cos\xi.\Sigma.P\frac{\Delta p'}{\Delta x}+\cos\eta.\Sigma.P\frac{\Delta p''}{\Delta y}+\cos\zeta.\Sigma.P\frac{\Delta p'''}{\Delta z},$$

und

$$\text{Anf}:\ \Sigma.P\cos\widehat{PN}=\cos\xi.\Sigma.P\frac{\delta p'}{\delta x}+\cos\eta.\Sigma.P\frac{\delta p''}{\delta y}+\cos\zeta.\Sigma.P\frac{\delta p'''}{\delta z}.$$

Man hat also mit den obigen drei Bedingungs-Gleichungen unabhängig von den Werthen der Winkel ξ, η, ζ, oder was dasselbe ist, für jeden Werth dieser Winkel

$$\text{Auf: } \Sigma . P \cos \widehat{PN} = \Sigma . P \frac{\delta p}{\delta s} = 0 \, .$$

Ist der materielle Punkt in seiner Bewegung an eine feste Curve gebunden, und es soll untersucht werden, ob er an einem Orte, dessen Coordinaten x, y, z sind, im Gleichgewichte bleiben kann, so kann man den Anfangspunkt in diesen Ort verlegen, und eine der Achsen, z. B. die der x mit der Tangente zusammenfallen lassen. Der materielle Punkt hat in diesem Falle nur die Wahl zwischen zwei entgegengesetzten Versetzungen; es genügt daher für das Gleichgewicht, daß für eine von ihnen die Gleichung (32) befriedigt wird. Nennen wir also diese virtuelle Verrückung wieder Δs, die Länge der entsprechenden Sehne Δw, und deren Projectionen auf die drei Achsen, die aber nun in nothwendiger Beziehung zu einander stehen, Δx, Δy, Δz, so ergibt sich zuerst

$$\frac{\Delta x}{\Delta w} = \cos \xi \, , \quad \frac{\Delta y}{\Delta w} = \cos \eta \, , \quad \frac{\Delta z}{\Delta w} = \cos \zeta \, ,$$

und damit

$$\cos \widehat{PN} = \frac{\Delta x}{\Delta w} \cos \alpha + \frac{\Delta y}{\Delta w} \cos \beta + \frac{\Delta z}{\Delta w} \cos \gamma = \frac{\Delta p}{\Delta w}$$

$$= \frac{\frac{\Delta x}{\Delta s}}{\frac{\Delta w}{\Delta s}} \cos \alpha + \frac{\frac{\Delta y}{\Delta s}}{\frac{\Delta w}{\Delta s}} \cos \beta + \frac{\frac{\Delta z}{\Delta s}}{\frac{\Delta w}{\Delta s}} \cos \gamma = \frac{\frac{\Delta p}{\Delta s}}{\frac{\Delta w}{\Delta s}} \, ,$$

folglich

$$\Sigma . P \frac{\delta p}{\delta s} = \Sigma . P \cos \widehat{PN} = \Sigma . P \left(\frac{\delta x}{\delta s} \cos \alpha + \frac{\delta y}{\delta s} \cos \beta + \frac{\delta z}{\delta s} \cos \gamma \right) .$$

Weil aber die Achse der x Tangente an der gegebenen Curve ist, so hat man

$$\frac{\delta x}{\delta s} = 1 \, , \quad \frac{\delta y}{\delta s} = 0 \, , \quad \frac{\delta z}{\delta s} = 0 \, ,$$

und demnach wird hier die einzige Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht

$$\Sigma . P \frac{\delta p}{\delta s} = \Sigma . P \cos \alpha = 0 \, ,$$

übereinstimmend mit der Gleichung:

$$X' = 0$$

am Ende des §. 25.

Soll endlich der materielle Punkt auf einer gegebenen Fläche bleiben, so nimmt man die Tangential-Ebene als Ebene der xy, und er wird dann im Gleichgewicht sein, wenn die Bedingungsgleichung (32) für die virtuelle Versetzung desselben in zwei Richtungen, welche irgend einen andern Winkel als π einschließen, befriedigt wird. Als solche Richtungen wird man dann die durch die Ebenen der xz und yz gebildeten Hauptschnitte nehmen, und dadurch die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma . P \cos\alpha = 0 \quad , \quad \Sigma . P \cos\beta = 0$$

erhalten, welche, wie man sieht, mit den Gleichungen:

$$X' = 0 \quad , \quad Y' = 0$$

in §. 21 übereinkommen.

Ist dann unter den Kräften auch die Reibung, welche der materielle Punkt auf einer oder mehreren Flächen verursacht, mitbegriffen, so wird jedenfalls Gleichgewicht stattfinden, wenn die Bedingungsgleichung (32) erfüllt ist, und diese wird die Bedingung für die Grenze des ruhenden Gleichgewichts ausdrücken. Scheidet man übrigens in dem Falle, wo der materielle Punkt auf einer Fläche bleiben muß, die Reibung in der genannten Gleichung aus, indem man den Druck, den die widerstehende Fläche erleidet mit N, den Reibungscoeffizienten mit f bezeichnet, so wird mit der Beachtung, daß die Richtung der Reibung der von den Kräften beabsichtigten Bewegung immer gerade entgegengesetzt ist,

$$\Sigma . P \frac{\delta p}{\delta s} - f N \frac{\delta s}{\delta s} = 0 \quad \text{oder} \quad R \frac{\delta r}{\delta s} - f N = 0 \, ;$$

und wenn man den Winkel zwischen der Richtung der Resultirenden und der Normalen zur Fläche mit ϑ bezeichnet, wodurch man nach dem vorhergehenden §.

$$\frac{\delta r}{\delta s} = \sin\vartheta \; , \quad N = R \cos\vartheta$$

erhält, so ergibt sich wie früher

$$f = \tang \vartheta$$

für die Grenze des Gleichgewichtes.

Ein ähnliches Ergebniß erhält man, wenn der Punkt auf zwei Flächen Reibung erzeugt. Man kann dann wie früher den Widerstand

der einen Fläche mit N, den der andern mit N', den Reibungscoeffizienten für die erste mit f, für die zweite mit f' bezeichnen, und findet so

$$\Sigma . P \frac{\delta p}{\delta s} - f N \frac{\delta s}{\delta s} - f' N' \frac{\delta s}{\delta s} = 0$$

oder

$$f N + f' N' = R \frac{\delta r}{\delta s}$$

als Bedingung für die Grenze des Gleichgewichtes. Das ruhende Gleichgewicht wird also bestehen, so lange

$$R \frac{\delta r}{\delta s} < f N + f' N'$$

bleibt. Es ist leicht zu sehen, daß diese Gleichungen dieselben sind, wie die in §. 26 erhaltenen, und daß sich für den Fall, wo das Gleichgewicht nicht stattfinden kann, aus denselben ähnliche Bestimmungen für die neu einzuführende Kraft ergeben, durch welche das Gleichgewicht hergestellt wird.

Nach diesen Andeutungen über die Anwendung unseres Gesetzes, dürfte es überflüssig sein, weitere Fälle allgemein durchzuführen, da wir nur wieder auf die bereits vorgetragenen Auflösungs-Methoden zurückkämen. Es soll deßhalb zum Schlusse nur noch folgende Aufgabe gelöst werden, und zwar zur Vergleichung nach beiden Methoden.

§. 35.

Aufgabe: An einem materiellen Punkte M, welcher in seiner Bewegung auf eine Kugelfläche von dem Halbmesser r beschränkt ist, greifen drei Kräfte an, deren Richtungen immer durch die Endpunkte A, B, C dreier unter sich rechtwinkligen Halbmesser gehen, und deren Intensitäten P_1, P_2, P_3 den Entfernungen des Punktes M von den Punkten A, B, C proportional, und für die Einheit der Entfernung gleich p_1, p_2, p_3 gegeben sind; es soll der Ort auf der Kugel bestimmt werden, wo der materielle Punkt im Gleichgewicht ist.

1te Auflösung. Nehmen wir den Mittelpunkt der Kugel als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems, die drei Halbmesser, deren Endpunkte A, B, C sind, als Achsen desselben, und bezeichnen die unbekannten Coordinaten der Gleichgewichtslage mit x, y, z, so wird die Richtung der Kraft P_1 durch die Gleichungen:

$$\frac{x-r}{\cos\alpha_1}=\frac{y}{\cos\beta_1}\ ,\quad \frac{x-r}{\cos\alpha_1}=\frac{z}{\cos\gamma_1}$$

bestimmt, aus welchen man, die Coordinaten x, y, z positiv voraussetzend und mittels der Bedingungsgleichung:

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1$$

als Werthe für $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ die Ausdrücke:

$$\cos\alpha_1=\sqrt{\frac{r-x}{2r}}\,,\ \cos\beta_1=-\frac{y}{\sqrt{2r(r-x)}}\,,\ \cos\gamma_1=-\frac{z}{\sqrt{2r(r-x)}}$$

zieht. Die Intensität P_1 dieser Kraft ergibt sich zufolge der Entfernung des Punktes M von A, für welche man leicht den Werth: $\sqrt{2r(r-x)}$ findet und gemäß der Bedingung, daß ihre Wirkung dieser Entfernung proportional ist, durch die Proportion:

$$P_1 : p_1=\sqrt{2r(r-x)} : 1\ ,$$

woraus man zuerst

$$P_1=p_1\sqrt{2r(r-x)}$$

erhält, und nun mit den vorhergehenden Werthen von $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ die drei Componenten:

$$P_1\cos\alpha_1=p_1(r-x)\ ,\quad P_1\cos\beta_1=-p_1 y\ ,\quad P_1\cos\gamma_1=-p_1 z$$

parallel zu den drei Coordinatenachsen ableitet.

Auf gleichem Wege wird man für die entsprechenden Componenten von P_2 und P_3 die Werthe:

$$P_2\cos\alpha_2=-p_2 x\ ,\quad P_2\cos\beta_2=p_2(r-y)\ ,\quad P_2\cos\gamma_2=-p_2 z$$
$$P_3\cos\alpha_3=-p_3 x\ ,\quad P_3\cos\beta_3=-p_3 y\ ,\quad P_3\cos\gamma_3=p_3(r-z)$$

finden, und damit die Hauptcomponenten X, Y, Z der Resultirenden R berechnen. Es ergibt sich damit

$$X=p_1 r-(p_1+p_2+p_3)\,x\,,$$
$$Y=p_2 r-(p_1+p_2+p_3)\,y\,,$$
$$Z=p_3 r-(p_1+p_2+p_3)\,z\,.$$

Die Bedingungen des Gleichgewichtes sind aber nach §. 20, und mit der Beachtung, daß man aus der Gleichung der Kugelfläche:

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = F(x, y, z) = 0$$

die Aenderungsgesetze:

$$\frac{dF}{dx} = x \quad , \quad \frac{dF}{dy} = y \quad , \quad \frac{dF}{dz} = z$$

ableitet, die beiden folgenden:

$$Xy - Yx = 0 \quad , \qquad Zx - Xz = 0$$

oder mit den obigen Ergebnissen sehr einfach:

A.) $$p_1 y - p_2 x = 0 \quad , \qquad p_3 x - p_1 z = 0 \, .$$

Zieht man daraus die Werthe von y und z in x und führt sie in die Kugelgleichung ein, so findet man für die verlangten Coordinaten zuerst

$$x = \pm r \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} \, ,$$

und damit sogleich auch

$$y = \pm r \frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} \quad , \quad z = \pm r \frac{p_3}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} \, .$$

Construirt man demnach über den drei Seiten p_1, p_2, p_3, welche die Intensitäten der Kräfte P_1, P_2, P_3 für die Einheit der Entfernung vorstellen, nachdem sie von dem Mittelpunkte O auf die drei Halbmesser OA, OB, OC aufgetragen worden sind, ein Parallelepiped, so geht die Diagonale durch den Ort auf der Kugel, wo der materielle Punkt im Gleichgewicht ist.

2te Auflösung. Nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten muß man in unserm Falle für jede virtuelle Verrückung Δs des Punktes M auf der Kugelfläche die Gleichung

$$P_1 \frac{\delta p_1}{\delta s} + P_2 \frac{\delta p_2}{\delta s} + P_3 \frac{\delta p_3}{\delta s} = 0$$

erhalten, wenn sich derselbe in der Gleichgewichtslage befindet, und wie im vorhergehenden §. gezeigt wurde, drücken die Anfangswerthe $\frac{\delta p_1}{\delta s}$, $\frac{\delta p_2}{\delta s}$, $\frac{\delta p_3}{\delta s}$ die Cosinus der Winkel aus, welche von der Tangente an dem Bogen Δs im Punkte M mit jeder der drei Sehnen MA, MB, MC, den Richtungen der Kräfte, gebildet werden.

Bezeichnen wir daher die Winkel, welche die Normale zur Kugelfläche im Punkte M mit den drei Achsen einschließt, mit λ, μ, ν, so ist leicht zu sehen, daß die Längen der drei Sehnen MA, MB, MC nun durch

$$2r \sin\frac{1}{2}\lambda\,,\quad 2r \sin\frac{1}{2}\mu\,,\quad 2r \sin\frac{1}{2}\nu$$

vorgestellt werden, und daß wir folglich für die Intensitäten der P_1, P_2, P_3 die Werthe erhalten:

$$P_1 = 2p_1 r \sin\frac{1}{2}\lambda\,,\quad P_2 = 2p_2 r \sin\frac{1}{2}\mu\,,\quad P_3 = 2p_3 r \sin\frac{1}{2}\nu\,.$$

Nehmen wir dann die virtuelle Verrückung zuerst in einer Ebene, welche die Richtung der Kraft P_1 enthält, also durch die Achse der x geht, so wird auch die Tangente an $\varDelta s$ diese Achse treffen, und zwar in einem Punkte T, dessen Entfernung von dem Anfangspunkte O gleich $r \sec\lambda$ ist, und das abgeschnittene Stück MT der Tangente wird $r \tang\lambda$ sein. Der Winkel zwischen dieser Tangente und der Sehne MA oder der Richtung der Kraft P_1 ist offenbar $\frac{1}{2}\lambda$, man hat daher sogleich

$$\frac{\delta p_1}{\delta s} = \cos\frac{1}{2}\lambda\,.$$

Um ferner den Winkel zu finden, welchen dieselbe Tangente mit der Sehne MB macht, denke man sich in der Ebene der xy die Gerade BT gezogen, und dadurch das Dreieck MBT gebildet, in welchem man leicht die drei Seiten:

$$\overline{MB} = 2r \sin\frac{1}{2}\mu\,,\quad \overline{MT} = r \tang\lambda\,,\quad \overline{BT} = \sqrt{r^2(1 + \sec^2\lambda)}$$

finden, und daraus den Cosinus des Winkels $\widehat{BT}$ nach der Formel:

$$\cos\widehat{BT} = \frac{\delta p_2}{\delta s} = \frac{\overline{MB}^2 + \overline{MT}^2 - \overline{MT}^2}{2\overline{MB} \times \overline{MT}}\,.$$

berechnen wird. Man zieht daraus

$$\frac{\delta p_2}{\delta s} = \frac{4\sin^2\frac{1}{2}\mu + \tang^2\lambda - 1 - \sec\lambda^2}{4\sin\frac{1}{2}\mu \tang\lambda}\,,$$

oder nach einigen Umwandlungen

$$\frac{\delta p_2}{\delta s} = - \frac{\cos \mu}{2 \sin \frac{1}{2} \mu \tang \lambda} .$$

Ebenso ergibt sich für die dritte Kraft

$$\frac{\delta p_3}{\delta s} = - \frac{\cos \nu}{2 \sin \frac{1}{2} \nu \tang \lambda} ,$$

und die Bedingung des Gleichgewichtes wird mit den obigen Intensitäten der drei Kräfte

$$p_1 \sin^2 \lambda - (p_2 \cos \mu + p_3 \cos \nu) \cos \lambda = 0 ,$$

oder

$$p_1 - (p_1 \cos \lambda + p_2 \cos \mu + p_3 \cos \nu) \cos \lambda = 0 .$$

Für die virtuellen Versetzungen in den Ebenen der Kräfte P_2 und P_3 wird man in ähnlicher Weise die Bedingungen:

$$p_2 - (p_1 \cos \lambda + p_2 \cos \mu + p_3 \cos \nu) \cos \mu = 0$$
$$p_3 - (p_1 \cos \lambda + p_2 \cos \mu + p_3 \cos \nu) \cos \nu = 0$$

erhalten und dann aus diesen und der vorhergehenden Gleichung die gleichen Verhältnisse:

$$p_1 \cos \lambda + p_2 \cos \mu + p_3 \cos \nu = \frac{p_1}{\cos \lambda} = \frac{p_2}{\cos \mu} = \frac{p_3}{\cos \nu}$$

ziehen, welche mit den Werthen:

$$\cos \lambda = \frac{x}{r} , \quad \cos \mu = \frac{y}{r} , \quad \cos \nu = \frac{z}{r}$$

auf die Gleichungen (A) zurückkommen.

Dritter Abschnitt.

Bewegung des materiellen Punktes.

Erstes Kapitel.

Geradlinige Bewegung.

§. 36.

Ein materieller Punkt ist, wie in der Einleitung (§. 7) erörtert wurde, unvermögend, etwas zur Veränderung seines örtlichen Zustandes beizutragen; er kommt nur in Bewegung durch die Wirkung einer Kraft, und ändert die Bewegung, welche er in irgend einem Augenblicke besitzt, ebenfalls nur in Folge der Einwirkung einer Kraft. Wird daher ein solcher Punkt im freien Raum in Bewegung gesetzt, und hört dann die Kraft zu wirken auf, oder halten sich die an ihm thätigen Kräfte von irgend einem Augenblicke an das Gleichgewicht, in welchem Falle ihre Resultirende Null ist (§. 17), so wird seine Bewegung die möglichst einfache werden, er wird sich unaufhörlich in derselben Weise und nach derselben Richtung fortbewegen, wie in dem gedachten Augenblicke, er wird also immer in derselben Geraden fortgehen und in ihr in jedem gleichen Zeitabschnitte seine Lage um gleichviel ändern, oder um eine gleiche Länge fortrücken; diese Bewegung wird demnach eine geradlinige und gleichförmige sein.

Nehmen wir daher auf der Geraden, welche die Richtung der Bewegung vorstellt, irgend einen Punkt an, um von diesem die Entfernung x des Bewegten nach verschiedenen Zeitabschnitten zu messen, beobachten wir ferner diese Entfernung in einem bestimmten Augenblicke, von dem an wir die Zeitabschnitte zählen, und welchen wir künftig den Anfang der Zeit nennen wollen, und drücken wir diese anfängliche Entfernung durch a aus, so wird $x-a$ der Weg in Längeneinheiten sein, welcher

in einer gewissen Anzahl t von Zeitabschnitten oder Zeiteinheiten zurückgelegt wurde. In jeder einzelnen Zeiteinheit muß folglich der bewegte Punkt einen Weg von $\frac{x-a}{t}$ Längeneinheiten zurückgelegt haben und ferner zurücklegen, und wenn man diese mit b bezeichnet, so erhält man allgemein

33.) $$\frac{x-a}{t} = b \quad \text{oder} \quad x = a + bt$$

als die Gleichung, durch welche die Entfernung x bestimmt werden kann, in der sich der bewegte Punkt nach t Zeiteinheiten von dem angenommenen festen Punkte befindet, wenn die anfängliche Entfernung a und der in jeder Zeiteinheit zurückgelegte Weg b bekannt oder gegeben sind. Will man aber die Lage des Bewegten vor t Zeiteinheiten kennen, vorausgesetzt, daß seine Bewegung damals schon eine gleichförmige war, so darf man nur t negativ nehmen, d. h. den Weg b von dem anfänglichen Abstande a tmal abziehen.

Der Ausdruck (33) wird einfacher, wenn man entweder den Punkt, in welchem sich der Bewegte am Anfang der Zeit befindet, als den Anfangspunkt für die Entfernungen x nimmt, oder was auf dasselbe hinauskommt, den Augenblick, in welchem der Bewegte durch den angenommenen festen Punkt geht, als Anfang der Zeit wählt; in jedem Falle wird dann x Null, wenn t Null ist, und man hat dadurch einfach:

$$x = bt\ ,$$

wo dann x auch selbst den in t Zeiteinheiten zurückgelegten Weg vorstellt. Man muß sich jedoch immer erinnern, daß die eigentliche Bedeutung von x die Entfernung des Bewegten von einem festen Punkte in der Richtung der Bewegung ist.

§. 37.

Denken wir uns nun einen zweiten materiellen Punkt, welcher sich in einer Richtung, die parallel ist zu der des vorhergehenden, ebenfalls gleichförmig bewegt, der aber in demselben Zeitabschnitte um eine größere Länge in dieser Richtung fortrückt, und vergleichen wir beide Bewegungen mit einander, so sagen wir, die zweite sei geschwinder als die erste, und bezeichnen die entsprechende Eigenschaft der Bewegung mit dem Namen: Geschwindigkeit. Sehr oft übertragen wir aber diese Eigenschaft der Bewegung auf den Bewegten selbst, und sagen

z. B. der zweite der vorher betrachteten materiellen Punkte besitze eine größere Geschwindigkeit, als der erste, anstatt uns richtiger auszudrücken, die Bewegung des zweiten habe eine größere Geschwindigkeit, als die Bewegung des ersten.

Der Begriff von der Größe der Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung beruht offenbar auf der Vergleichung des Verhältnisses zwischen dem von dem Bewegten beschriebenen Wege und der dazu angewendeten Zeit mit demselben Verhältnisse bei einer andern gleichförmigen Bewegung, und es liegt in der Natur der Sache, daß die Geschwindigkeit als mathematische oder meßbare Größe genommen diesem Verhältnisse proportional ist; denn wir nennen eben eine Bewegung doppelt so geschwind, als eine andere, wenn der Bewegte einen zweimal so großen Weg in derselben Zeit zurücklegt, dreimal so geschwind, wenn dieser Weg dreimal so groß ist, u. s. f. Bezeichnen wir demnach die Geschwindigkeit des ersten Punktes mit v, die des zweiten mit v′, und drücken für den letztern das Verhältniß zwischen dem zurückgelegten Wege $x' - a'$ und der angewendeten Zeit t' durch b' aus, so daß man hat

$$b' = \frac{x' - a'}{t'},$$

wo dann b' wie oben auch den von dem zweiten Bewegten in der Einheit der Zeit zurückgelegten Weg vorstellt, so hat man

$$v : v' = \frac{x - a}{t} : \frac{x' - a'}{t'} = b : b'.$$

Um also die Geschwindigkeiten verschiedener gleichförmiger Bewegungen messen oder in Zahlen ausdrücken zu können, wird man die Geschwindigkeit einer **bestimmten** gleichförmigen Bewegung als **Einheit** für **die Geschwindigkeit** annehmen, und die zu messende mit dieser mittels der vorhergehenden Proportion vergleichen; diese Vergleichung wird offenbar am einfachsten, wenn man als **Einheit für die Geschwindigkeit die Geschwindigkeit derjenigen gleichförmigen Bewegung annimmt, bei welcher das Verhältniß zwischen dem zurückgelegten Weg und der angewendeten Zeit gleich der Einheit ist**, bei welcher also in der Einheit der Zeit die Einheit des Weges oder der Länge zurückgelegt wird. Für diese Bewegung hat man daher zugleich $v' = 1$, $b' = 1$, und es ergibt sich damit aus der obigen Proportion:

$$v = b = \frac{x - a}{t}$$

als Maaß der Geschwindigkeit für eine andere gleichförmige Bewegung. Nach dieser Annahme wird dann die Geschwindigkeit irgend einer gleichförmigen Bewegung einfach durch das Verhältniß zwischen dem zurückgelegten Wege und der dazu angewendeten Zeit gemessen, folglich durch dieselbe Zahl ausgedrückt, welche den in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg in Längeneinheiten angibt. Durch Uebertragung und Abkürzung der Ausdrucksweise hat man sich aber allgemein daran gewöhnt, die Geschwindigkeit als den bei gleichförmiger Bewegung in der Zeiteinheit, z. B. in einer Sekunde, zurückgelegten Weg zu erklären, und demgemäß die Längeneinheit selbst, z. B. den Meter, als Einheit für die Geschwindigkeit anzugeben. Dagegen ist jedoch zu erinnern, daß Geschwindigkeit nicht Weg ist, daß man eine Größe nur durch eine gleichartige messen kann, und daß die Geschwindigkeit nicht erst mit der Zeit entsteht, wie der Weg, daß sie vielmehr in jedem untheilbaren Augenblicke der Bewegung vorhanden, und bei unserer gleichförmigen Bewegung immer in gleicher Stärke vorhanden ist. — Sind übrigens die Begriffe einmal klar aufgefaßt, so kann man sich immerhin der abgekürzten Ausdrucksweise bedienen, und da uns doch in der Sprache des Lebens ein Name für die Einheit der Geschwindigkeit fehlt, so wollen wir uns dem eingeführten Gebrauche anschließen, und den Namen der Längeneinheit: Meter, Fuß, u. s. f. auch für jene Einheit gebrauchen. Der abgekürzte Ausdruck: „Dieser materielle Punkt hat in diesem Augenblicke 3 Meter Geschwindigkeit“ heißt demnach in seiner Vollständigkeit: „Die Geschwindigkeit der Bewegung dieses Punktes ist in diesem Augenblicke dieselbe, wie die eines sich gleichförmig bewegenden Atoms, welches in jeder Zeiteinheit 3 Meter zurücklegt, oder dreimal so groß als die eines Atoms, daß in jeder Zeiteinheit 1 Meter durchläuft.“

Nach diesen Erörterungen können wir nun die Eigenschaften der gleichförmigen Bewegung so ausdrücken:

1) Die Geschwindigkeit der Bewegung ist unveränderlich; also hat man, wenn dieselbe, wie künftig immer, in irgend einem Augenblicke oder am Ende einer Zeit t mit v bezeichnet wird, die Gleichung:

$$34) \qquad v = b \;;$$

2) die Entfernung des Bewegten von einem festen Punkte in der Richtung seiner Bewegung wächst im einfachen Verhältnisse der Zeit, der beschriebene Weg ist proportional der Zeit und wird berechnet als Product aus der Zeit in die Geschwindigkeit; denn aus der Gleichung (33) folgt

$$x - a = bt = vt \ .$$

Die beiden Gleichungen (33) und (34) drücken demnach zusammen alle Eigenschaften der gleichförmigen Bewegung aus, und werden deßhalb auch Gleichungen der gleichförmigen Bewegung genannt.

§. 38.

Nach der gleichförmigen ist offenbar diejenige geradlinige Bewegung die einfachste, bei welcher die Geschwindigkeit in gleichen Zeitabschnitten immer um gleichviel und zwar stetig zu- oder abnimmt, also die geradlinige gleichförmig beschleunigte oder gleichförmig verzögerte Bewegung, welche wir überhaupt gleichförmig veränderte nennen wollen.

Bei dieser Bewegung wird die Geschwindigkeit, da sie in gleichen Zeitabschnitten immer um gleichviel zu- oder abnimmt, in demselben Verhältnisse sich ändern, wachsen oder abnehmen, wie die Zeit, oder mit andern Worten, es wird das Verhältniß zwischen der in einer gewissen Zeit erworbenen Geschwindigkeit zu dieser Zeit für die ganze Dauer der Bewegung unveränderlich sein. Bezeichnet man daher die anfängliche Geschwindigkeit, d. i. die Geschwindigkeit des Bewegten in dem Augenblicke, wo man die Zeitabschnitte zu zählen anfängt, mit b, die Geschwindigkeit nach t Zeiteinheiten mit v, und mit c eine unveränderliche Größe, so hat man

$$\frac{v - b}{t} = c \ , \qquad v = b + ct \ ; \qquad (35.$$

und man sieht, daß hier der Ausdruck für die Geschwindigkeit dieselbe Form hat, wie der für die Entfernung x bei der gleichförmigen Bewegung. Das Verhältniß c zwischen der erworbenen Geschwindigkeit und der dazu angewendeten Zeit drückt, in ähnlicher Weise wie dort, die in der Einheit der Zeit erworbene Geschwindigkeit, oder die Beschleunigung der Bewegung aus. Wird dasselbe negativ, so tritt natürlich eine Verminderung der Geschwindigkeit ein; es bezeichnet dann den in der Einheit der Zeit stattfindenden Verlust an Geschwindigkeit oder die Verzögerung der Bewegung, und es wird:

$$v = b - ct$$

der Ausdruck für die Geschwindigkeit am Ende der Zeit t, oder nach t Zeiteinheiten vom Anfang der Zeit an gerechnet.

Fängt die gleichförmig beschleunigte Bewegung von der Ruhe aus an, so kann man den Augenblick, in welchem die Bewegung beginnt,

als Anfang der Zeit nehmen; man erhält dadurch $v=0$ für $t=0$, also auch $b=0$; der obige Ausdruck kommt auf

$$v=ct$$

zurück und drückt nun zugleich die Geschwindigkeit am Ende der Zeit t und die in der Zeit t erworbene Geschwindigkeit der Bewegung aus.

§. 39.

Es bleibt demnach noch die Gleichung zu ermitteln, durch welche die Lage des Bewegten, d. i. seine Entfernung x von einem festen Punkte in der Richtung seiner Bewegung nach einer gegebenen Zeit t berechnet werden kann, welche also die Form:

$$x=f(t)$$

haben wird, und in einem nothwendigen Zusammenhange mit dem Ausdrucke für die Geschwindigkeit stehen muß.

Untersuchen wir also, in welcher Beziehung die beiden Functionen zu einander stehen, von welchen die eine die Entfernung des Bewegten von einem festen Punkte, die andere seine Geschwindigkeit am Ende einer beliebigen Zeit t ausdrückt, und zwar für irgend eine geradlinige Bewegung. Sei CA, Figur 49, die Richtung dieser Bewegung, C der feste Punkt, von dem aus die Entfernung $AC=x$ gemessen wird, welche der Bewegte am Ende der Zeit t erlangt hat, also A sein Ort und v seine Geschwindigkeit in diesem Augenblicke, beide Größen v und x als Functionen von t gedacht.

Lassen wir nun die Zeit t sich um einen kleinen Abschnitt Δt ändern, so wird sich auch die Geschwindigkeit v um den kleinen und allgemein positiven Zuwachs Δv ändern, und die Entfernung x um den kleinen Weg $AB=\Delta x$, welchen der Bewegte in der Zeit Δt zurücklegt, zunehmen. Es ist dann einleuchtend, daß dieser Weg Δx, welchen der Bewegte mit zunehmender Geschwindigkeit zurücklegt, größer sein muß, als der Weg $\Delta' x$, den derselbe mit der unveränderten Geschwindigkeit v in der nämlichen Zeit Δt zurückgelegt haben würde, und kleiner, als der Weg $\Delta'' x$, den ein materieller Punkt in ebenderselben Zeit Δt mit einer unveränderlichen Geschwindigkeit $v+\Delta v$ beschreiben wird, wie sie der Bewegte erst am Ende dieser Zeit oder im Punkte B erlangt. Wir haben aber für die gleichförmige Bewegung, deren Geschwindigkeit v ist und bei welcher in der Zeit Δt der Weg $\Delta' x$ zurückgelegt wird, das Verhältniß:

$$\frac{\Delta' x}{\Delta t} = v ,$$

und für diejenige, bei welcher in derselben Zeit Δt der Weg $\Delta'' x$ mit der constanten Geschwindigkeit $v + \Delta v$ beschrieben wird, das Verhältniß:

$$\frac{\Delta'' x}{\Delta t} = v + \Delta v ,$$

und daraus folgt nach dem Vorhergehenden, weil

$$\Delta x > \Delta' x \text{ und } < \Delta'' x$$

sein muß, die Beziehung:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > v \text{ und } < v + \Delta v ;$$

d. h. das Verhältniß des wirklich beschriebenen Weges zu der angewendeten Zeit liegt zwischen v und $v + \Delta v$, und wenn man daher mit α eine Zahl bezeichnet, die zwischen 0 und 1 liegt, so hat man offenbar:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v + \alpha \Delta v .$$

Gehen wir nun wieder in den Punkt A zurück, so wird jede der kleinen Größen Δt, Δv, Δx für sich allein, und demnach auch das Product $\alpha \Delta v$ Null; das Verhältniß $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ dagegen erhält seinen Anfangswerth: $\frac{dx}{dt}$, welcher das Aenderungsgesetz der Function x in Bezug auf die unabhängige Veränderliche t ausdrückt, d. h. welcher angibt, in welchem Verhältnisse sich die Entfernung x mit der Zeit t in dem Punkte A zu ändern im Begriffe steht, und die vorstehende Gleichung gibt einfach:

$$\frac{dx}{dt} = v . \qquad (36.$$

Bei jeder geradlinigen Bewegung ist also das Maaß der **Geschwindigkeit** als Function der Zeit zugleich das **Aenderungsgesetz** der **Entfernung** des Bewegten von einem festen Punkte in der Richtung seiner Bewegung in Bezug auf die Zeit, so daß wenn

$$x = f(t)$$

diese Entfernung für irgend eine solche Bewegung in Function der Zeit t ausdrückt, die Geschwindigkeit v durch die erste Abgeleitete $f'(t)$ in Bezug auf t vorgestellt, also

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

wird, und daß wenn umgekehrt v in Function von t gegeben ist, die wirkliche Aenderung von x durch das allgemeine Integral:

37.) $$\overset{x}{\underset{a}{\Delta}} x = x - a = \int_0^t dt \, . \, f'(t)$$

gefunden werden kann, worin a den Werth von x für $t = 0$ vorstellt.

Führen wir z. B. den oben bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung für v erhaltenen Ausdruck (35) in diese Gleichungen (36) und (37) ein, so finden wir

$$\frac{dx}{dt} = b + ct \quad , \quad x - a = \int_0^t dt \, . \, (b + ct)$$

also durch Ausführung der angezeigten Integration:

$$x - a = bt + \frac{1}{2} ct^2$$

oder:

38.) $$x = a + bt + \frac{1}{2} ct^2$$

als den gesuchten Ausdruck für die Entfernung x in Function der Zeit t.

Läßt man dann wieder den Anfang der Zeit mit dem Augenblicke zusammentreffen, in welchem die gleichförmig veränderte Bewegung beginnt, und den Anfang der Entfernung mit dem Punkte, wo sie beginnt, so hat man $x = 0$, wenn $t = 0$, also $a = 0$, und demnach

$$x = bt + \frac{1}{2} ct^2 \, .$$

oder mit dem Werthe von v

$$x = \frac{1}{2} (b + v) \, t \, .$$

Der zurückgelegte Weg ist demnach derselbe, als wenn sich der materielle Punkt während des betreffenden Zeitraumes gleichförmig mit der mitt-

leren Geschwindigkeit, d. i. mit der Geschwindigkeit bewegt hätte, welche er in der Mitte dieses Zeitraumes hatte; denn man sieht, daß wenn $\frac{1}{2}$ t für t in den Werth von v eingeführt wird, die entsprechende Geschwindigkeit v' den Werth:

$$v' = b + \frac{1}{2} ct = \frac{1}{2}(b + v)$$

erhält, woraus denn auch, wie ausgesprochen wurde,

$$x = v' t$$

hervorgeht.

Beginnt die gleichförmig beschleunigte Bewegung von der Ruhe aus, so ist $b = 0$ und dann sind

$$v = ct \quad , \qquad x = \frac{1}{2} ct^2 \tag{39.}$$

die einfachen Gleichungen der gleichförmig beschleunigten Bewegung. Man schließt daraus, daß der von der Ruhe aus zurückgelegte Weg dem Quadrat der Zeit proportional ist, und umgekehrt sieht man leicht, daß wenn dies der Fall ist, die Bewegung immer eine gleichförmig beschleunigte sein wird; denn die Gleichung:

$$x = m t^2$$

worin m irgend eine unveränderliche Zahl ist, führt nach (36) auf

$$v = 2mt ,$$

und diese ist die bezeichnende Gleichung der gleichförmigen Beschleunigung.

§. 40.

Nach dem in §. 36 ausgesprochenen Satze wird zu jeder Veränderung einer Bewegung eine Kraft erfordert, und wie daher eine gleichförmige oder unveränderte Bewegung nur dann möglich wird, wenn keine Kraft an dem Bewegten wirksam ist, so wird eine gleichförmig veränderte Bewegung eines materiellen Punktes nur dann möglich sein, wenn fortwährend eine Ursache für diese Veränderung vorhanden ist, und zwar eine Ursache, welche in jedem Augenblicke und in jeder Lage des Bewegten dieselbe bleibt, d. h. wenn die Kraft, welche an dem Bewegten thätig ist, eine ununterbrochen, stetig wirkende und ihrer Intensität und Richtung nach unveränderliche

ist. Denn die Wirkung einer bewegenden Kraft kann, wie schon in der Einleitung (§. 7) erörtert wurde, nicht abhängig sein von dem örtlichen Zustande (Ruhe oder Bewegung) des materiellen Punktes, an dem sie angreift, sie muß dieselbe bleiben, ob dieser eine große oder gar keine, eine in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne gerichtete Geschwindigkeit besitzt. Es folgt dies nicht nur aus allen unsern Erfahrungen; es läßt sich auch aus der Natur der Sache einleuchtend machen. Denken wir uns nämlich eine unveränderliche Kraft von beliebig großer Intensität, d. h. eine Kraft, welche einen materiellen Punkt in jeder beliebigen Lage desselben auf dieselbe Weise von der Ruhe aus in Bewegung setzen will, oder die immer denselben Druck auf eine feste Fläche, welche den materiellen Punkt in seiner Bewegung hindert, hervorbringt, und nehmen wir an, die Wirkung dieser Kraft nehme ab, wenn und blos aus dem Grunde, weil die Geschwindigkeit des Bewegten wächst, so würde dieselbe nach einer sehr großen Zeit nur noch eine an Null gränzende Wirkung äußern können, und die Bewegung müßte ungeachtet der Thätigkeit einer beliebig großen Kraft d. h. einer beliebig großen Ursache für die Aenderung der Bewegung in eine unveränderliche übergehen, als wenn keine solche Ursache vorhanden wäre. Noch weniger kann man annehmen, daß die Wirkung einer solchen Kraft mit der Geschwindigkeit wachse; denn dies wäre gleichbedeutend mit der Annahme, daß sich die Bewegung oder die Geschwindigkeit aus sich selbst erzeuge, was offenbar absurd ist.

Eine unveränderliche Kraft wird also unter allen Umständen dieselbe Wirkung hervorbringen, und umgekehrt muß eine gleichbleibende Wirkung immer einer unveränderlichen Kraft zugeschrieben werden; es kann also nur eine solche unveränderliche Kraft eine Bewegung erzeugen, welche sich in jedem Augenblicke auf dieselbe Weise ändert oder zu ändern im Begriffe ist, sei es der Richtung oder der Geschwindigkeit nach, da sich während der Bewegung die Wirkung einer Kraft nur durch die Veränderung der Bewegung äußern kann.

In unserm Falle, bei der geradlinigen gleichförmig beschleunigten oder gleichförmig veränderten Bewegung, bleibt nun die Richtung unverändert; die Veränderung der Bewegung besteht demnach einzig und allein in der Aenderung der Geschwindigkeit; es muß deßhalb auch diese Zu- oder Abnahme an Geschwindigkeit, die positive oder negative Beschleunigung (indem wir die Verzögerung als eine in entgegengesetztem Sinne gerichtete Beschleunigung ansehen) den Maaßstab zur Beurtheilung der an dem Bewegten thätigen Kraft abgeben, und umgekehrt werden wir, wenn die Kraft bekannt ist, nach ihr auf die

in jeder Zeiteinheit neuerzeugte Geschwindigkeit d. i. auf die Beschleunigung der Bewegung schließen können.

Es ist nämlich dabei vor allen Dingen wohl zu beachten, daß keine Kraft, sie mag noch so groß sein, einem materiellen Punkte in einem untheilbaren Augenblicke eine Geschwindigkeit von bestimmter Größe ertheilen kann, da es unmöglich ist, daß dieser Punkt aus einem Zustande, wo seine Geschwindigkeit Null ist, plötzlich in einen andern übergehe, worin er eine Geschwindigkeit von bestimmter Größe besitzt, ohne die dazwischenliegenden Zustände mit stetigwachsender Geschwindigkeit durchlaufen zu haben, ebenso unmöglich, als er von einem Orte zu einem andern kommen kann, ohne alle dazwischenliegenden Orte stetig zu durchwandern. Es ist also für jede Kraft eine, wenn auch in vielen Fällen sehr kurze Zeit erforderlich, um einem materiellen Punkte oder einem Körper eine bestimmte Geschwindigkeit zu ertheilen, und man könnte die Intensität einer Kraft ebensowohl nach der Zeitdauer beurtheilen, welche sie bei demselben materiellen Punkte zur Erzeugung einer gewissen Geschwindigkeit (der Einheit der Geschwindigkeit) nöthig hat, als umgekehrt, wie oben ausgesprochen wurde und wir es immer thun werden, nach der Geschwindigkeit, welche sie in der Einheit der Zeit erzeugt. Wir würden im ersten Falle offenbar diejenige von zwei Kräften für die größere annehmen müssen, welche dieselbe Geschwindigkeit in kürzerer Zeit ertheilt, und es dürfte darnach schon in der Natur der Sache liegen, daß zwei constante Kräfte sich geradezu verhalten werden, wie die demselben Atom in gleichen Zeiten ertheilten Geschwindigkeiten oder umgekehrt wie die Zeiten, in denen sie demselben gleiche Geschwindigkeiten ertheilen, und überhaupt wie die Quotienten aus den ertheilten Geschwindigkeiten durch die dazu verwendeten Zeiten.

Diese Folgerung kann indessen durch folgende Betrachtung strenge nachgewiesen werden. Zuerst werden wir die in der Einleitung (§. 8) gegebene Erklärung von zwei gleichen Kräften nun bestimmter so aussprechen:

Zwei Kräfte sind gleich, wenn sie demselben materiellen Punkte bei geradliniger Bewegung in derselben Zeit dieselbe positive oder negative Geschwindigkeit ertheilen oder ertheilen wollen, und zwar ohne Rücksicht auf den örtlichen Zustand, in welchem sich derselbe befinden mag,

und man wird sich leicht überzeugen, daß diese Erklärung die andere, wonach zwei gleiche Kräfte solche sind, welche, in gerade entgegengesetzter Richtung auf denselben mate-

riellen Punkt wirkend, dessen Zustand nicht ändern, als besondere in sich schließt, da die von zwei gleichen aber entgegengesetzten Kräften erzeugten Beschleunigungen ebenfalls gleich und entgegengesetzt sind, und sich nothwendig gegenseitig vernichten müssen, der Zustand des materiellen Punktes demnach durch sie nicht geändert werden kann.

Es bleibt dann nur zu zeigen übrig, daß wenn zwei gleiche Kräfte zusammen in demselben Sinne an demselben materiellen Punkte thätig sind, jede von ihnen demselben die gleiche Geschwindigkeit in der Zeiteinheit ertheilt, und daß er sonach durch ihre Gesammtwirkung in dieser Zeit die doppelte Geschwindigkeit erhält, daß also die Wirkungen der Kräfte nicht nur von dem örtlichen Zustande des Bewegten, sondern auch unter sich selbst unabhängig sind, daß jede Kraft für sich dieselbe Wirkung hervorbringt, als wenn sonst keine andere vorhanden wäre. — Denken wir uns dazu zuerst zwei gleiche und geradezu entgegengesetzte Kräfte P und P′ an demselben Punkte thätig, so werden sich diese das Gleichgewicht halten, also dem Punkte keine Bewegung, oder keine Geschwindigkeit ertheilen. Bringt man dann eine dritte gleiche Kraft P″ in derselben Richtung und im Sinne der Kraft P an, so wird der materielle Punkt in Bewegung kommen, oder sich überhaupt so bewegen, als wenn nur eine der Kräfte P und P″ an ihm thätig wäre, und es ist offenbar unentschieden, ob es die Kraft P oder die Kraft P″ ist, welche die Bewegung hervorruft und beschleunigt; ja wir können mit demselben Rechte behaupten, daß die Kraft P′ der Hälfte von P und der Hälfte von P″ das Gleichgewicht hält, daß also auch von jeder dieser letztern Kräfte noch eine Hälfte für die Bewegung wirksam ist, und werden dann im Rechte sein, daraus zu schließen, daß jede dieser halben Kräfte die Hälfte von der erzeugten Geschwindigkeit hervorbringt, da kein Grund denkbar ist, warum die halbe Kraft P mehr oder weniger Geschwindigkeit erzeugen sollte als die halbe Kraft P″. Es werden also im Allgemeinen immer zwei gleiche Kräfte zusammen demselben materiellen Punkte eine doppelt so große Geschwindigkeit ertheilen, als eine von beiden, und man wird den vorhergehenden Fall einfach dahin erklären können, daß von den beiden Kräften P und P″ oder von der doppelten Kraft 2P in der Zeiteinheit die doppelte Geschwindigkeit in dem einen, und von der Kraft P′ die einfache im entgegengesetzten Sinne erzeugt wird oder erzeugt werden will, und daß deßhalb im ersten Sinne die einfache Geschwindigkeit als Wirkung aller drei Kräfte erscheint. Nach diesem ist dann leicht zu schließen, daß eine dreifache Kraft demselben Atom die dreifache, die $n$fache Kraft die $n$fache Geschwindigkeit ertheilen, daß folglich die

demselben Bewegten in derselben Zeit ertheilte Geschwindigkeit der Kraft, und umgekehrt die Kraft dieser Geschwindigkeit proportional sein muß, und daß sich deßhalb alle Gesetze für die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte auch auf die Geschwindigkeiten anwenden lassen werden, welche sie demselben materiellen Punkte in der Zeiteinheit ertheilen wollen. Wir werden im folgenden Kapitel auf diese Betrachtung ausführlicher zurückkommen.

Durch diese Schlüsse und Folgerungen sind wir nun in den Stand gesetzt, die Intensität einer constanten Kraft nach der in einer gewissen Zeit erzeugten Geschwindigkeit zu beurtheilen, oder mehrere solche Kräfte ihrer Intensität nach zu vergleichen, wenn sie nach und nach auf denselben materiellen Punkt oder auf solche Punkte von gleicher Masse wirken.

Denn vergleichen wir die gleichförmig beschleunigten Bewegungen, welche zwei constante Kräfte P und P′ demselben materiellen Punkte ertheilen, so erhalten wir für die eine die Gesetze:

$$\left\{ \begin{array}{l} v = ct \\ x = \frac{1}{2} ct^2 \end{array} \right\},$$

für die zweite die Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} v' = c't \\ x' = \frac{1}{2} c' t^2 \end{array} \right\};$$

sie unterscheiden sich also blos durch die Größe der Beschleunigungen c und c′, d. i. durch die in derselben Zeiteinheit ertheilten Geschwindigkeiten, und die Kräfte P und P′ müssen nach dem Vorhergehenden diesen Größen proportional sein. Man hat dadurch:

$$P : P' = c : c'$$

und

$$P = P' \frac{c}{c'} \qquad (40.$$

als die Ausdrücke, welche dazu dienen, die eine dieser Kräfte durch die andere zu messen.

Will man dagegen zu dieser Vergleichung die Zeit anwenden, welche jede dieser Kräfte zur Erzeugung derselben Geschwindigkeit, der Einheit der Geschwindigkeit, nöthig hat, so geben die obigen Gleichungen:

$$1 = ct_{,} = c't_{,}' \quad , \qquad c = \frac{1}{t_{,}} \quad , \qquad c' = \frac{1}{t_{,}'} \; ,$$

und die vorhergehende Proportion wird:

$$P : P' = \frac{1}{t_{,}} : \frac{1}{t_{,}'} \; .$$

Endlich hat man allgemein aus den obigen Gleichungen

$$c = \frac{v}{t} \quad , \qquad c' = \frac{v'}{t'}$$

und damit die Proportion

41.) $$P : P' = \frac{v}{t} : \frac{v'}{t'} \; ,$$

womit denn die oben ausgesprochenen Sätze über die gegenseitigen Verhältnisse zweier Kräfte bewiesen sind.

§. 41.

In den meisten Fällen handelt es sich aber darum, die Kräfte nach den Wirkungen zu beurtheilen, welche sie auf materielle Punkte von ungleichen Massen hervorbringen; suchen wir also, auf welche Weise dies geschehen kann und muß.

In der Einleitung wurde bereits (§. 8) die Erklärung von zwei gleichen Massen gegeben; unseren jetzt festgestellten Begriffen gemäß werden wir jene Erklärung nun so fassen:

Zwei materielle Punkte haben gleiche Massen, wenn ihnen durch dieselbe Kraft oder durch gleiche Kräfte in derselben Zeit dieselbe Geschwindigkeit ertheilt wird.

Wirken dann zwei gleiche Kräfte P in parallelen Richtungen auf zwei materielle Punkte von gleicher Masse, die mit m bezeichnet sei, so werden sich diese immer auf gleiche Weise, mit gleicher Beschleunigung neben einander fortbewegen, und es wird deßhalb in ihrer Bewegung nichts geändert werden, wenn man sie von Anfang an in unmittelbare Berührung bringt, in welchem Falle sie dann einen einzigen materiellen Punkt vorstellen werden, dessen Masse 2m und an welchem die Kraft 2P thätig ist. Wir schließen daraus, daß die doppelte Kraft der doppelten Masse, und überhaupt die nfache Kraft der nfachen Masse in derselben Zeit dieselbe Geschwindigkeit ertheilt, wie die einfache Kraft der einfachen Masse.

Haben wir nun zwei ungleiche Kräfte P und P′, von denen die erste der Masse m die Geschwindigkeit c, die andere die Geschwindigkeit $c_{,}$ in der Einheit der Zeit ertheilt, für welche also die Proportion:

$$P : P' = c : c_{,}$$

stattfindet, so wird die Kraft nP′ oder P, der Masse nm oder m, ebenfalls die Geschwindigkeit $c_{,}$ mittheilen, und deßhalb auch die Proportion

$$P' : P_{,} = m : m_{,}$$

eintreten. Die erste Proportion gibt aber

$$P' = P\frac{c_{,}}{c}\ ,$$

die zweite ebenso

$$P' = P_{,}\frac{m}{m_{,}}\ ,$$

und die Gleichsetzung dieser Werthe führt auf die Gleichung:

$$\frac{P}{mc} = \frac{P_{,}}{m_{,}c_{,}}$$

oder auf die Proportion:

$$P : P_{,} = mc : m_{,}c_{,} \qquad (42.$$

aus welcher man schließt, daß sich die Intensitäten zweier Kräfte wie die Producte aus den bewegten Massen in die in jeder Zeiteinheit ertheilten Geschwindigkeiten verhalten.

Wird $c_{,} = c$, so folgt:

$$P : P_{,} = m : m_{,}\ ;$$

d. h. zwei Kräfte, welche zwei materiellen Punkten von ungleichen Massen dieselbe Beschleunigung ertheilen, verhalten sich wie diese Massen.

Für $m_{,} = m$ erhalten wir die frühere Proportion:

$$P : P_{,} = c : c_{,}$$

wieder, und es ist nun leicht zu sehen, daß das allgemeinste Verhältniß sein wird:

$$P : P_{,} = \frac{mv}{t} : \frac{m_{,}v_{,}}{t_{,}}\ , \qquad (43.$$

daß also die Intensitäten zweier Kräfte im geraden Verhältnisse der bewegten Massen und der ertheilten Ge=

schwindigkeiten und im umgekehrten der dazu verwendeten Zeiten stehen.

Um demnach die Kräfte oder vielmehr ihre Intensitäten in Zahlen ausdrücken zu können, werden wir irgend eine Kraft als Einheit annehmen, und dies wird am einfachsten diejenige sein, welche der Einheit der Masse in der Einheit der Zeit die Einheit der Geschwindigkeit ertheilt. Sei dieses die Kraft $P_{,}$, so hat man zugleich

$$P_{,} = 1 \ , \quad m_{,} = 1 \ , \quad v_{,} = 1 \ , \quad t_{,} = 1$$

und demnach einfach

44.) $$P = \frac{mv}{t} \ ,$$

oder wenn man $\frac{v}{t}$ durch c ersetzt:

45.) $$P = mc \ .$$

Nach der so bestimmten Einheit für die Kraft wird dann irgend eine constante Kraft durch das Product aus der bewegten Masse in die in der Einheit der Zeit erzeugte Geschwindigkeit gemessen, oder durch das Product aus der bewegten Masse in die Beschleunigung der Bewegung.

Das Product mv aus der Masse des Bewegten in die Geschwindigkeit, welche er in einem bestimmten Augenblicke besitzt, wird auch Bewegungsgröße des Bewegten in diesem Augenblicke genannt; das Product mc wird also die in der Zeiteinheit erzeugte Bewegungsgröße vorstellen, und man kann demnach auch sagen, die bewegende Kraft wird durch die in der Einheit der Zeit erzeugte Bewegungsgröße gemessen.

In manchen Fällen kann indessen auch die augenblickliche Bewegungsgröße am Ende einer Zeit t als das Maaß einer Kraft betrachtet werden, welche diese Bewegungsgröße dem Bewegten von der Ruhe aus in der Einheit der Zeit zu ertheilen vermag, und man kann demgemäß annehmen, daß die Bewegungsgröße mv, welche der Bewegte in einem gewissen Augenblicke besitzt, und deren Entstehung nicht genau bekannt ist, die Wirkung einer Kraft P = mv sei, welche während der vorhergehenden Zeiteinheit in dem Bewegten thätig war, und ihn von der Ruhe aus in Bewegung gesetzt hat.

§. 42.

Aus dem Vorhergehenden könnte auf den ersten Anblick der Schluß gezogen werden, als müsse man auf diese Art zwei verschiedene Einheiten für die Kraft erhalten, da wir in der Einleitung und in den beiden vorhergehenden Abschnitten bereits die Gewichtseinheit als Einheit für das Maaß der Kräfte angenommen haben. Bei näherer Erwägung ergibt sich aber, daß unserer neuen Krafteinheit die Einheit der Masse zu Grunde liegt, und daß über diese bisher noch keine Annahme getroffen wurde. Ueber diese werden wir deßhalb, da im gewöhnlichen Leben ohnehin keine solche Einheit im Gebrauch ist, in solcher Weise bestimmen, daß die neue Krafteinheit mit unserer Gewichtseinheit übereinkommt; wir werden also diejenige Masse als Einheit für die Masse annehmen, welcher von der Gewichtseinheit als Einheit der Kraft in der Einheit der Zeit die Einheit der Geschwindigkeit mitgetheilt wird.

Behalten wir demnach das Kilogramm als Einheit für die Kraft und die Sekunde und den Meter als Einheiten für die Zeit und die Geschwindigkeit bei, so müssen wir als Einheit für die Masse diejenige Masse wählen, welche durch eine constante Kraft von 1 Kilogramm in jeder Sekunde 1 Meter Geschwindigkeit erhält.

Eine solche Einheit kann offenbar nur durch die Erfahrung festgesetzt werden, in Folge der Beobachtung einer wirklich erzeugten gleichförmig beschleunigten Bewegung, bei welcher wir die Kräfte unmittelbar durch Gewichte (Kilogramme) gemessen, und die in verschiedenen Massen erzeugten Beschleunigungen beobachtet haben.

Dieses Mittel bietet uns denn wirklich der freie Fall der Körper gegen die Erde dar, aber in solcher Weise betrachtet, wie diese Bewegung sein würde, wenn keine Luft vorhanden wäre, also der freie Fall im leeren Raume.

§. 43.

Die Erfahrung zeigt nämlich, daß alle Körper ohne Ausnahme ein Bestreben besitzen, sich in einer zur Oberfläche eines ruhigen Wassers senkrechten Richtung der Erde zu nähern, wenn sie nicht durch feste Hindernisse davon abgehalten werden. In diesem Falle äußern sie dann jenes Bestreben durch einen fortwährenden Druck gegen das feste Hinderniß, welcher als Maaß für die Kraft dienen kann, die ihn in Bewegung setzen will, und die wir sein Gewicht nennen. Jenes Bestreben selbst wird als Eigenschaft der Körper gewöhnlich mit dem Namen

Schwere bezeichnet, als Ursache des Schwer-sein's. Oft verstehen wir aber unter dem Worte: Schwere selbst wieder die Ursache jener Eigenschaft der Körper auf der Erde, und denken uns dieselbe als eine der Erde innewohnende anziehende Kraft, welche ihre Wirkung auf alle Stoffe ohne Unterschied erstreckt, und sowohl auf die innern wie auf die äußern, sowohl auf die kleinsten wie auf die größten Theile der Körper einwirkt. —

In der That sehen wir einerseits mittels der Wage, daß die geringste Vermehrung oder Verminderung der Masse eines Körpers eine entsprechende Vermehrung oder Verminderung seines Gewichtes zur Folge hat, gleichviel ob diese Verminderung oder Vermehrung im Innern oder auf der Oberfläche des Körpers stattfindet. Auf der andern Seite zeigen die Versuche, daß alle Körper, gleichviel aus welchem Stoffe sie bestehen, und welchen Rauminhalt sie haben, um so mehr gleich schnell fallen, je mehr der Luftwiderstand beseitigt wird, und wir schließen daraus, daß sie im leeren Raume alle mit vollkommen gleicher Geschwindigkeit fallen würden, daß also jene anziehende Kraft der Erde durchaus keinen Unterschied unter den verschiedenen Stoffen macht.

Endlich lehren uns die Versuche mit der Atwood'schen Fallmaschine oder auf der Gallilei'schen schiefen Ebene, daß die Geschwindigkeiten, welche die Körper durch den Fall erlangen, den Zeiten proportional sind, während sich die von der Ruhe aus durchlaufenen Wege wie die Quadrate der entsprechenden Zeiten verhalten, daß also die Bewegung des Falles, wenigstens innerhalb der den Versuchen zukommenden Ausdehnung eine gleichförmig beschleunigte ist.

Aus diesen Ergebnissen der Erfahrung schließen wir denn in Folge der vorhergehenden Erörterungen, daß die Schwere innerhalb der Grenzen jener Versuche eine unveränderliche Stärke oder Intensität besitzt, daß also auch die Gewichte der Körper in diesen Grenzen constante Kräfte, und daß diese Kräfte wegen der gleichen Beschleunigung für alle Körper den Massen der bewegten Körper proportional sind. Umgekehrt sind sonach auch die Massen den Kräften d. i. den Gewichten der Körper proportional, aber diese Wahrheit, von welcher wir so überzeugt sind, daß wir im gewöhnlichen Leben Masse und Gewicht für gleichbedeutend nehmen, folgt nothwendig erst aus der vorerwähnten gleichen Beschleunigung. Bezeichnen wir nun diese Beschleunigung des freien Falles im luftleeren Raume mit g, die Masse eines materiellen Punktes oder eines Körpers mit M, sein Gewicht mit P, so hat man, nach dem oben (§. 41) für die constanten Kräfte festgestellten Maaße, für alle Körper

$$P = Mg \quad , \quad M = \frac{P}{g} \,. \qquad (46.$$

Die Einheit der Masse muß folglich diejenige sein, deren Gewicht der Größe g gleich ist, d. h. durch dieselbe Zahl ausgedrückt wird, wie diese Beschleunigung; denn die vorstehende Gleichung gibt nur $M = 1$, wenn $P = g$ wird. Es leuchtet aber auch so ein, daß weil die Masse eines Körpers, welcher ein Kilogramm Gewicht hat, von dieser Kraft die Beschleunigung g erhält, dieselbe Kraft, um die Geschwindigkeit: Eins in der Zeiteinheit zu erzeugen, auf eine g fache Masse wirken müßte, oder auf die Masse eines Körpers, der g Kilogramm wirkt, daß folglich die Masse dieses Körpers die Einheit der Masse ist *).

Die Beschleunigung g, also auch die Intensität der Schwere und das Gewicht eines Körpers ändern sich, wie wir später sehen werden, von einem Orte der Erdoberfläche zum andern mit der geographischen Breite dieser Orte; die Körper sind an den Polen der Erde schwerer, als im Aequator. Diese Veränderung ist aber sehr klein im Verhältniß zu dem mittleren Werthe, und man kann für die meisten Zwecke mit hinreichender Genauigkeit

$$g = 9,8 \text{ Meter}$$

als mittleren Werth für die in einer Sekunde erzeugte Beschleunigung des freien Falles annehmen. Damit finden wir denn als Massen-Einheit die Masse eines Körpers, welcher 9,8 Kilogramm wiegt; oder die Masse, welche in 9,8 Kubik-Dezimeter destillirten Wassers bei 4° C enthalten ist. Ein Körper aus irgend einem Stoffe enthält demnach, wenn er 1 Kilogramm wiegt, die Masse $\frac{1}{9,8}$ oder 0,102, und überhaupt werden nach unsern zu Grunde ge-

*) Einige deutsche Schriftsteller nehmen diejenige Masse als Einheit an, welche in der Gewichtseinheit enthalten ist, also diejenige Masse, welcher von der Einheit der Kraft die Beschleunigung g ertheilt wird. Mit dieser Annahme wird in der Proportion (42) $P' = 1$, $m' = 1$, $c' = g$, und man hat daher

$$P = \frac{mc}{g} \,,$$

d. h. die Kraft wird dann durch den Quotienten aus der in der Einheit der Zeit erzeugten Bewegungsgröße durch die Beschleunigung des freien Falles gemessen.

legten Maaßeinheiten, die Massen der Körper durch nahezu zehnmal kleinere Zahlen ausgedrückt, als ihre Gewichte.

§. 44.

Werfen wir hier, ehe wir weitergehen, einen Blick auf die verschiedenen Maaß-Einheiten, die bis jetzt festgestellt worden sind, zurück, um ihre Beziehungen zu einander kennen zu lernen und daran einige Bemerkungen in Bezug auf die Homogeneität der analytischen Ausdrücke zu knüpfen. Diese Einheiten, die geometrischen, welche in der Mechanik ebenfalls ihre Anwendung finden, mitgerechnet, sind folgende:

1) die Einheit der Länge, der Entfernung, des Weges,
2) die Einheit des Flächenmaaßes,
3) die Einheit des Rauminhaltes,
4) die Einheit der Kraft und des Gewichtes,
5) die Einheit der Zeit,
6) die Einheit der Geschwindigkeit,
7) die Einheit der Masse.

Von diesen Einheiten sind drei, die der Länge, der Kraft und der Zeit durchaus unabhängig und willkürlich und es kann jede von ihnen geändert werden ohne Rücksicht auf die beiden andern; sie können daher Haupt-Einheiten genannt werden. Die übrigen Einheiten dagegen sind Neben-Einheiten, sie sind von einer oder von mehreren der Haupt-Einheiten abhängig, und werden nach diesen durch strenge Lehrsätze bestimmt; sie können deßhalb nicht mehr willkürlich geändert werden, sondern nur in Uebereinstimmung mit den Haupt-Einheiten. So hängen die Einheiten der Fläche und des Raumes von dem angenommenen Längenmaaße ab, und man kann z. B. nicht den Quadratfuß als Flächeneinheit nehmen, wenn man die Längen nach Meter mißt; d. h. man könnte nicht sagen, das Product ab drücke die Oberfläche eines Rechtecks in Quadratfußen aus, wenn a und b die Seiten desselben in Meter gemessen angeben.

Die Einheit für die Geschwindigkeit hängt von zwei Haupt-Einheiten ab, von der Einheit der Länge und von der Einheit der Zeit, und ändert sich mit einer jeden derselben. Läßt man z. B. die Sekunde als Einheit der Zeit, nimmt aber den Fuß als Einheit für die Länge, so hat man diejenige Geschwindigkeit zur Einheit zu nehmen, mit welcher ein materieller Punkt bei gleichförmiger Bewegung in 1 Sekunde 1 Fuß Weges zurücklegt, und welche etwa 3mal kleiner ist, als unsere frühere Einheit. Aendert man dann auch noch die Zeiteinheit

und nimmt z. B. die Minute als solche an, so wird die Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit eines Punktes sein, welcher erst in 1 Minute 1 Fuß zurücklegt; diese Geschwindigkeit ist offenbar wieder 60mal kleiner, als die vorhergehende, und demnach werden die Zahlen, welche eine bestimmte Geschwindigkeit messen, im ersteren Falle 3mal, im letzteren 180mal so groß, als nach unserer ursprünglichen Annahme, wo der Meter und die Sekunde die Einheiten für die Länge und der Zeit sind.

Noch zusammengesetzter sind die Verhältnisse bei der Massen-Einheit, da diese von den drei Haupt-Einheiten der Länge, der Kraft und der Zeit zugleich abhängt. Wird z. B. die Sekunde als Einheit der Zeit beibehalten, aber der Fuß und das Pfund als Einheiten der Länge und der Kraft angenommen, so wird die Einheit der Masse die Masse eines Körpers sein, welcher 30 ℔ wiegt, da in diesem Falle die Beschleunigung g der Schwere den Werth: 30 Fuß erhält; die in einem 1 Pfund wiegenden Körper enthaltene Masse ist nun $\frac{1}{30}$, und die Zahlenwerthe für die Massen sind jetzt 30mal kleiner, als die Zahlenwerthe für die Gewichte der Körper. Im Vergleich gegen unsere obige Einheit dagegen ist die jetzige $1\frac{1}{2}$ mal so groß, also die Zahlenwerthe in Bezug auf letztere zwei Drittel von denen, welchen die erstere zu Grunde gelegt ist; denn die Masse, welche nach dieser Einheit $\frac{1}{10}$ ist, wird in Bezug auf jene $\frac{2}{30}$ oder $\frac{1}{15}$, wenn 1 Kilogramm gleich 2 Pfund genommen wird, u. s. f. Alle diese Beziehungen müssen also wohl berücksichtigt werden, wenn die Rechnung richtige Ergebnisse liefern soll.

Ferner ist zu beachten, daß in Folge der obenerwähnten Abhängigkeit der Neben-Einheiten von den Haupt-Einheiten, die allgemeinen Ausdrücke nicht mehr in homogenen Formen erscheinen, weil die Einheiten selbst nicht sichtbar ausgedrückt sind, wie dies für den Ausdruck des Flächeninhaltes in §. 46 der Einleitung bereits gezeigt worden ist. Eine noch höhere Berücksichtigung verdient indessen die dortige Bemerkung bei den analytischen Ausdrücken in der Mechanik, bei welchen es nicht selten sehr gut ist, wenn man sich von ihrer Homogeneität überzeugt, was dann immer durch Einführung der Einheiten geschehen kann. So werden durch Einführung der Größen λ, τ, φ, etc. für die Einheiten der Länge, der Zeit, der Geschwindigkeit u. s. f. die oben erhaltenen durchaus unhomogenen Ausdrücke:

$$v = b \;,\quad v = ct \;,\quad x = \frac{1}{2} g t^2 \;,\quad \text{etc.}$$

gleichbedeutend mit den homogenen:

$$v = \varphi \frac{b}{\lambda} \;,\quad v = c \frac{t}{\tau} \;,\quad x = \frac{1}{2} g \frac{t^2}{\tau^2} = \frac{1}{2} \lambda \frac{g}{\varphi} . \frac{t^2}{\tau^2} \;,\quad \text{etc.}$$

Wie man sich aber, um diese Einführung der Einheiten zu ersparen, in der Geometrie mit Beachtung der Abhängigkeit der Einheit des Flächenmaaßes von der des Längenmaaßes, daran gewöhnt hat, ein Product aus zwei auf die Längen-Einheit bezogenen Factoren als homogen mit einem Flächenmaaße oder mit einer auf die Flächeneinheit bezogenen Größe zu halten, und sich unter einem Product von drei solchen Factoren einen Rauminhalt zu denken, so wird man sich auch für die übrigen Größen, die in der Mechanik vorkommen, ähnliche Vorstellungen bilden, um darnach die Homogeneität der Ausdrücke leicht beurtheilen zu können, und man findet bald,

1) daß die Zeit t in allen diesen Ausdrücken als absolute Zahl erscheint, wie die Zahl π, die Kreisbogen oder Winkel, u. s. f., weil alle übrigen Einheiten, außer den geometrischen von der Einheit der Zeit abhängen, und deßhalb die Größe t immer nur für den Quotienten $\frac{t}{\tau}$ steht;

2) die Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, werden dann einfach homogen mit Längen, d. h. mit Größen, welche auf die Längen-Einheit bezogen sind, und nicht selten bezeichnet dieselbe Größe bald eine Beschleunigung, bald einen zurückgelegten Weg. So ist in dem Ausdruck: $v = ct$ die Größe c homogen mit v und stellt die Beschleunigung vor, während sie in der Gleichung: $x = \frac{1}{2} ct^2$ mit der Entfernung oder dem Wege x homogen erscheint, und das Doppelte des Weges vorstellt, der in der ersten Zeiteinheit beschrieben wird.

3) Die Masse erscheint, wie die Länge, meistens als unabhängige Größe, wenn sie nicht, wie wir sogleich sehen werden, durch das Volumen und die Dichte ausgedrückt wird; denn nach unsern vorhergehenden Ableitungen sollte eigentlich die Masse, nicht die Kraft die dritte Haupt-Einheit sein. Demzufolge wird denn auch

4) die Kraft sehr oft analytisch durch ein Product aus Masse und Geschwindigkeit und Beschleunigung vorgestellt, und es ist überhaupt ein Product aus zwei Factoren, von denen der eine auf die Einheit der

Masse, der andere auf die Einheit der Länge bezogen ist, homogen mit einer auf die Einheit der Kraft bezogenen Größe.

Die vorhergehenden Bemerkungen wird man leicht auch auf die später noch einzuführenden Größen und ihre Einheiten ausdehnen können.

§. 45.

Die Masse eines Körpers steht auch in einer nothwendigen Beziehung zu seinem Rauminhalt oder Volumen, wie in der Einleitung (§. 5) bereits erörtert worden ist, wo sowohl die Entstehung des Begriffes der Dichte erläutert, als auch diese selbst dahin erklärt worden ist, daß darunter das Verhältniß der Masse zu dem erfüllten Raum zu verstehen sei. Da wir uns nun einen materiellen Punkt nicht ohne einen, wenn noch so kleinen, Rauminhalt denken können, und ihm bald eine größere, bald eine kleinere Masse zuschreiben, ja selbst die Masse eines ganzen Körpers in ihm vereinigt annehmen, so müssen wir demselben auch eine gewisse Dichte beilegen. Jedenfalls werden wir aber einen materiellen Punkt als durchaus gleichartig betrachten, und es kann deßhalb bei ihm nur von einer einzigen unveränderlichen Dichte die Rede sein.

Vergleichen wir demnach die Dichten zweier materiellen Punkte, oder die eines solchen Punktes und eines in allen Theilen gleichartigen oder homogenen Körpers, so erhalten wir nach jenen Erklärungen die Proportion:

$$D : D' = \frac{M}{V} : \frac{M'}{V'},$$

worin D, D' die Dichten, M, M' die Massen, V und V' die körperlichen Räume jener materiellen Punkte oder eines Punktes und eines homogenen Körpers, oder auch zweier solcher Körper vorstellen. Nehmen wir also die Dichte eines homogenen Körpers, welcher in der Einheit des Raumes die Einheit der Masse enthält, als Einheit für die Dichte an, so hat man für diesen zugleich

$$D' = 1 \quad , \qquad M' = 1 \quad , \qquad V' = 1$$

und es folgt daraus für die Dichte des andern Körpers oder des materiellen Punktes der Ausdruck:

$$D = \frac{M}{V}$$

und umgekehrt für die Masse M der Werth:

$$M = DV, \qquad (47.$$

der Raumeinheit, z. B. von 1 Kubik-Fuß, Wasser bekannt sein, und mit in Rechnung gezogen werden.

Die Dichte der gasförmigen Stoffe wird gewöhnlich mit derjenigen der atmosphärischen Luft bei gegenseitiger gleicher Temperatur und Elastizität verglichen, indem man für alle diese Stoffe die relative Ausdehnung durch die Wärme als gleich voraussetzt. Für diese Stoffe bleibt mithin auch beim metrischen Maaßsysteme der Ausdruck:

$$P = p_{,} W V$$

für die Berechnung des Gewichtes aus dem Volumen. Hier bedeutet dann $p_{,}$ das Verhältniß der Dichte des betreffenden Gases oder Dampfes zu der der Luft und W das Gewicht eines Kubik-Dezimeters trockner Luft bei 0° C und $0^{m},76$ Barometerhöhe. Die genauesten Versuche geben

$$W = \frac{1}{769,778} \text{Kgr} = 0\overset{\text{Kgr}}{,}0012996 .$$

Endlich ist noch in Betreff der Zahlenwerthe für die absolute Dichte der verschiedenen Stoffe (die spezifischen Dichten sind mit den spezifischen Gewichten eins und dasselbe) zu bemerken, daß im metrischen Systeme, wo man

$$P = pV = gDV$$

hat, einfach

51.) $$D = \frac{p}{g}$$

findet, so daß hier die absoluten Dichten nahezu 10mal kleiner sind, als die spezifischen Gewichte, wie oben die Dichte des Wismuth, dessen spezifisches Gewicht 9,8 ist, gleich 1 angegeben wurde. In den übrigen Maaßsystemen dagegen wird die absolute Dichte durch das Product aus der in der Raumeinheit Wasser enthaltenen Masse: $\frac{W}{g}$ in das spezifische Gewicht des betreffenden Stoffes ausgedrückt. In einem Maaßsysteme z. B., in dem 1 Kubik-Fuß Wasser 60 Pfund wiegt, und $g = 30$ Fuß ist, hat man $\frac{W}{g} = 2$; die Zahlenwerthe der Dichten sind also hier doppelt so groß als die der spezifischen Gewichte.

§. 46.

Nachdem im Vorhergehenden die Messung der constanten Kräfte festgestellt worden, so können wir nun untersuchen, auf welche Weise

die veränderlichen Kräfte zu messen sind, d. h. in welchen Beziehungen bei der geradlinigen Bewegung die augenblickliche Intensität einer solchen Kraft zu der Geschwindigkeit und Lage des Bewegten steht.

Sei dazu wieder A, Fig. 49, die Lage des Bewegten am Ende der Zeit t, v seine Geschwindigkeit, m seine Masse, und P die Intensität der an ihm thätigen Kraft in diesem Augenblicke. Lassen wir dann die Zeit t wieder um ein kleines Zeittheilchen Δt wachsen, nach welchem der Bewegte in B ankommt, so wird seine Geschwindigkeit um einen gewissen Theil Δv, und die Kraft um ΔP zunehmen, und demnach in B oder am Ende der Zeit $t+\Delta t$ seine Geschwindigkeit $v+\Delta v$, die Intensität der Kraft $P+\Delta P$ geworden sein.

Wäre die Kraft von A bis B unverändert und gleich P geblieben, so würde sich die Geschwindigkeit v offenbar um eine kleinere Größe $\Delta' v$ geändert haben, da mit der Kraft auch die Wirkung, also hier die Aenderung der Geschwindigkeit wachsen muß, und nach dem Maaße einer unveränderlichen Kraft hätte man [§. 41, (44)]

$$P = m\frac{\Delta' v}{\Delta t},$$

da $\Delta' v$ die in der Zeit Δt erzeugte Geschwindigkeit ist. Ebenso wird man einsehen, daß wenn eine Kraft $P+\Delta P$ von A bis B oder während der Zeit Δt thätig wäre, eine größere Geschwindigkeit $\Delta'' v$ als Δv erzeugt werden müßte, für welche sich die Gleichung:

$$P + \Delta P = m\frac{\Delta'' v}{\Delta t}$$

ergeben würde. Man hat demnach einmal

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} > m\frac{\Delta' v}{\Delta t} \text{ oder } > P$$

und auf der andern Seite

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} < m\frac{\Delta'' v}{\Delta t} \text{ oder } < P + \Delta P\,.$$

Bezeichnet also β wieder eine Zahl zwischen 0 und 1, so hat man offenbar als wahren Werth von $m\frac{\Delta v}{\Delta t}$, welcher zwischen P und $P+\Delta P$ liegt:

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = P + \beta\,\Delta P\,.$$

Geht man nun wieder in den Punkt A zurück, wo ΔP Null wird, und das Verhältniß: $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ seinen Anfangswerth: $\frac{dv}{dt}$ erhält, so findet man

$$52.)\qquad m\frac{dv}{dt}=P$$

als Maaß der Intensität der Kraft P in dem Augenblicke, wo der Bewegte durch den Punkt A geht, und man schließt daraus, daß dieses Maaß dem Producte aus der Masse m des Bewegten in das Aenderungsgesetz der Geschwindigkeit in Bezug auf die Zeit gleich ist, oder mit andern Worten, daß das Maaß der **Kraft** durch das **Aenderungsgesetz** der **Bewegungsgröße** in Bezug auf die Zeit ausgedrückt wird.

Man hat aber auch

$$\frac{dv}{dt}=\frac{d.\frac{dx}{dt}}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$$

und damit wird das Maaß der Kraft:

$$53.)\qquad P=m\frac{d^2x}{dt^2};$$

das allgemeine Maaß der Kraft ist folglich auch dem **zweiten Aenderungsgesetz** der **Entfernung** des Bewegten von einem festen Punkte in Bezug auf die Zeit proportional, so daß wenn

$$x=f(t)\quad,\quad v=f'(t)$$

die Werthe von x und v in Function der Zeit sind,

$$P=m\,f''(t)$$

wird. Endlich erhält man durch die Verbindung des Werthes (36) von v und des Werthes (52) von P die neue Gleichung:

$$\frac{P}{v}=m\frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=m\frac{dv}{dx},$$

und daraus folgt

$$54.)\qquad P=mv\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2}m\frac{d.v^2}{dx}\quad,\quad 2P=\frac{d.mv^2}{dx}.$$

Das Product mv^2 aus der Masse des Bewegten in das Quadrat seiner Geschwindigkeit hat man lebendige Kraft des Bewegten genannt; wird also die Geschwindigkeit des Bewegten und demnach auch seine lebendige Kraft als eine Function der Entfernung x dargestellt, oder als solche gedacht, so drückt das **Aenderungsgesetz der lebendigen Kraft** in Bezug auf x das Maaß der **doppelten Kraft** als Function von x aus.

§. 47.

Die allgemeinen Gleichungen der geradlinigen Bewegung sind nun in ihrer Zusammenstellung:

$$\left.\begin{array}{c} x = f(t) \;,\quad v = \frac{dx}{dt} = f'(t) \;, \\ P = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\,f''(t) \;, \\ 2P = m\frac{d.v^2}{dx} \;. \end{array}\right\}$$

Diese Gleichungen dienen dazu, die Gesetze irgend einer geradlinigen Bewegung nach gegebenen Bedingungen kennen zu lernen, wozu es genügt, daß eine der drei Größen: x, v und P auf irgend eine Weise durch die beiden andern und die Zeit t ausgedrückt werden kann; man hat bei ihrer Anwendung im Allgemeinen hauptsächlich darauf zu achten, welches Zeichen den Differentialquotienten gegeben werden muß, nämlich ob die abhängige Veränderliche im Anfange der Bewegung mit der Zeit, welche immer als wachsend angenommen wird, wächst oder abnimmt, ob also das Aenderungsgesetz derselben in Bezug auf die Zeit positiv oder negativ ist.

Die einfachsten Fälle sind natürlich diejenigen, wo die gegebene Größe nur eine Function von einer der andern Veränderlichen ist; es sind folgende sechs:

1) Die Entfernung x ist als Function der Zeit gegeben: also

$$x = f(t) \;.$$

Man erhält dann, wie schon bekannt, die Ausdrücke für die Geschwindigkeit und Kraft durch die abgeleiteten Functionen:

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t) \;,\qquad P = m\frac{dv}{dt} = f''(t) \;.$$

Soll z. B. für eine geradlinige Bewegung

$$x = at^2$$

sein, so findet man die Werthe:

$$v = 2at \quad , \qquad P = 2ma \ ,$$

welche nach dem Vorhergehenden leicht zu erklären sind.

2) Der Ausdruck für die Geschwindigkeit ist als Function der Zeit gegeben:

$$v = f(t) \ .$$

Man hat wie vorher für die Kraft die Abgeleitete:

$$P = m\frac{dv}{dt} = f'(t) \ ;$$

die Entfernung dagegen wird wie früher schon gezeigt wurde, durch das allgemeine Integral:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\Delta}} x = x - x_0 = \int_0^t dt.v = \int_0^t dt \, . \, f(t)$$

gefunden, worin x_0 den bekannten oder beliebigen Werth von x am Anfang der Zeit oder für $t = 0$ bezeichnet.

Soll z. B. eine Bewegung so beschaffen sein, daß

$$v = ae^{\frac{g}{k}t}$$

ist, wo e wie immer die Basis der natürlichen Logarithmen vorstellt, so findet man für die Kraft:

$$P = ma\frac{g}{k}\, e^{\frac{g}{k}t} = m\frac{g}{k}v = \frac{g}{k}mv$$

und für die Entfernung:

$$x - x_0 = a\int_0^t dt.e^{\frac{g}{k}t} = a\frac{k}{g}\, e^{\frac{g}{k}t} = m\frac{k}{g}v \ .$$

3) Der Ausdruck für die Geschwindigkeit ist in Function der Entfernung x gegeben:

$$v = f(x) \ .$$

Man sucht zuerst den Werth von t in Function von x, und zwar mittels der Gleichung:

$$v = \frac{dx}{dt} = f(x) ;$$

denn diese gibt auch durch Vertauschung der Veränderlichen, indem man x als die unabhängige, und t als die abhängige betrachtet

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(x)} , \quad \overset{t}{\underset{0}{\Delta}} t = t = \int_{x_0}^{x} dx . \frac{1}{f(x)} , \qquad (55.$$

und daraus zieht man dann umgekehrt x in Function von t. Den Werth für die Kraft gibt die Gleichung:

$$P = m v \frac{dv}{dx} = m f(x) f'(x) \qquad (56.$$

in Function von x, und durch Elimination von x mittels des vorher erhaltenen Werthes dieser Veränderlichen erhält man P in Function von t.

Ist z. B.

$$v = \frac{g}{k} x ,$$

so wird einfach,

$$t = \frac{k}{g} \int_{x_0}^{x} dx . \frac{1}{x} = \frac{k}{g} \operatorname{logn} \frac{x}{x_0} , \quad x = x_0 e^{\frac{g}{k} t} ;$$

und anderseits folgt für die Kraft:

$$P = m \frac{g}{k} x . \frac{g}{k} = m \frac{g^2}{k^2} x .$$

4) **Der Ausdruck für die Kraft ist als Function der Zeit gegeben** *):

$$P = f(t) .$$

---

*) Es dürfte hier die Bemerkung nicht überflüssig sein, daß die Intensität einer Kraft wohl analytisch als eine Function der Zeit gegeben werden, aber niemals wirklich und insofern von der Zeit abhängen kann, daß die Zeit die **Ursache** für die Veränderung derselben ist; Die Zeit oder Dauer einer Erscheinung ist immer nur eine Folge des gegenseitigen Verhältnisses der Kräfte, welche diese Erscheinung hervorbringen, und kann niemals Ursache einer solchen sein.

Der Werth für die Geschwindigkeit folgt aus der Gleichung:

57.) $$\overset{v}{\underset{v_0}{\Delta}} v = v - v_0 = \frac{1}{m}\int_0^t dt \, . \, f(t) ,$$

worin v_0 den Werth von v am Anfang der Zeit, für $t = 0$, vorstellt, und m die Masse des Bewegten; der Ausdruck für die Entfernung wird wie früher:

$$x - x_0 = \int_0^t dt \, . \, v ,$$

und wenn man den Werth von v einführt, nimmt er die Form an:

58.) $$x - x_0 = \frac{1}{m}\int_0^t dt \, . \int_0^t dt \, . \, f(t) + v_0 t .$$

Ist z. B. $P = pt^0 = p$ gegeben, so hat man

$$v - v_0 = \frac{p}{m} t \quad , \quad x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} \frac{p}{m} t^2 .$$

5) Der Ausdruck für die Kraft ist als Function der Geschwindigkeit gegeben:

$$P = f(v) .$$

Die Gleichung:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} f(v)$$

wird durch Vertauschung der Veränderlichen, indem man sich v als die unabhängige denkt, und t als eine Function von v betrachtet,

$$\frac{dt}{dv} = m \frac{1}{f(v)} ,$$

und gibt durch Integration den Werth von t in v unter der Form:

59.) $$t = m \int_{v_0}^{v} dv \, . \, \frac{1}{f(v)} .$$

Kann diese Gleichung in Bezug auf v aufgelöset, also v in Function von t unter der Form:

$$v = \varphi(t)$$

dargestellt werden, so erhält man wieder wie früher:

$$x - x_0 = \int_0^t dt \, . \, \varphi(t) \, .$$

Läßt sich die vorhergehende Gleichung in t und v aber nicht in Bezug auf letztere Veränderliche auflösen, so zieht man aus der Gleichung:

$$P = m v \frac{dv}{dx}$$

zuerst wieder durch Vertauschung der Veränderlichen, indem man x als eine Function von v betrachtet,

$$\frac{dx}{dv} = m \frac{v}{P} \, ,$$

und daraus den Werth von x in Function von v mittels des allgemeinen Integrals:

$$x - x_0 = m \int_{v_0}^{v} dv \, . \, \frac{v}{f(v)} \, , \qquad (60.$$

und zuletzt aus dieser und der Gleichung (59) durch Elimination von v den Werth von x in Function von t.

Sei z. B. $P = cv^2$; die Gleichung (59) gibt:

$$t = \frac{m}{c}\left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v}\right) \, , \qquad v = \frac{1}{\frac{1}{v_0} - \frac{c}{m} t} \, ,$$

und damit wird nach der darauf folgenden

$$x - x_0 = \frac{m}{c} \operatorname{logn} . \frac{\frac{1}{v_0}}{\frac{1}{v_0} - \frac{c}{m} t} \, .$$

Die Gleichung (60) dagegen führt auf den Werth:

$$x - x_0 = \frac{m}{c} \operatorname{logn} . \frac{v}{v_0} \, ,$$

aus welchem man durch Elimination von v den vorhergehenden Werth von x in t wieder erhält.

Endlich haben wir den letzten Fall:

6) Der Ausdruck für die Kraft ist als Function der Entfernung x gegeben:

$$P = f(x) .$$

Hier wendet man entweder die Gleichung: $P = m\frac{d^2x}{dt^2}$ an, welche man unter der Form:

$$m\frac{d.\frac{dx}{dt}}{dt} = f(x)$$

auf beiden Seiten mit $2\frac{dx}{dt}$ multiplicirt, und dann auf der rechten Seite die unabhängige Veränderliche t mit x vertauscht; man findet dadurch zuerst

$$m.\frac{2\frac{dx}{dt}d.\frac{dx}{dt}}{dt} = m\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{dt} = 2f(x)\frac{dx}{dt}$$

und damit das allgemeine Integral:

$$m\overset{t}{\underset{0}{\Delta_t}}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = mv^2 - mv_0^2 = 2\int_0^t dt.f(x)\frac{dx}{dt} = 2\int_{x_0}^x dx.f(x).$$

Oder man nimmt unmittelbar die Gleichung:

$$2P = 2f(x) = m\frac{d.v^2}{dx},$$

welche sogleich wie vorher

61.) $$mv^2 - mv_0^2 = 2\int_{x_0}^x dx.f(x)$$

gibt. Zieht man dann aus dieser Gleichung den Werth von v als Function von x unter der Form:

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^x dx.f(x)} = \frac{dx}{dt},$$

so führt dieser nach (55) auf das allgemeine Integral, welches t in x ausdrückt, nämlich:

$$t = \int_{x_0}^{x} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} dx \cdot f(x)}},$$

und diese Gleichung in Bezug auf x aufgelöset, wird die Entfernung x durch die Zeit bestimmen.

Dieser sechste Fall kommt in der Natur am meisten vor; es werden deßhalb von demselben unten mehrere Beispiele folgen.

§. 48.

Die Gleichungen, welche wir nach den eben angegebenen Methoden erhalten, drücken die Gesetze der betreffenden Bewegung aus, d. h. sie geben für irgend einen Augenblick oder für irgend einen Werth von t die entsprechenden Werthe für x, v und P; sie bestimmen also den Ort und die Geschwindigkeit des Bewegten, sowie die Intensität der Kraft, die an ihm thätig ist, für jenen Augenblick, und wir sind dadurch in den Stand gesetzt, seine Bewegung in jedem Augenblick und in jeder Hinsicht zu beurtheilen. Man kann sich aber auch ein Bild von der ganzen Bewegung vorführen und sie gleichsam mit einem Blicke überschauen, wenn man sich die Gleichungen derselben construirt, oder durch Curven darstellt, und es folgt aus den Beziehungen, die zwischen den Veränderlichen x, v und P und der unabhängigen Veränderlichen t stattfinden, daß die drei Gleichungen, welche die Werthe von jenen drei durch diese ausdrücken, gleichzeitig in einer und derselben Curve anschaulich gemacht werden können.

Nimmt man nämlich die Werthe von t als Abscissen und die der entsprechenden Geschwindigkeiten v als Ordinaten, so wird die aus der Gleichung zwischen v und t entstehende Curve, welche Geschwindigkeitscurve heißen soll, durch ihre Ordinaten auf einen Blick zeigen, wie die Geschwindigkeit mit der Zeit wächst oder abnimmt, wo sie einen größten oder kleinsten Werth hat, u. s. f. Ferner wird man leicht sehen, daß die Fläche zwischen dieser Curve und der Abscissen-Achse bis zu der dem Werthe von t entsprechenden Ordinate die Entfernung x oder auch den in der betreffenden Zeit zurückgelegten Weg vorstellt. Die Kraft endlich wird durch die trigonometrische Tangente des Winkels

bestimmt, welchen die im Punkte vt berührende Gerade mit der Achse der t bildet.

Auf diese Art wird die gleichförmige Bewegung durch eine zur Achse der t parallele Gerade AB, Fig. 50, versinnlicht, deren Entfernung von dieser Achse die constante Geschwindigkeit b vorstellt, während die Rechtecke AOab, AOcd, etc., die vom Anfang der Zeit an zurückgelegten Wege darstellen. Der Winkel, welchen die Gerade AB mit der Achse OT bildet, ist Null, also auch seine Tangente und die während der Bewegung thätige Kraft.

Die gleichförmig beschleunigte Bewegung dagegen wird durch eine gegen die Achse der t geneigte Gerade AB oder A′B′, Fig. 51, anschaulich gemacht, welche durch den Anfangspunkt geht, wenn die Geschwindigkeit am Anfange der Zeit Null war, und welche die Achse der v in einer Entfernung $b = AA'$ vom Anfangspunkte durchschneidet, wenn v für $t = 0$ den Werth b hatte. Im ersten Falle stellen die Dreiecke Aab, Acd, etc., im zweiten die Trapeze AA′a′b, Adc′A′, etc. durch ihre Oberfläche die von dem Bewegten durchlaufenen Wege vor. In beiden Fällen ist der Winkel, welchen die Gerade mit der Achse der t bildet, unveränderlich wie die Kraft, deren Intensität durch die Tangente dieses Winkels gemessen werden kann.

Für die gleichförmig verzögerte Bewegung nimmt die Geschwindigkeitscurve die Lage AB, Fig. 52, an; sie schneidet die Achse OT in einem Punkte B, durch welchen der Augenblick bestimmt wird, wo die Geschwindigkeit Null geworden ist, und von wo an sie die Richtung wechselt oder negativ wird, und die Fläche des Dreiecks AOB stellt den im Sinne der positiven Geschwindigkeit zurückgelegten Weg vor, der in B seinen größten Werth erreicht hat. Die Flächen der Dreiecke Bcd, BCD, welche unter der Achse liegen, müssen dann als negative Größen betrachtet, und wenn der ganze Werth vom Anfang der Zeit an bestimmt werden soll, von der Fläche AOB abgezogen werden; es wird demnach die ganze Fläche oder der von ihr vorgestellte Weg Null werden in einem Zeitpunkte D, für welchen man $OD = 2\,OB$ hat.

Die soeben für die Flächen als Vertreter der zurückgelegten Wege gemachte Bemerkung gilt natürlich für alle ähnliche Fälle, in welchen man indessen dieser weniger genügenden Darstellungsweise der zurückgelegten Wege dadurch ausweichen kann, daß man diese letzteren mittels der Gleichung zwischen x und t als Ordinaten vorstellt, was übrigens auch in jedem andern Falle anschaulicher sein dürfte, als die Darstellung durch die Flächenstücke der Geschwindigkeitscurve. Für die gleichförmig beschleunigte Bewegung, welche von der Ruhe aus beginnt, wird

die neue Curve eine Parabel wie AB, Fig. 53, deren Parameter (die Ordinate im Brennpunkte) die verkehrte Beschleunigung: $\frac{1}{c}$ vorstellt; die gleichförmig verzögerte Bewegung dagegen gibt eine Parabel, wie sie in Figur 54 dargestellt ist.

Endlich kann man auch die Beziehung zwischen v und x durch eine Curve anschaulich machen, und gerade diese ist in vielen Fällen leichter zu erhalten, als jene zwischen v und t und zwischen x und t. — Beispiele für solche Darstellungen werden die nachfolgenden Betrachtungen besonderer geradlinigen Bewegungen liefern, welche, wenigstens annähernd, in der Natur vorkommen.

§. 49.

Als Beispiel einer geradlinigen Bewegung, welche durch die Wirkung einer constanten Kraft hervorgerufen wird, nehme ich zuerst den freien Fall eines schweren materiellen Punktes im leeren Raum.

Die Kraft, welche diesen Punkt in Bewegung setzt, ist sein Gewicht, das wir mit p bezeichnen wollen; man hat dann die Gleichung:

$$m\frac{dv}{dt} = p = mg \quad , \quad \frac{dv}{dt} = g \, ,$$

worin m die Masse des Bewegten und g die Beschleunigung des freien Falles vorstellt. Hat also die Bewegung von der Ruhe aus angefangen, und wird der Ort, an welchem die Bewegung angefangen hat, auch als Anfangspunkt für die Entfernung genommen und diese selbst von oben nach unten gemessen, so findet man als Gleichungen des freien Falles:

$$v = gt \quad , \quad x = \frac{1}{2} g t^2 \, ,$$

und daraus durch Elimination von t, oder auch direct aus der Gleichung:

$$m\frac{d.v^2}{dx} = 2p = 2mg \, ,$$

die Beziehung:

$$v^2 = 2gx$$

zwischen dem zurückgelegten Weg oder der Fallhöhe x und der Geschwindigkeit v, welche durch den Fall von dieser Höhe erworben wird.

Gewöhnlich bezeichnet man eine bestimmte Fallhöhe mit h, und hat damit für die Endgeschwindigkeit den Werth:

$$v = \sqrt{2gh} \quad ,$$

und umgekehrt für die Fallhöhe den Ausdruck:

$$h = \frac{v^2}{2g} \; .$$

Wir wollen künftig jene Endgeschwindigkeit, welche ein materieller Punkt durch den freien Fall aus der Höhe erlangt, Geschwindigkeit aus der Höhe h oder auch Höhengeschwindigkeit, und diese Höhe, von welcher derselbe herabfallen muß, um die Geschwindigkeit v zu erlangen, die Höhe für die Geschwindigkeit v oder auch Geschwindigkeitshöhe nennen.

Für die Zeit des Falles endlich erhält man je nachdem v oder x bekannt ist, die Werthe:

$$t = \frac{v}{g} \quad , \qquad t = \sqrt{\frac{2x}{g}} \; .$$

Wird einem materiellen Punkte eine lothrecht aufwärts gerichtete Geschwindigkeit v_0 ertheilt, und diese als eine positive betrachtet, so muß das Gewicht p des Bewegten, oder vielmehr das Aenderungsgesetz $m \frac{dv}{dt}$ negativ genommen werden, weil die Geschwindigkeit vom Anfang der Bewegung an offenbar abnimmt. Man erhält dadurch die Gleichung:

$$m \frac{dv}{dt} = -p \quad , \qquad \frac{dv}{dt} = -g$$

und daraus

$$v - v = -gt \quad , \qquad v = v_0 - gt \; .$$

Werden ferner die positiven x vom Anfangspunkt der Bewegung an nach Oben gemessen, so hat man

$$\frac{dv}{dt} = x_0 - gt \quad , \qquad x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \; .$$

Die Geschwindigkeit ist positiv, so lange der Bewegte steigt, und wird negativ, sobald dieser zu fallen anfängt; er hat also seine größte Höhe erreicht, wenn $v = 0$ ist, d. h. wenn man hat

$$v_0 - g t = 0 \quad , \qquad t = \frac{v_0}{g} \; ;$$

damit ergibt sich für die erreichte Höhe h der Werth:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} ,$$

welcher offenbar die Höhe für die Geschwindigkeit v_0 ist. Der Bewegte steigt demnach so lange, bis t den vorhergehenden Werth erhalten hat, dann wechselt die Geschwindigkeit das Zeichen; der Bewegte fällt zurück, und wenn x wieder Null geworden ist, hat man

$$v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \; ,$$

und zieht daraus einmal $t = 0$, dem Anfange der Bewegung entsprechend, und den Werth:

$$t = \frac{2 v_0}{g}$$

dem Ende angehörend. Diese letztere Zeit ist gerade doppelt so groß als die vorher für das Steigen gefundene; der Bewegte braucht demnach für das Steigen dieselbe Zeit wie für das Herabfallen; die Höhe, welche der materielle Punkt erreicht, ist dieselbe wie die, von welcher er herabfallen muß, um die anfängliche Geschwindigkeit, aber im entgegengesetzten Sinne wieder zu erhalten, und man findet in der That, wenn in den Werth von v die Zeit $t = \frac{2 v_0}{g}$ eingeführt wird, $v = - v_0$.

Beide Bewegungen sind bereits durch die Figuren 51 bis 54 anschaulich gemacht, in denen die Einheit für die v und die x zehnmal kleiner ist, als die Einheit für die t.

§. 50.

Auf einer wagrechten festen Ebene bleibt ein schwerer materieller Punkt im Gleichgewicht (§. 29); wird er aber mit einem zweiten schweren Punkte durch einen vollkommen biegsamen, aber unausdehnbaren Faden so in Verbindung gesetzt, daß der letztere sich ungehindert im Sinne der Schwere, also lothrecht, bewegen kann, so werden beide in Bewegung kommen, aber mit einer geringeren Geschwindigkeit, als beim freien Falle, weil das Gewicht p_2 des zweiten Punktes nicht blos seine eigene

Masse, sondern auch die Masse des ersten, dessen Gewicht p_1 sei, in Bewegung zu setzen hat. Die ganze zu bewegende Masse ist demnach:

$$m_1 + m_2 = \frac{p_1 + p_2}{g} \ ,$$

und die Gleichung der Bewegung des einen von beiden Atomen wird

$$\frac{p_1 + p_2}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = p_2 \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{dt} = g \frac{p_2}{p_1 + p_2} \ .$$

Diese Bewegung ist demnach noch eine gleichförmig beschleunigte; die Beschleunigung ist aber im Verhältniß von $p_1 + p_2$ zu p_2 kleiner, als beim freien Falle.

Soll ferner bei dieser Bewegung auch auf die Reibung Rücksicht genommen werden, so hat man als bewegende Kraft

$$P = p_2 - f p_1 \ ,$$

wenn f wie früher den Reibungscoeffizienten, d. i. das Verhältniß des Druckes zur Reibung bezeichnet, und wenn dieses Verhältniß selbst, wie die Erfahrung lehrt, von der Geschwindigkeit der Bewegung unabhängig ist.

Es kann also nur Bewegung eintreten, wenn $p_2 > f p_1$ ist, und dann wird dieselbe wieder eine gleichförmig beschleunigte sein, deren Beschleunigung, wie leicht zu sehen, durch

$$g \frac{p_2 - f p_1}{p_1 + p_2}$$

ausgedrückt ist. Kann diese Beschleunigung auf irgend eine Weise aus der wirklich erfolgten Bewegung gefunden werden, so ist sie das beste Mittel zur Berechnung des Reibungscoeffizienten für die Beschaffenheit der angewendeten Ebene.

Nimmt man den zweiten Punkt hinweg, und ertheilt dem ersten eine anfängliche Geschwindigkeit v_0, so entsteht durch die Reibung eine gleichförmig verzögerte Bewegung, deren Gleichungen aus dem Ausdruck:

$$\frac{p_1}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = - f p_1$$

erhalten werden, deren Verzögerung demnach fg ist. Man findet damit

$$v = v_0 - f g t \ ,$$

und schließt daraus, daß der Bewegte nach einer Zeit: $t = \frac{v_0}{fg}$ zur

Ruhe kommt, da alsdann keine bewegende Kraft mehr vorhanden ist. Der von ihm beschriebene Weg a wird durch

$$a = \frac{v_0^2}{2fg}$$

ausgedrückt, und kann dazu dienen, die anfängliche Geschwindigkeit v_0 zu berechnen, wenn der Reibungscoeffizient f bekannte ist. Wäre z. B. $f = 0,3$, $a = 1^m$, so müßte

$$v_0 = \sqrt{2 . 0,3 . 9,8} = 2^m,45$$

gewesen sein, und die ganze Bewegung wird in diesem Falle

$$t = \frac{2,45}{0,3 . 9,8} = 0'',83$$

also nicht ganz eine Sekunde gedauert haben.

§. 51.

Ganz ähnliche Verhältnisse finden statt, wenn sich ein materieller Punkt auf einer geneigten Ebene bewegt.

Wird zuerst von der Reibung Umgang genommen, und der Winkel zwischen der Richtung der Schwere und der Normalen zur geneigten Ebene mit α bezeichnet, so ist $p \sin \alpha$ die zur Ebene parallele und allein wirksame Componente des Gewichtes p des Bewegten, da die andere zur Ebene senkrechte Componente durch deren Widerstand aufgehoben wird. Die Gleichungen der Bewegung sind demnach von der Ruhe aus:

$$m \frac{dv}{dt} = p \sin \alpha \quad , \quad v = g t \sin \alpha \quad , \quad x = \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha \ ,$$

und folglich ihre Beschleunigung $g \sin \alpha$; diese kann daher durch Verminderung des Winkels α so klein gemacht werden, als man will.

Bezeichnet ferner l die Länge AB, Figur 55, der geneigten Ebene, und $h = l \sin \alpha$ die Höhe AC des obern Endes A über der durch das untere B gelegten wagrechten Ebene BC, so ergibt sich für die Zeit des Falles von A bis B der Werth:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha}}$$

und damit die Endgeschwindigkeit in B

$$v = \sqrt{2gl \sin \alpha} = \sqrt{2gh} \ .$$

Dieses ist aber auch die Geschwindigkeit aus der Höhe h und demnach ist die Endgeschwindigkeit, mit welcher der Bewegte in der wagrechten Ebene BC ankommt, die gleiche, ob er von A nach B auf der geneigten Ebene oder von A nach C frei und lothrecht herabfällt.

Die Zeit des Falles aber ist bei den genannten Bewegungen sehr verschieden; denn diejenige für den freien Fall durch die Höhe $AC = h$ ist

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} ,$$

Setzen wir diese derjenigen Zeit gleich, welche der Bewegte auf der schiefen Ebene gebraucht, um den Weg x zu machen, so ergibt sich

$$\frac{2h}{g} = \frac{2x}{g \sin \alpha} , \qquad x = h \sin \alpha = \overline{Aa} ;$$

der Bewegte gelangt demnach auf der geneigten Ebene in derselben Zeit, in welcher er frei durch die Höhe AC herabfallen würde, von A bis a, zum Fußpunkt der von C auf AB gefällten Senkrechten.

Berücksichtigen wir nun auch die Reibung, so wird die bewegende Kraft nach §. 29

$$P = p(\sin \alpha - f \cos \alpha) ,$$

und die Beschleunigung wird demnach $= g(\sin \alpha - f \cos \alpha)$ werden. So lange also $\sin \alpha > f \cos \alpha$, oder $\tan \alpha > f$ ist, wird die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte sein; wird dagegen $f > \tan \alpha$, so bleibt der materielle Punkt ohne anfängliche Geschwindigkeit in Ruhe und erhält mit einer solchen eine gleichförmig verzögerte Bewegung. Für $\tan \alpha = f$ wird die Beschleunigung Null und demnach die auf irgend eine Weise hervorgerufene Bewegung eine gleichförmige.

§. 52.

Kommen wir nun zur Untersuchung von geradlinigen Bewegungen eines materiellen Punktes, bei welchen die Kraft veränderlich ist, und zwar eine Function der Entfernung x des Bewegten von einem festen Punkte. Denn Kräfte, deren Intensität von der Zeit abhängt, die demnach sich mit der Zeit ändern müßten, auch wenn der Bewegte durch irgend ein festes Hinderniß in seiner Bewegung gehemmt würde, sind, wie oben bemerkt wurde, nicht denkbar, und von solchen, deren Intensität durch die Geschwindigkeit des Bewegten bedingt ist, kennen wir nur den Widerstand der Flüssigkeiten, in welchen sich

die Körper bewegen. Diese widerstehende Kraft hängt aber auch sowohl von der Größe, als von der Gestalt und Beschaffenheit der Oberfläche des Bewegten ab; sie läßt sich also bei einem materiellen Punkte wegen seiner unmeßbar kleinen Ausdehnung kaum denken, und wegen der Unbestimmtheit seiner Gestalt und Größe noch viel weniger beurtheilen. Wir werden deßhalb diesen Fall erst bei der Untersuchung der Bewegung fester Systeme in Betrachtung ziehen.

Sei zuerst die bewegende Kraft der Entfernung des Bewegten von einem festen Punkte proportional und gegen diesen Punkt gerichtet, und ihre Intensität P für eine bestimmte Entfernung $AB = d$ von dem festen Punkte A, Fig. 56, gegeben.

In irgend einer Entfernung $AM = x$ von A hat man für die veränderliche Intensität X dieser Kraft:

$$X : P = x : d \quad , \quad X = P\frac{x}{d} ,$$

und damit kann man sich leicht eine solche Entfernung von A berechnen, für welche diese Intensität dem Gewichte $p = mg$ des bewegten materiellen Punktes an der Erdoberfläche gleich ist. Bezeichnet man diese Entfernung mit l, so hat man

$$P : p = d : l \quad , \quad l = d\frac{p}{P} , \quad \frac{P}{d} = \frac{p}{l} ,$$

und demnach auch

$$X = p\frac{x}{l} ;$$

und wenn man nun beachtet, daß die Kraft X den Winkel π mit der positiven Achse der x bildet, oder daß sie die positiven x vermindern will, so findet man für die zu untersuchende Bewegung die Gleichung:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}m\frac{d.v^2}{dx} = -p\frac{x}{l} .$$

Ferner ist leicht zu sehen, daß keine Bewegung eintreten kann, wenn die Geschwindigkeit des Bewegten in A Null ist, weil in diesem Punkte auch die Kraft Null wird. Wollen wir also die Bewegung in A anfangen lassen, d. h. $x = 0$ nehmen, wenn $t = 0$ ist, so wird v einen gewissen Werth v_0 erhalten müssen; statt dessen können wir aber auch die Bewegung in einem gewissen Punkte C, für welchen $x = x_0$ oder $= a$

ist, mit der Geschwindigkeit: Null anfangen lassen; im Allgemeinen werden die Ergebnisse dieselben sein.

Führt man nun mg für p in die letzte Gleichung ein, so wird

$$\frac{d.v^2}{dx} = -\frac{2g}{l}x\,,$$

und die erste Integration gibt unter der letzten Voraussetzung: $v = 0$, $x = a$ wenn $t = 0$,

$$v^2 = \frac{g}{l}(a^2 - x^2) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

und dadurch

$$\frac{dt}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{l}(a^2 - x^2)}} = \pm \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,.$$

Von den beiden Zeichen dieses Aenderungsgesetzes werden wir das untere nehmen, weil die Entfernung x im Anfange der Bewegung nothwendig abnehmen muß, und auf diese Weise

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int_a^x dx \,.\, \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \arccos \frac{x}{a}$$

erhalten, da $\arccos \frac{a}{a} = 0$ ist. Durch Umkehrung dieses Ausdrucks folgt dann

$$x = a \cos t \sqrt{\frac{g}{l}}\,,$$

und daraus wieder die Geschwindigkeit in Function der Zeit

$$v = \frac{dx}{dt} = -a\sqrt{\frac{g}{l}} \sin t \sqrt{\frac{g}{l}}\,.$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen schließen wir Folgendes. Für $t = 0$ wird $x = a$, $v = 0$, wie vorausgesetzt wurde; wie nun t wächst, nimmt x proportional dem Cosinus des Winkels $t\sqrt{\frac{g}{l}}$ ab, während

v im Sinne der negativen x zunimmt bis $t\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2}\pi$, $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ geworden ist. In diesem Augenblicke ist $x = 0$, der Bewegte also in A angekommen, und die Geschwindigkeit hat ihren größten negativen Werth: $-a\sqrt{\frac{g}{l}}$ erreicht. Von da an wird x negativ, und v nimmt ab, bis $t\sqrt{\frac{g}{l}} = \pi$ oder $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ geworden ist, wo man $x = -a$, und $v = 0$ erhält, der Bewegte sich also in einem Punkte C′ auf der negativen Seite von A befindet, für welchen $AC' = AC = a$ ist. Nach diesem Zeitpunkte ändert die Geschwindigkeit ihre Richtung, x nimmt ab, und der Bewegte nähert sich dem festen Punkte A wieder, den er nach der Zeit $t = \frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ mit der größten positiven Geschwindigkeit $a\sqrt{\frac{g}{l}}$ erreicht, und entfernt sich dann wieder von ihm auf der positiven Seite mit abnehmender Geschwindigkeit, bis er nach $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ Zeiteinheiten wieder in C mit der Geschwindigkeit: Null angekommen ist, um diese Bewegung in derselben Weise und in gleichen Zeiträumen fortwährend zu wiederholen. Diese Bewegung ist demnach eine *schwingende* oder *oscillirende*, und die Dauer T einer *Schwingung* oder *Oscillation* d. i. die Zeit, welche der Bewegte gebraucht, um in die anfängliche Lage zurückzukehren, wird wie wir oben gesehen haben, durch

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

oder wenn man die Geschwindigkeit: $a\sqrt{\frac{g}{l}}$, welche der Bewegte im Punkte A besitzt, mit v_0 bezeichnet, durch

$$T = 2\pi\frac{a}{v_0}$$

ausgedrückt.

Stellt man demnach diese Schwingungsdauer durch einen Kreisumlauf vor, dessen Mittelpunkt in dem festen Punkte A liegt, und mißt die veränderliche Zeit t durch einen entsprechenden Bogen CM′ von C aus über D nach C′, so wird die Geschwindigkeit v in jedem Augenblicke dem Sinus dieses Bogens oder der Ordinate MM′, und der Abstand x dem Cosinus desselben Bogens oder der Abscisse AM proportional sein. Gibt man diesem Kreise daher, wie in der Figur 56, den Halbmesser $AC = a$, so bestimmt die Abscisse AM die wirkliche Lage des Bewegten am Ende der Zeit $t = \text{arc}\, CM'$; construirt man denselben dagegen mit dem Halbmesser $a\sqrt{\frac{g}{l}}$ und streckt die Zeitbogen in die Gerade AT aus, so erhält man die Geschwindigkeitscurve, Fig. 57, welche die sogenannte Sinuscurve ist.

Eine solche Bewegung zeigt annähernd der freie Endpunkt einer mit dem andern Ende befestigten Feder, deren Länge im Vergleich zu der Größe der Schwingungen groß genug ist, um die Bewegung jenes Endpunktes als geradlinige ansehen zu dürfen; ferner ein Punkt einer schwingenden Saite, welche entweder vertikal gespannt ist oder deren Gewicht gegen die Spannung vernachlässigt werden darf. In strenger Uebereinstimmung mit unsern Gesetzen steht dagegen die Bewegung eines Lufttheilchens bei der Schallbewegung, und die eines Aethertheilchens, welches die lichterregenden Oscillationen eines leuchtenden Punktes bei geradliniger Polarisation fortpflanzt.

Dieselbe Bewegung würde auch ein schwerer materieller Punkt annehmen, welcher ohne Luftwiderstand und überhaupt ungehindert von der Oberfläche der Erde gegen ihren Mittelpunkt fallen könnte, wenn die Erde durchaus dieselbe Dichte hätte, weil dann die anziehende Kraft der Erde in ihrem Innern wie die Entfernung des Bewegten vom Mittelpunkt abnehmen würde *). Für diesen Fall hätte man also unmittelbar $l = R$ und $a = R$, wenn R den Halbmesser der Erde bezeichnet; denn für diese Entfernung ist das Gewicht des bewegten Atoms der Intensität der bewegenden Kraft gleich. Man hat demnach für die Dauer einer Viertel-Schwingung, nämlich für die Zeit, welche der Bewegte braucht, um in den Mittelpunkt der Erde zu gelangen, den Werth:

$$\frac{1}{4} T = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{R}{g}},$$

*) Vergl. §. 107 des 2ten Buches.

und derselbe würde dort mit einer Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{Rg}$$

ankommen, während diese bei unveränderter Schwere $= \sqrt{2gR}$, also $\sqrt{2} = 1,414$ mal so groß wäre.

Es ist ferner leicht zu sehen, daß diese Bewegung im Anfange sehr nahe mit einer gleichförmig beschleunigten übereinkommen muß, und in der That kann dies aus unsern Gleichungen auf folgende Weise geschlossen werden.

Man hat für unsern Fall

$$x = R \cos t \sqrt{\frac{g}{R}} \quad , \qquad t = \sqrt{\frac{R}{g}} \arccos \frac{x}{R} \; ,$$

oder wenn man den vom Anfange der Zeit an durchlaufenen Weg, den wir gegen R sehr klein voraussetzen, mit z bezeichnet,

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \arccos \frac{R - z}{R} \; ;$$

es ist aber auch

$$\arccos \frac{R - z}{R} = \arcsin \sqrt{\frac{2z}{R} - \frac{z^2}{R^2}}$$

und da für sehr kleine Werthe von z im Vergleich zu R, einmal der kleine Bruch $\frac{z^2}{R^2}$ vernachlässigt, und der kleine Sinus $\sqrt{\frac{2z}{R}}$ für den Bogen selbst genommen werden kann, so wird

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \sqrt{\frac{2z}{R}} = \sqrt{\frac{2z}{g}} \quad , \qquad z = \frac{1}{2} g t^2 \; ,$$

wie bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung.

Nehmen wir z. B. die Tiefe eines Schachtes zu 1000^m an, so wird $R - z = x = 6366000 - 1000 = 6365000^m$, und

$$\log \cos t \sqrt{\frac{g}{R}} = \log \frac{6365}{6366} = 9,99993 = \log \cos 1^0 1' \; ;$$

man sieht aber, daß diese Bestimmung mittels des Cosinus keiner Genauigkeit fähig ist. Drücken wir deßhalb den Bogen $t\sqrt{\frac{g}{R}}$ durch seinen Sinus aus, so ergibt sich

$$\log \sin t\sqrt{\frac{g}{R}} = \frac{1}{2} \log \frac{z(2R-z)}{R^2} = 8{,}24856 = \log \sin 1^\circ\, 0',933$$

und nach der Anmerkung zu §. 11 der Einleitung folgt

$$\log t\sqrt{\frac{g}{R}} = \log \frac{60',933}{3437,7} = 8{,}24858 = \log 0{,}01773\ ,$$

womit man endlich

$$t = 0{,}01773\sqrt{\frac{R}{g}} = 14{,}279 \text{ Sekunden}$$

findet. Die Zeit bei unveränderter Schwere, nämlich $t = \sqrt{\frac{2z}{g}}$ wäre bei obigen Werthen ebenso 14,279 Sekunden, also bis zur dritten Dezimalstelle von dem vorhergehenden Werthe gar nicht verschieden.

§. 53.

Die anziehende Kraft der Erde, die Schwere, ist aber nicht blos von der Oberfläche gegen den Mittelpunkt hin veränderlich, sondern auch von der Oberfläche nach Außen, und zwar nimmt die Intensität derselben in diesem Falle, wie in dem schon erwähnten §. 107 des 2ten Buches gezeigt werden soll, ab, wie das Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkt der Erde zunimmt, oder sie ist dem Quadrat dieser Entfernung verkehrt proportional, und die Annahme einer constanten Schwerkraft gilt auch hier nur, wie schon in §. 43 angedeutet worden, für sehr kleine Fallhöhen.

Ist also p das Gewicht eines materiellen Punktes an der Oberfläche der Erde, und wird derselbe in die Entfernung h von dieser Oberfläche oder in die Entfernung R+h vom Mittelpunkt gebracht, so wird sein Gewicht p′ zu jenem in dem Verhältnisse:

$$p' : p = \frac{1}{(R+h)^2} : \frac{1}{R^2}$$

stehen, und demnach durch

$$p' = p \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

ausgedrückt werden. Ebenso hat man für irgend eine beliebige Entfernung x von der Oberfläche das Gewicht $p_{,}$

$$p_{,} = p \frac{R^2}{(R+x)^2},$$

und findet damit

$$m \frac{d.v^2}{dx} = -2p \frac{R^2}{(R+x)^2},$$

als Gleichung der freien Fallbewegung von bedeutenden Höhen, wenn dabei die x von unten nach oben gerechnet werden. Man kann aber auch die Entfernung des Bewegten vom obern Endpunkte der Lothlinie h an messen, von dem er zu fallen anfängt; setzt man diese am Ende der Zeit t gleich z, so hat man

$$z = h - x \quad , \quad \frac{dz}{dx} = -1 ,$$

und damit wird die vorstehende Gleichung

$$m \frac{d.v^2}{dz} = 2p \frac{R^2}{(R+h-z)^2} = 2mg \frac{R^2}{(R+h-z)^2}.$$

Für $t = 0$ hat man also $v = 0$, $z = 0$, und unter diesen Umständen gibt das erste Integral der letzten Gleichung

$$v^2 = 2gR^2 \left(\frac{1}{R+h-z} - \frac{1}{R+h}\right)$$

als Ausdruck für das Quadrat der Geschwindigkeit. Wenn der Bewegte an der Erdoberfläche ankommt, so wird $z = h$, und damit

$$v^2 = 2gR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = 2gh \frac{R}{R+h};$$

das Quadrat der Erdgeschwindigkeit ist folglich im Verhältniß von $R+h$ zu R kleiner, als in dem Falle, wo die Schwere durchaus unveränderlich wäre, und man sieht, daß wenn es die Genauigkeit zuläßt, h gegen R zu vernachlässigen, man den frühern einfachen Werth:

$$v^2 = 2gh$$

wieder erhält.

Um die Zeit des Falles zu bestimmen, zieht man aus dem allgemeinen Werthe von v^2 oder $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ die Gleichung:

$$\frac{dt}{dz} = \pm \frac{1}{\sqrt{2gR^2\left(\frac{1}{R+h-z} - \frac{1}{R+h}\right)}},$$

oder blos mit dem obern Zeichen, weil z mit t wächst, und wenn man $R+h$ durch R' ersetzt,

$$\sqrt{\frac{2g R^2}{R+h}} \cdot \frac{dt}{dz} = \sqrt{\frac{R'-z}{z}}.$$

Dieser Ausdruck zeigt dann, wie man leicht durch Vergleichung desselben mit der bekannten, übrigens auch in §. 32 im 2ten Buche abgeleiteten Differentialgleichung der Cycloide sehen wird, daß die Zeit t der Ordinate MP einer Cycloide HPB, Fig. 58, proportional ist, deren Abscissen HM die Fallhöhen z vorstellen, und deren erzeugender Kreis die Länge $OH = R' = R + h$ zum Durchmesser hat, wobei die Tangente HT im Scheitel H als Achse der t, und die Lothlinie HO als Normale im Scheitel und als Achse der z genommen ist, so daß die Leitlinie OB für den erzeugenden Kreis durch den Mittelpunkt O der Erde geht.

Die Integration der letzten Gleichung gibt nun zwischen den Grenzen z und 0 die Ausdrücke:

$$\sqrt{\frac{2g R^2}{R+h}}\, t = \int_0^z dz . \sqrt{\frac{R'-z}{z}} = \int_0^z dz . \frac{R'-z}{\sqrt{R'z - z^2}},$$

oder auch

$$= \int_0^z dz . \frac{\frac{1}{2} R' - z}{\sqrt{R'z - z^2}} + \frac{1}{2} R' \int_0^z dz . \frac{1}{\sqrt{R'z - z^2}},$$

woraus nach bekannten Methoden und Formeln

$$t\sqrt{\frac{2g R^2}{R+h}} = \sqrt{R'z - z^2} + \frac{1}{2} R' \text{ arc cos } \frac{R' - 2z}{R'}$$

folgt, und für die Zeit des Falles bis zur Oberfläche

$$t = \sqrt{\frac{R+h}{2gR^2}}\left(\sqrt{Rh} + \frac{1}{2}(R+h)\,\text{arc}\cos\frac{R-h}{R+h}\right)$$

oder wenn der Winkel im zweiten Gliede durch seinen Sinus ausgedrückt wird

$$t = \sqrt{\frac{R+h}{2gR^2}}\left(\sqrt{Rh} + \frac{1}{2}(R+h)\,\text{arc}\sin\frac{2\sqrt{Rh}}{(R+h)}\right)$$

gefunden wird,

Nehmen wir z. B. $h = 7000^m$, eine Höhe, welche der französische Physiker Gay-Lussac in einem Luftballon erreicht hat, so finden wir zuerst: $\frac{1}{2}(R+h) = 3186500^m$, und damit

$$\log\frac{\sqrt{Rh}}{\frac{1}{2}(R+h)} = 8{,}82117 = \log\sin 3^0\ 47',9\,.$$

Es ist also in unserm Winkelmaaße

$$\text{arc}\sin\frac{\sqrt{Rh}}{\frac{1}{2}(R+h)} = \frac{227',9}{3437',7} = 0{,}06629\ ^{*})$$

und wenn man nun den Werth von t zur bequemeren Berechnung unter die Form bringt:

$$t = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(R+h)h}{gR}} + \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}(R+h)\right)^3}{gR^2}}\,\text{arc}\sin\frac{\sqrt{Rh}}{\frac{1}{2}(R+h)}\,,$$

so gibt die weitere Rechnung Folgendes:

*) Noch einfacher kann übrigens dieser Winkel durch die Tangente seiner Hälfte ausgedrückt und berechnet werden; denn setzt man seinen Cosinus $= u$, so hat man

$$\text{arc}\cos u = 2\,\text{arc}\,\text{tang}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} = 2\,\text{arc}\,\text{tang}\sqrt{\frac{h}{R}}\,.$$

$$\begin{array}{rl} \log \frac{1}{2}(R+h) = & 6,50331 \\ \log h = & 3,84510 \\ \text{d. E. } \log g = & 9,00838 \\ \text{d. E. } \log R = & 3,19613 \\ \hline & 2,55292 \\ \log A = & 1,27646 \\ A = & 18,900 \\ B = & 18,913 \\ \hline t = A + B = & 37,813 \text{ Sekunden.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 3 \log \frac{1}{2}(R+h) = & \left\{ \begin{array}{l} 6,50331 \\ 13,00662 \end{array} \right. \\ \text{d. E. } \log g = & 9,00838 \\ 2 \text{ d. E. } \log R = & \left\{ \begin{array}{l} 3,19613 \\ 3,19613 \end{array} \right. \\ \hline & 4,91057 \\ \hline & 2,45528 \\ \log \operatorname{arc} 3^0 47',9 = & 8,82147 \\ \hline \log B = & 1,27675 \end{array}$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$v = 370^m,38 \;;$$

die Zeit des Falles wäre demnach 37,813 Sekunden, und der Bewegte käme mit einer Geschwindigkeit von 370,38 Meter an der Erde an.

Bei unveränderter Schwere hat man für dieselbe Fallhöhe:

$$v = \sqrt{2gh} = 370^m,57 \quad , \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 37'',78 \;,$$

also eine etwas größere Endgeschwindigkeit und eine etwas kleinere Zeit, für beide Größen aber sehr geringe Unterschiede.

Nach den oben gefundenen Gleichungen kann nun für jeden gegebenen Werth von z oder $x = h - z$, d. i. für jede Lage des Bewegten die entsprechende Geschwindigkeit und Fallzeit berechnet werden. Soll aber umgekehrt die Lage des Bewegten nach der Zeit t oder für einen bestimmten Augenblick angegeben werden, so wird man in der vorletzten Gleichung alle gegebenen Zahlenwerthe einführen und den Werth von z aus dieser so erhaltenen Zahlengleichung durch Probiren oder eine der bekannten Annäherungsmethoden berechnen; die Geschwindigkeit kann dann nach diesem Werthe von z wie vorher gefunden werden.

Es erübrigt uns noch zu zeigen, daß für kleine Werthe von h im Verhältnisse zu R das vorhergehende Gesetz der Bewegung wieder auf das der gleichförmig beschleunigten Bewegung zurückkommt, wie es bereits für den Ausdruck von v^2 angedeutet wurde.

Dazu vernachlässige man in dem allgemeinen Werthe von t in z zuerst überall h neben R, wodurch R′ auf R zurückkommt, und gebe jenem Ausdruck die Form:

$$t = \sqrt{\frac{R}{2g}}\left(\sqrt{\frac{z}{R} - \frac{z^2}{R^2}} + \frac{1}{2}\arc\sin\sqrt{\frac{4z}{R} - \frac{4z^2}{R^2}}\right).$$

Wird dann wieder das Glied $\frac{z^2}{R^2}$ gegen $\frac{z}{R}$ vernachlässigt, und der Sinus für den Bogen gesetzt, so erhält man

$$t = \sqrt{\frac{R}{2g}}\left(\sqrt{\frac{z}{R}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4z}{R}}\right) = \sqrt{\frac{2z}{g}},$$

also wie im vorhergehenden Falle

$$z = \frac{1}{2} g t^2 .$$

Will man aber diese Verhältnisse anschaulich machen, so kann dieses am leichtesten mittels Construction des Werthes von v^2 geschehen. Bringt man nämlich diesen unter die homogene Form:

$$\frac{R' v^2}{2gR} = \frac{Rz}{R' - z}$$

und ersetzt das linke Glied durch y, so erhält man die Gleichung:

$$yz - R'y + Rz = 0 ,$$

welche die einer gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf ihre Asymptoten ist. Um die Lage ihres Mittelpunktes, des Durchschnittspunktes der Asymptoten zu erhalten, setze man

$$y = y' + \alpha \quad , \qquad z = z' + \beta$$

und mache die Factoren von y′ und z′ Null; man wird dadurch

$$\alpha = -R \quad , \qquad \beta = R'$$

und damit

$$y'z' = RR' = R(R + h)$$

finden. Die eine wagrechte Asymptote geht demnach durch den Mittelpunkt der Erde; die lothrechte dagegen berührt dieselbe, und man sieht nun aus der Figur 59, welche diese Hyperbel für eine größere und eine kleinere Fallhöhe darstellt, daß diese Curven für alle Fallhöhen dieselben Asymptoten gemeinschaftlich haben, und daß für kleine Fallhöhen das

entsprechende Stück der Hyperbel einer Geraden sehr nahe kommt, nämlich derjenigen, welche durch die Gleichung

$$z = y \quad \text{oder} \quad z = \frac{v^2}{2g}$$

vorgestellt wird.

§. 54.

Als letzte Anwendung unserer Formeln wollen wir noch den lehrreichen Fall betrachten, wo ein materieller Punkt sich in der Verbindungslinie zweier festen Punkte A und B, Figur 60, bewegt, gegen welche er von einer Kraft hingezogen wird, die dem Quadrate seiner Entfernung von ihnen verkehrt proportional ist.

Sei a der Abstand der beiden festen Punkte A und B, und x die Entfernung des Bewegten von A am Ende der Zeit t; sei ferner P_1 die Intensität der von A ausgehenden Kraft, wenn sich der Bewegte in der Entfernung e, welches z. B. die Einheit der Entfernung sein kann, von diesem Punkte befindet; ebenso sei P_2 die Kraft, welche den Bewegten nach B hinzieht, wenn er in derselben Entfernung e von diesem Punkte angekommen ist. Die Intensitäten X_1 und X_2 dieser Kräfte für eine beliebige Lage des Bewegten, also für eine Entfernung x von A und a — x von B sind dann

$$X_1 = P_1 \frac{e^2}{x^2} \quad , \qquad X_2 = P_2 \frac{e^2}{(a-x)^2} ,$$

und ihre Resultirende wird:

$$X_2 - X_1 = P_2 \frac{e^2}{(a-x)^2} - P_1 \frac{e^2}{x^2} ,$$

da die Kraft X_2 im Sinne der positiven x wirkt, und diese vergrößern will, während die Kraft X_1 das entgegengesetzte beabsichtigt. Daraus folgt die Gleichung:

$$m \frac{d.v^2}{dx} = 2 \left(P_2 \frac{e^2}{(a-x)^2} - P_1 \frac{e^2}{x^2} \right)$$

deren unbestimmtes Integral die Form erhält:

$$m \varDelta . v^2 = 2 e^2 \left(P_2 \varDelta . \frac{1}{a-x} + P_1 \varDelta . \frac{1}{x} \right) .$$

Nehmen wir nun an, der Bewegte sei mit einer anfänglichen Geschwindigkeit v_0 von einem Punkte C ausgegangen, für welchen man

$x_0 = r$ hatte, so erhalten wir zwischen den Grenzen v und v_0 für v, x und r für x das allgemeine Integral:

$$m(v^2 - v_0^2) = 2e^2\left[P_2\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a-r}\right) + P_1\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{r}\right)\right],$$

wodurch die Geschwindigkeit des Bewegten für irgend eine Lage oder für irgend eine Entfernung von B bestimmt werden kann.

Aus dem Werthe von $\frac{d.v^2}{dx}$ folgt, daß die Geschwindigkeit abnimmt, so lange $P_1\frac{e^2}{x^2}$ größer ist als $P_2\frac{e^2}{(a-x)^2}$; dieses wird aber im Anfange der Bewegung immer stattfinden, wenn man hat:

$$\frac{\sqrt{P_1}}{r} > \frac{\sqrt{P_2}}{a-r} \quad \text{oder} \quad r < a\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}},$$

und die Geschwindigkeit erreicht in diesem Falle ihren kleinsten Werth, wenn

$$\frac{\sqrt{P_1}}{x} = \frac{\sqrt{P_2}}{a-x}, \qquad x = a\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}}$$

geworden ist, also in dem Punkte D zwischen A und B, in welchem die Wirkung der beiden Kräfte X_1 und X_2 gleich ist, und von dem an die im Sinne der anfänglichen Geschwindigkeit wirkende X_2 zu überwiegen anfängt *). Damit der Bewegte aber diesen Punkt D erreicht, muß die

*) Die Bedingung $\frac{d.v^2}{dx} = 0$ für einen größten oder kleinsten Werth von v^2, gibt eigentlich die Gleichung:

$$\frac{P_2}{(a-x)^2} - \frac{P_1}{x^2} = 0,$$

und diese, allgemein aufgelöset, zwei Werthe von x, nämlich den obigen, und dann den Werth:

$$x = a\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1}-\sqrt{P_2}},$$

welcher den Punkten D′, entweder links von A, wenn $P_2 > P_1$ also $x < 0$ ist, oder rechts von B, wenn $P_1 > P_2$ und $x > a$ ist, entspricht. Für diese

anfängliche Geschwindigkeit offenbar einen entsprechenden Werth erhalten, und zwar muß sie mindestens so groß sein, daß derselbe in jenem Punkte mit der Geschwindigkeit Null ankommt. Diese Annahme gibt uns also den Grenzwerth, und man findet durch Einführung der Werthe:

$$v = 0 \quad , \qquad x = a \frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}}$$

in dem allgemeinen Werthe von v^2 diesen Grenzwerth:

$$m v_0^2 = 2 e^2 \left[\frac{P_2}{a - r} + \frac{P_1}{r} - \frac{\left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}\right)^2}{a} \right]$$

$$= 2 e^2 \frac{r(a-r)}{a} \left(\frac{\sqrt{P_1}}{r} - \frac{\sqrt{P_2}}{a - r} \right)^2 .$$

Ist die anfängliche Geschwindigkeit kleiner, als dieser Werth, so wird die Geschwindigkeit v eher Null, als x den vorhergehenden Werth erreicht; es bleibt also die Kraft X_1 die überwiegende, und der Bewegte geht mit negativer Geschwindigkeit gegen A zurück; ist dagegen v_0 größer als der obige Werth, so wird die Geschwindigkeit nicht Null, sondern erlangt wie schon erwähnt in D ihren kleinsten Werth, und der materielle Punkt setzt seine Bewegung gegen B mit zunehmender Geschwindigkeit fort. Um diese Schlüsse unmittelbar aus dem Werthe von v^2 zu ziehen, darf

---

Punkte paßt aber unsere obige Gleichung nicht mehr, weil die Kräfte X_1 und X_2 die Zeichen nicht ändern, wenn x negativ, oder größer als a wird, wie es doch die Natur der Aufgabe erfordert. Der obengefundene Ausdruck für $m v^2$ entspricht deßhalb nur dem Falle, wo, $P_2 > P_1$ vorausgesetzt, der Bewegte sich links von A in C' mit einer gegen D' gerichteten Geschwindigkeit v_0 zu bewegen anfängt, und die Kraft X_1 eine abstoßende Wirkung äußert; die Geschwindigkeit nimmt in diesem Falle am Anfang der Bewegung zu, und erreicht in D' einen größten Werth, weil von da an die anziehende Kraft X_2 überwiegend wird, und die Geschwindigkeit zu vermindern anfängt. Man wird sich davon auch dadurch überzeugen, daß man den Ausdruck für das zweite Aenderungsgesetz von v^2 in Bezug auf x ableitet, und in demselben den vorhergehenden Werth von x einführt, wodurch man das negative Ergebniß: $m \frac{d^2 . v^2}{d x^2} = -4 \frac{e^2}{a^3} \frac{\left(\sqrt{P_2} - \sqrt{P_1}\right)^4}{\sqrt{P_1 P_2}}$ erhält.

man in diesen nur den vorhergehenden Ausdruck von $m v_0^2$, nachdem derselbe um das Glied $\pm m f^2$ vermehrt worden ist, einführen, wodurch sich derselbe mit dem vorhergehenden Werthe von x, welcher dem Punkte D entspricht, auf

$$m v^2 = \pm m f^2$$

reduzirt, und zeigt, daß wenn das obere Zeichen gilt, $v = f$, daß mit dem untern dagegen v imaginär wird.

Alle diese Verhältnisse werden auf einen Blick klar, wenn man für bestimmte Zahlenwerthe der beständigen Größen und für mehrere beliebige Werthe der Veränderlichen x die entsprechenden Werthe von v^2 berechnet, und durch Ordinaten zu jenen Werthen vou x, welche von A nach B als Abscissen aufgetragen wurden, darstellt; dabei aber beachtet, daß alle negativen Werthe von v^2 imaginäre Werthe für v geben. Man darf dann nur die Achse der x parallel mit sich verrücken, um dadurch die verschiedenen Fälle, welche sich aus den verschiedenen Werthen der anfänglichen Geschwindigkeit ergeben, zu erhalten, wie sogleich näher gezeigt werden soll.

§. 55.

In dem schon erwähnten Kapitel des zweiten Buches, bei der Lehre von der gegenseitigen Anziehung der Körper, wird nachgewiesen, daß die von einer homogenen oder aus concentrischen Schichten gebildeten Kugel ausgehende anziehende Wirkung, wenn dieselbe dem Quadrate der Entfernung verkehrt proportional vorausgesetzt wird, für einen außerhalb derselben liegenden Punkt der Masse der anziehenden Kugel proportional und dieselbe ist, als wenn diese Masse in dem Mittelpunkte der Kugel vereinigt wäre. Man kann demnach in unserer vorhergehenden Untersuchung die festen Punkte A und B als die Mittelpunkte zweier Kugeln annehmen, und als besonderes Beispiel dazu den Mond und die Erde wählen, jedoch unter der Voraussetzung, daß beide Weltkörper keine Bewegung hätten.

Bezeichnet man also den Halbmesser der Erde mit R, ihre Masse mit M; dieselben Größen für den Mond mit r_1 und m_1, so hat man einmal nach astronomischen Bestimmungen:

$$r_1 = 0,27\,R \quad , \qquad m_1 = 0,0133\,M \;;$$

ferner ist die anziehende Wirkung der Erde auf einen Punkt an ihrer

Oberfläche sehr wenig von dem Gewichte desselben verschieden *), und man kann demnach $e = R$, $P_2 = p = mg$ setzen. Für den Mond ist diese Wirkung im Verhältnisse der Massen kleiner, und demnach bei gleicher Entfernung $e = R$, $P_1 = 0,0133\,P_2 = 0,0133\,p$. Endlich beträgt der Abstand der beiden Mittelpunkte dieser Weltkörper 60 Erdhalbmesser, oder es ist $a = 60\,R$; damit berechnet sich dann die Entfernung des Punktes D, für welchen die anziehende Wirkung von Mond und Erde gleich ist, vom Mittelpunkte des ersten, den wir in A annehmen, gemessen

$$x = 60\,R\,\frac{\sqrt{0,0133}}{1+\sqrt{0,0133}} = 6,21..R\,,$$

und der Werth von v^2 wird durch Einführung der vorhergehenden Zahlenwerthe, wenn man darin $x = Rx'$ setzt und den Anfang der Bewegung auf der Oberfläche des Mondes in C annimmt, so daß man

$$r = r_1 = 0,27\,R$$

hat, die Form annehmen:

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2gR} = y = \frac{0,8 - 2,981\,x' + 0,0661\,x'^2}{60\,x' - x'^2}\,.$$

Aus dieser Gleichung zieht man folgende Tabelle von entsprechenden Werthen der Veränderlichen x' und y:

Für x'	$= 0,27$	wird y	$= 0,0$
	$= 3,00$		$= -\,0,0441$
	$= 6,21$		$= -\,0,0454$
	$= 10$		$= -\,0,0448$
	$= 20$		$= -\,0,0405$
	$= 30$		$= -\,0,0324$
	$= 40$		$= -\,0,0158$
	$= 50$		$= +\,0,0340$
	$= 59$		$= +\,1,3051$.

Diese Werthe tragen wir nun als Abscissen und Ordinaten auf, nämlich die von x' als Abscissen auf einer zur Verbindungslinie AB der beiden

*) Die wirkliche anziehende Wirkung der Erde auf die Körper an ihrer Oberfläche wird nämlich, wie wir im 3ten Kapitel sehen werden, durch den von ihrer Bewegung um die Achse erzeugten dynamischen Druck etwas vermindert.

Mittelpunkte parallelen Geraden A'B', und die Werthe von y senkrecht dazu, diese letztern aber in einem 100mal größern Maaßstabe, als die erstern. Die so entstehende Curve abcd, Fig. 61, stellt dann die Bewegung für den Fall vor, wo sich der Bewegte mit der Geschwindigkeit Null von der Oberfläche des Mondes entfernen soll, und man sieht, daß die Werthe von y von a bis c negativ, die von v also imaginär sind, und keine Bewegung eintritt; in derselben Lage zeigt aber diese Curve auch die Verhältnisse der Bewegung für den Fall, wo der materielle Punkt sich von c aus mit der Geschwindigkeit Null gegen die Erde bewegt. — Verlegt man dann die Achse A'B' parallel mit sich nach A"B" durch den tiefsten Punkt b der Curve, so stellt die Figur den Fall vor, wo der Bewegte mit der anfänglichen Geschwindigkeit $v_0 = \sqrt{0,0454 . 2 g R}$ die Oberfläche des Mondes verläßt und mit der Geschwindigkeit Null in dem Punkte b der gleichen Anziehung ankommt, oder eigentlich nicht ankommt, da er, wie wir bald sehen werden, eine unendlich große Zeit dazu braucht, ebenso wie er, in diesen Punkt mit der Geschwindigkeit Null versetzt, diesen nach einer unendlich großen Zeit, d. h. nie verlassen wird. Derselbe Fall wird immer eintreten, wenn die Geschwindigkeitscurve (in Bezug auf die Entfernung) von der Achse der x berührt wird. Versetzt man die Achse der x' ferner nach $A_1 B_1$ zwischen die beiden vorhergehenden Lagen, so stellt die Curve den Fall vor, wo der Bewegte die Oberfläche des Mondes mit einer kleinern Geschwindigkeit, als $v_0 = \sqrt{0,0454 . 2 g R}$ verläßt, und gibt die Entfernung $x' = A_1 b_1$, wo er mit der Geschwindigkeit Null ankommt, um mit derselben Bewegung auf den Mond zurückzufallen. Endlich deutet die Lage $A_2 B_2$ der Abscissenachse den Fall an, wo die anfängliche Geschwindigkeit v_0 größer ist, als die vorherbemerkte, wo der Bewegte also die Gleichgewichtslage D mit der kleinsten Geschwindigkeit $v = \sqrt{2 g R \times \overline{b b_2}}$ erreicht, und sich gegen die Erde fortbewegt.

Der vorhergehende Grenzwerth von v_0 berechnet sich mit den Werthen:

$$g = 9^m,8 \quad , \quad R = 6366000^m$$

zu

$$v_0 = 2381^m \ ;$$

es müßte demnach ein Körper auf dem Monde eine anfängliche Geschwindigkeit von wenigstens 2382^m erhalten, um auf die Erde herabkommen zu können, wie es manche Naturforscher von den Meteorsteinen

angenommen haben. Allein abgesehen von dieser bedeutenden Geschwindigkeit ist ein solches Ereigniß wegen der Umdrehungsgeschwindigkeit des Mondes, welche für einen Punkt seines Aequators über 1000^m für die Sekunde beträgt, nicht wohl möglich, da diese den Bewegten aus der Geraden AB entfernen, und derselbe in Folge dessen eine krumme Linie (Ellipse) um die Erde beschreiben, also einen kleinen Trabanten von ihr bilden würde.

§. 56.

Aus dem Werthe von v^2 erhalten wir endlich nach der in §. 47 (55) angegebenen Weise den Ausdruck für die Zeit, welche der Bewegte braucht, um von dem Anfangspunkte der Bewegung in der Entfernung r von A, zu einem andern in der Entfernung x zu gelangen. Es ist nämlich wieder

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 + 2\frac{e^2}{m}\left(\frac{P_2}{a-x} + \frac{P_1}{x} - \frac{P_2}{a-r} - \frac{P_1}{r}\right)}$$

und daraus, wenn man, um den Ausdruck abzukürzen,

$$m v_0^2 - 2e^2\left(\frac{P_2}{a-r} + \frac{P_1}{r}\right) = -mf^2$$

setzt, und beachtet, daß x mit t wächst

$$t = \int_r^x dx \,.\, \frac{1}{\sqrt{\frac{2e^2}{m}\left(\frac{P_2}{a-x} + \frac{P_1}{x}\right) - f^2}}$$

oder in einer andern nach den Potenzen der Veränderlichen x geordneten Form:

$$t = \int_r^x dx \,.\, \frac{\sqrt{m(ax-x^2)}}{\sqrt{2e^2 a P_1 + [2e^2(P_2 - P_1) - maf^2]\,x + mf^2 x^2}},$$

woraus man schließt, daß der Werth von t im Allgemeinen nur annäherungsweise durch Auflösung des Integrals in eine Reihe dargestellt werden kann.

Es gibt aber zwei besondere Fälle, in denen sich das vorstehende Integral auf einen begrenzten algebraischen Ausdruck zurückführen läßt, in denen nämlich die Wurzelgröße im Nenner rational wird, wo also

die Größe unter dem Wurzelzeichen ein vollständiges Quadrat ist. Damit dieses stattfindet, muß die Bedingungsgleichung:

$$[2e^2(P_2-P_1)-maf^2]^2=8me^2aP_1f^2$$

befriedigt werden, welche in Bezug auf mf^2 aufgelöst den Werth gibt:

$$mf^2=\frac{2e^2}{a}\left(\sqrt{P_1}\pm\sqrt{P_2}\right)^2.$$

Wird dann dieser Werth in den obigen von mv_0^2 eingeführt, so zieht man daraus für die anfängliche Geschwindigkeit die beiden Werthe:

$$mv_0^2=2e^2\left[\frac{P_2}{a-r}+\frac{P_1}{r}-\frac{\left(\sqrt{P_1}\pm\sqrt{P_2}\right)^2}{a}\right]$$

$$=2e^2\frac{r(a-r)}{a}\left(\frac{\sqrt{P_1}}{r}\mp\frac{\sqrt{P_2}}{a-r}\right)^2,$$

von denen der erste, für welchen die obern Zeichen gelten, dem obengefundenen Grenzwerthe gleich ist, nämlich derjenigen anfänglichen Geschwindigkeit, mit welcher der Bewegte die Oberfläche der Kugel A verlassen muß, um die Gleichgewichtslage D mit einer Geschwindigkeit Null zu erreichen. Die zweite der vorstehenden Werthe ist offenbar größer als dieser; mit ihm wird also der Bewegte den Punkt D überschreiten, und die Kugel B erreichen. Für das im vorigen §. berechnete Beispiel findet man

$$v_0=\sqrt{0{,}05308.2gR}=2574^m{,}7$$

als diesen zweiten Werth.

Mit diesem Doppelwerthe nimmt jetzt der Ausdruck für t die Form an:

$$t=\int_r^x dx.\frac{\sqrt{ma(ax-x^2)}}{e\sqrt{2}\left[a\sqrt{P_1}-x\left(\sqrt{P_1}\pm\sqrt{P_2}\right)\right]},$$

oder wenn man sich nur an den Fall hält, wo $P_2>P_1$ ist, und dann zur Abkürzung

$$a\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_2}\pm\sqrt{P_1}}=\alpha,$$

setzt, nach einigen Umwandlungen:

$$\frac{e}{a_1}\sqrt{\frac{2aP_1}{m}}\,t = \int_r^x dx\,.\,\frac{\sqrt{ax-x^2}}{a_1 \mp x} = t'\ .$$

Um nun den ersten Fall weiter auszuführen, mache ich $a_1 - x = z$ und $a - a_1 = a_2$, wodurch der vorstehende Werth unter die Formen:

$$\Delta t' = -\int dx\,.\,\frac{\sqrt{(a_1-z)(a_2+z)}}{z} = -\int dz\,.\,\frac{a_1 a_2 - (a_2 - a_1)z - z^2}{z\sqrt{(a_1-z)(a_2+z)}}$$

oder wenn man weiter $a_1 a_2$ durch A^2, $a_2 - a_1$ durch B ersetzt, die Wurzelgröße durch $\sqrt{Z}$ abkürzt, und dann das Integral zerlegt, auf:

$$\Delta t' = -\int dz\,.\,\frac{A^2}{z\sqrt{Z}} + \int dz\,.\,\frac{\frac{1}{2}B}{\sqrt{Z}} + \int dz\,.\,\frac{\frac{1}{2}B + z}{\sqrt{Z}}\ .$$

gebracht werden kann. Die beiden ersten Glieder können nun auf die gewöhnliche Weise oder dadurch rational gemacht werden, daß man setzt:

$$(a_1 - z)\,u = \sqrt{(a_1 - z)(a_2 + z)}\ ,$$

woraus nach und nach folgt:

$$z = \frac{a_1 u^2 - a_2}{1 + u^2}\ ,\qquad \frac{dz}{du} = \frac{2(a_1 + a_2)u}{(1+u^2)^2} = \frac{2au}{(1+u^2)^2}$$

$$u = \sqrt{\frac{a_2 + z}{a_1 - z}} = \sqrt{\frac{a - x}{x}}\ ,\qquad \sqrt{(a_1 - z)(a_2 + z)} = \frac{au}{1+u^2}\,.$$

Man findet dadurch:

$$\Delta t' = \int du\,.\,\frac{2a_1 a_2}{a_2 - a_1 u^2} + \int du\,.\,\frac{a_2 - a_1}{1 + u^2} + \int dz\,.\,\frac{\frac{1}{2}B + z}{\sqrt{Z}}$$

oder nach bekannten Formeln:

$$\Delta t' = \Delta\left(\sqrt{a_1 a_2}\,\mathrm{logn}\,\frac{\sqrt{a_2} + u\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_2} - u\sqrt{a_1}} + (a_2 - a_1)\,\mathrm{arc\,tang}\,u + \sqrt{Z}\right),$$

und wenn man für u und Z ihre Werthe in x einführt, so folgt zwischen den Grenzen r und x der Ausdruck:

$$t\frac{e}{a_1}\sqrt{\frac{2aP_1}{m}} = \overset{x}{\underset{r}{\Delta}}.\sqrt{a_1 a_2}\,\text{logn}.\frac{\sqrt{a_2 x}+\sqrt{a_1(a-x)}}{\sqrt{a_2 x}-\sqrt{a_1(a-x)}}+$$

$$+\overset{x}{\underset{r}{\Delta}}.(a_2-a_1)\,\text{arc tang}\sqrt{\frac{a-x}{x}}+\overset{x}{\underset{r}{\Delta}}.\sqrt{ax-x^2}$$

und demnach zwischen den Grenzen a_1 und r für die Zeit, welche der Bewegte braucht, um den Punkt D zu erreichen, $t=\infty$, wie oben behauptet wurde.

Für den zweiten Fall setzt man $a_1+x=z$, $a+a_1=a_2$; es wird dadurch

$$\Delta t' = \int dz.\frac{\sqrt{(z-a_1)(a_2-z)}}{z} = \int dz.\frac{-a_1 a_2+(a_2+a_1)z-z^2}{z\sqrt{(z-a_1)(a_2-z)}}$$

und nach einer ähnlichen Behandlung wie vorher, indem man

$$\sqrt{\frac{z-a_1}{a_2-z}} = u$$

setzt, erhält man den Werth:

$$\Delta t' = \overset{x}{\underset{r}{\Delta}}.\left[(a_1+a_2)\,\text{arc tang}\sqrt{\frac{x}{a-x}}-2\sqrt{a_1 a_2}\,\text{arc tang}\sqrt{\frac{a_2 x}{a_1(a-x)}}+\sqrt{X}\right],$$

worin $\sqrt{X}$ für $\sqrt{ax-x^2}$ steht, und wonach sich die Zeit für besondere Werthe von x leicht berechnen läßt.

Zweites Kapitel.

Freie Bewegung des materiellen Punktes.

§. 57.

Eine geradlinige Bewegung des materiellen Punktes kann offenbar nur dann erfolgen, wenn derselbe sich unter dem Einflusse einer einzigen Kraft bewegt, oder unter dem Einflusse mehrerer, deren Intensitäten dasselbe gegenseitige Verhältniß und deren Richtungen dieselbe gegenseitige Lage behalten, so daß ihre Resultirende immer dieselbe Richtung hat, und auch dann nur, wenn sich der materielle Punkt entweder von der Ruhe aus bewegt, oder wenn die Richtung seiner anfänglichen Geschwindigkeit mit der Richtung der bewegenden Kraft zusammenfällt, wobei die letztere übrigens auch im entgegengesetzten Sinne von jener wirken darf. In allen übrigen Fällen wird die Bewegung eine krummlinige sein, der materielle Punkt wird irgend eine einfach oder doppelt gekrümmte Curve beschreiben, welche wir seine Bahn nennen.

Um daher die allgemeinen Gesetze der freien Bewegung eines Atoms auszudrücken, d. h. um seine Geschwindigkeit und seine Lage in irgend einem Augenblicke oder am Ende der beliebigen Zeit t angeben zu können, werden wir seine Lage auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System beziehen, das wir durch irgend einen festen Punkt im Raume gelegt denken, und dann die drei Coordinaten x, y, z des Bewegten als Functionen der Zeit ausdrücken; denn seine Bewegung wird vollständig bestimmt sein, wenn die drei Gleichungen:

62.) $$x = f_1(t) \quad , \quad y = f_2(t) \quad , \quad z = f_3(t)$$

gegeben oder gefunden sind.

Für jede dieser drei Gleichungen muß die Veränderliche t offenbar gleichzeitig denselben Werth erhalten; man kann sie deßhalb in Verbindung bringen und jene Veränderliche zwischen je zwei derselben eliminiren; man findet dadurch drei neue Gleichungen:

$$F_1(x,y) = 0 \quad , \quad F_2(x,z) = 0 \quad , \quad F_3(y,z) = 0$$

oder in Bezug auf eine dieser Veränderlichen aufgelöst:

$$y = \varphi_1(x) \quad , \quad z = \varphi_2(x) \quad , \quad y = \varphi_3(z) \quad ,$$

welche die Lage des Bewegten unabhängig von der Zeit ausdrücken, oder welche sämmtliche Orte des Raumes umfassen, in denen sich derselbe vom Anfang der Zeit an bis zu irgend einer beliebigen Zeit nach und nach befinden kann. Diese Gleichungen sind also zusammen die Gleichungen seiner Bahn, und jede für sich ist die Gleichung von der Projection dieser krummen Linie in der entsprechenden Coordinaten-Ebene, wie dieß schon in der Einleitung (§. 17) auseinandergesetzt wurde; es sind demnach zwei jener Gleichungen zur Bestimmung und Erkennung der Eigenschaften jener krummen Linie vollkommen genügend. Aus diesen Gleichungen kann dann auch der allgemeine Ausdruck für die Bogenlänge s zwischen einem bestimmten Punkte der Bahn und dem Orte, wo sich der Bewegte am Ende der Zeit t befindet abgeleitet, und mittels der Gleichungen (62) in Function von t ausgedrückt werden, so daß man auch für diese die Form:

$$s = F(t) \qquad (63.$$

erhält.

§. 58.

Nehmen wir nun jede der Gleichungen (62) für sich bestehend, so erkennen wir sogleich, daß jede von ihnen die Gleichung der geradlinigen Bewegung eines Punktes ist, oder als solche betrachtet werden kann, und zwar die erste von einer Bewegung längs der Achse der x, die beiden andern beziehungsweise längs der Achsen der y und z; denn die erste:

$$x = f_1(t)$$

drückt aus, daß sich der Bewegte am Ende der Zeit t in der Entfernung x von der Ebene der yz, oder daß sich seine Projection in der Achse der x in der Entfernung x vom Anfangspunkte befindet; sie gibt also die Lage dieser Projection in der Achse der x am Ende der Zeit t an, oder sie ist die Gleichung der geradlinigen Bewegung dieser Projection. Dasselbe gilt von den beiden andern Gleichungen in Bezug auf die Projectionen des Bewegten in den Achsen der y und der z, und wir schließen daraus, daß jede krummlinige Bewegung im Raume auf drei geradlinige nicht in derselben Ebene liegende Bewegungen zurückgeführt, oder aus diesen und durch diese dargestellt werden kann.

Die im vorhergehenden Kapitel gefundenen Gesetze für die geradlinigen Bewegungen werden uns demnach auch hier dienen, um die Beziehungen zwischen der Entfernung oder Lage des Bewegten, beziehungsweise seiner Projectionen, seiner Geschwindigkeit und der augenblicklichen

Intensität der bewegenden Kraft analytisch auszudrücken. Bezeichnen wir nämlich am Ende der Zeit t die Geschwindigkeit der Projection des Bewegten in der Achse der x mit u_x, die seiner Projectionen in den Achsen der y und z beziehungsweise mit u_y und u_z, so haben wir zwischen den Coordinaten x, y, z und diesen Geschwindigkeiten, alle als Functionen von t betrachtet, dieselben Beziehungen, wie in §. 39 (36) zwischen v und x, nämlich:

$$64.)\quad \begin{cases} u_x = \dfrac{dx}{dt} = f_1(t)\,, \\[2ex] u_y = \dfrac{dy}{dt} = f_2(t)\,, \\[2ex] u_z = \dfrac{dz}{dt} = f_3(t)\,. \end{cases}$$

Drücken wir ferner die Intensität der beständigen oder veränderlichen Kraft, welche einem materiellen Punkte von derselben Masse m wie der Bewegte dieselbe geradlinige Bewegung ertheilt, wie sie die Projection des letztern in der Achse der x besitzt, durch die beständige oder veränderliche Größe X' aus, ebenso die Intensitäten der Kräfte, welche die entsprechenden Bewegungen in den Achsen der y und z hervorzubringen vermögen, mit Y' und Z', so haben wir auch nach §. 46 die Gleichungen:

$$a)\quad \begin{cases} X' = m\,\dfrac{d.u_x}{dt} = m\,\dfrac{d^2x}{dt^2} \\[2ex] Y' = m\,\dfrac{d.u_y}{dt} = m\,\dfrac{d^2y}{dt^2} \\[2ex] Z' = m\,\dfrac{d.u_z}{dt} = m\,\dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}.$$

Es wird sich demnach noch darum handeln, die Beziehungen zu suchen, einmal zwischen der Geschwindigkeit v des Bewegten und den Geschwindigkeiten u_x, u_y, u_z seiner drei Projectionen, und dann zwischen den wirklich an dem Bewegten angreifenden Kräften oder ihrer Resultirenden R, deren drei zu den Coordinatenachsen parallele Componenten wir mit X, Y, Z bezeichnen werden, und den Kräften X', Y', Z', welche die geradlinigen Bewegungen seiner Projectionen, eine jede als materieller Punkt mit der Masse m vorausgesetzt, unabhängig von einander zu erzeugen vermögen.

§. 59.

Was nun zuerst die Geschwindigkeit v des Bewegten betrifft, so ist leicht einzusehen, daß diese unveränderlich sein muß, wenn der Bewegte in gleichen Zeiten gleiche Bogenlängen in seiner Curve zurücklegt, wenn also seine Bewegung eine gleichförmige ist. Bezeichnet demnach in irgend einem Augenblicke s die Entfernung des Bewegten von einem festen Punkte seiner Bahn auf dieser Curve gemessen, s_0 seine Entfernung am Anfang der Zeit t, so ist die in t Zeiteinheiten zurückgelegte Bogenlänge $s-s_0$, und es wird die in einer Zeiteinheit zurückgelegte Länge:

$$b = \frac{s - s_0}{t},$$

oder das Verhältniß des zurückgelegten krummlinigen Weges zu der angewendeten Zeit, wie bei der geradlinigen Bewegung das Maaß für die Geschwindigkeit sein, da sich die Geschwindigkeiten zweier materiellen Punkte, welche sich in zwei beliebigen Curven aber beide gleichförmig bewegen, immer verhalten werden, wie die in der Einheit der Zeit durchlaufenen Bogen, oder allgemeiner wie die Verhältnisse der in irgend einer Zeit durchlaufenen Wege zu den dazu verwendeten Zeiten.

Man wird deßhalb auch bei der krummlinigen veränderlichen Bewegung, ganz ebenso wie bei der geradlinigen, die Beziehung zwischen der von dem Bewegten am Ende der Zeit t erreichten Bogen-Entfernung s von einem festen Punkte und der am Ende dieses Weges erlangten Geschwindigkeit v finden, wenn man sich denselben nach der Zeit $t+\Delta t$ um das Bogenstück Δs weiter gerückt, und seine Geschwindigkeit um Δv vermehrt denkt; denn das Verhältniß $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ wird dann wieder das Maaß einer größern Geschwindigkeit als v und einer kleinern als $v+\Delta v$ sein, und sich daraus als Anfangswerth dieses Verhältnisses:

$$\frac{ds}{dt} = F'(t) = v \qquad (65.$$

ergeben, und der Schluß folgen, daß auch bei der krummlinigen Bewegung das Aenderungsgesetz der Bogen-Entfernung s in Bezug auf die Zeit das Maaß für die augenblickliche Geschwindigkeit ausdrückt.

Bei der krummlinigen Bewegung ist aber auch die Richtung der Geschwindigkeit veränderlich; denn sie ist dieselbe wie die Richtung der Bewegung, und demnach dieselbe wie die der Tangente an der Bahn

in dem Orte, welchen der Bewegte in dem betreffenden Augenblicke gerade einnimmt. Man wird sich von dieser Richtung der Bewegung oder der Geschwindigkeit am leichtesten dadurch die richtige Vorstellung erwerben, daß man sich einen Menschen denkt, welcher einen krummen Weg verfolgt und seine Augen auf den vor ihm liegenden Weg geheftet hat; dieser wird dann geradeaussehend seinen Blick in jedem Augenblicke nach einer bestimmten Gegend richten, und seine Gesichtslinie, welche offenbar den beschriebenen Weg berührt, wird die Richtung seiner Bewegung in dem entsprechenden Zeitpunkte vorstellen. Sind demnach

$$y = f_1(x) \quad , \quad z = f_2(x)$$

die beiden nothwendigen Gleichungen der Bahn des Bewegten, so werden die drei Winkel l, m, n, welche die Tangente, d. i. die Richtung seiner Geschwindigkeit in dem Punkte xyz mit den drei Coordinaten-Achsen bildet, nach §. 26 der Einleitung durch

$$\cos l = \frac{dx}{ds} \quad , \quad \cos m = \frac{dy}{ds} \quad , \quad \cos n = \frac{dz}{ds}$$

ausgedrückt. Denkt man sich ferner die Geschwindigkeit v wie eine Kraft durch eine auf jene Richtung aufgetragene Länge vorgestellt, und diese auf die drei Achsen der Coordinaten projicirt, so werden die so erhaltenen Projectionen

$$v\cos l \quad , \quad v\cos m \quad , \quad v\cos n$$

sein, und man wird demnach mit den vorhergehenden Werthen erhalten:

$$66.)\quad \left\{\begin{aligned} v\cos l &= \frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} = u_x \\ v\cos m &= \frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} = u_y \\ v\cos n &= \frac{ds}{dt}\cdot\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt} = u_z \ , \end{aligned}\right.$$

woraus hervorgeht, daß die Projectionen der Geschwindigkeit v auf die drei Achsen auch die Geschwindigkeiten der Projectionen des Bewegten in diesen Achsen vorstellen; ferner hat man

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\cdot\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]$$

oder

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

also auch

$$v^2 = u_x{}^2 + u_y{}^2 + u_z{}^2 \,. \qquad (67.$$

Man kann demnach die Geschwindigkeiten, ebenso wie fördernde Kräfte und nach denselben Regeln in drei unter sich rechtwinklige oder überhaupt nach drei Richtungen zerlegen, und umgekehrt drei oder mehrere in eine einzige zusammensetzen, und deßhalb auch sagen, die Geschwindigkeit der Projection des Bewegten in einer der Coordinaten-Achsen sei die zu dieser Achse parallele Componente der wirklichen Geschwindigkeit des Bewegten; es kann ferner dadurch diese Geschwindigkeit immer gefunden werden, wenn die Geschwindigkeiten der Projectionen bekannt sind, und umgekehrt diese letztern, wenn jene gegeben ist.

§. 60.

Das Vorhergehende berechtigt uns aber noch nicht zu dem Schlusse, daß auch die zu den Coordinaten-Achsen parallelen Componenten X, Y, Z der bewegenden Kraft R durch die Aenderungsgesetze der Bewegungsgrößen:

$$mu_x \;,\qquad mu_y \;,\qquad mu_z$$

gemessen werden, oder daß diese Componenten mit den oben angenommenen Kräften X′, Y′, Z′ gleichbedeutend sind. Denn die Richtung der Kraft R fällt im Allgemeinen nicht mit der Richtung der Geschwindigkeit zusammen, sondern bildet in jedem Augenblicke einen größern oder kleinern Winkel mit ihr; ihre Wirkung kann deßhalb nicht blos auf die Aenderung der Geschwindigkeit gerichtet sein, wie bei der geradlinigen Bewegung, wo die bereits vorhandene Geschwindigkeit und die bewegende Kraft dieselbe Richtung haben und demnach nur eine Aenderung in der Stärke, aber keine in der Richtung der Bewegung hervorgebracht wird, wo also die ganze Wirkung der Kraft auf die Aenderung der Bewegungsgröße gerichtet sein muß, und wo in der That, wie wir im vorigen Kapitel (§. 46) gesehen haben, das Gesetz dieser Aenderung der Bewegungsgröße das Maaß für die augenblickliche Intensität der bewegenden Kraft vorstellt.

Bei der Bewegung in einer krummen Linie wird im Allgemeinen sowohl die Größe als die Richtung der Bewegung oder der Geschwindigkeit in jedem Augenblicke geändert; wir können uns daher, da keine Aenderung

ohne eine äußere Ursache oder Kraft erfolgen kann, die Wirkung der bewegenden Kraft in jedem Augenblicke in zwei zerlegt denken, nämlich in eine, welche nur die Aenderung in der Größe der Geschwindigkeit, und in diejenige, welche die Aenderung ihrer Richtung erzeugt, oder welche in jedem Augenblicke im Begriffe stehen, diese Aenderungen zu erzeugen. Wir werden also die Kraft R, welche an dem Bewegten thätig ist, in jedem Augenblicke als die Resultirende zweier Kräfte T und N betrachten, von denen die erste die Geschwindigkeit, die zweite die Richtung der Bewegung ändern soll, und deren Intensitäten und Richtungen nun zu bestimmen sind, um daraus die Beziehungen zwischen der Geschwindigkeit und Lage des Bewegten und der bewegenden Kraft R oder ihren Componenten X, Y, Z ableiten zu können.

Es ist nun nach der Bestimmung, welche die Kraft T zu erfüllen hat, einleuchtend, daß ihre Intensität durch das Aenderungsgesetz der Bewegungsgröße gemessen werden muß, daß man also:

$$T = m\frac{dv}{dt}$$

haben muß. Nicht minder einleuchtend dürfte es sein, daß ihre Richtung in jedem Augenblicke dieselbe sein muß, wie die der Geschwindigkeit oder die der Tangente an der Bahncurve; dieser Schluß läßt sich indessen aus den bereits erhaltenen Beziehungen unmittelbar ableiten.

Nehmen wir nämlich die Abgeleitete oder das Aenderungsgesetz der Gleichung (97) in Bezug auf die Veränderliche t, so wird

$$v\frac{dv}{dt} = u_x\frac{du_x}{dt} + u_y\frac{du_y}{dt} + u_z\frac{d.u_z}{dt},$$

oder

$$\frac{dv}{dt} = \frac{u_x}{v}\cdot\frac{du_x}{dt} + \frac{u_y}{v}\cdot\frac{du_y}{dt} + \frac{u_z}{v}\cdot\frac{d.u_z}{dt},$$

und wenn man diese letztere Gleichung mit m multiplicirt und beachtet, daß man hat:

$$\frac{u_x}{v} = \cos l = \frac{dx}{ds}, \quad \frac{u_y}{v} = \cos m = \frac{dy}{ds}, \quad \frac{u_z}{v} = \cos n = \frac{dz}{ds},$$

so findet man mit Berücksichtigung der Gleichungen (a) in §. 58 den Ausdruck:

$$\text{b)} \qquad m\frac{dv}{dt} = T = X'\frac{dx}{ds} + Y'\frac{dy}{ds} + Z'\frac{dz}{ds},$$

und schließt daraus:

1) daß die drei Kräfte X', Y', Z', von denen jede für sich allein dem gegebenen materiellen Punkte parallel zu der entsprechenden Coordinaten-Achse eine solche Bewegung ertheilen würde, wie sie die Projection desselben in derselben Achse besitzt, als die rechtwinkligen Componenten einer Kraft R' angesehen werden können, deren Richtung und Intensität sich natürlich in jedem Augenblicke ändert, und

2) daß die Kraft T, welche die Aenderung der Geschwindigkeit bewirkt und durch das Aenderungsgesetz der Bewegungsgröße jenes materiellen Punktes gemessen wird, nicht diese Resultirende R' selbst ist, sondern durch deren Projection auf die Tangente der Bahncurve oder auf die Richtung der Geschwindigkeit vorgestellt wird, daß also T als die eine von zwei rechtwinkligen Componenten der Kraft R' betrachtet werden kann, von welchen die zweite, die wir mit N' bezeichnen wollen, in die Normal-Ebene der von dem Bewegten beschriebenen Curve fällt, während T selbst nach der Tangente gerichtet ist. Denn wenn man den Winkel zwischen der Richtung der Kraft R' und der Tangente mit ϑ' bezeichnet, so hat man nach §. 12, Gleichung (12)

$$R' \cos \vartheta' = X' \frac{dx}{ds} + Y' \frac{dy}{ds} + Z' \frac{dz}{ds} = T \ ,$$

und demnach auch

$$R' \sin \vartheta' = N' \ .$$

Es fragt sich also zunächst, in welcher Beziehung diese Componente N' zu der Bewegung oder zu der Kraft N steht, welche die Aenderung in der Richtung der Bewegung oder der Geschwindigkeit zu bewirken hat.

§. 61.

Um diese Beziehung zu erkennen, gehen wir wie bei der Untersuchung der Gesetze der geradlinigen Bewegung, von einfachen Fällen aus, und betrachten zuerst wieder die gleichförmige geradlinige und die geradlinige Bewegung überhaupt, aber jetzt in einer beliebigen Richtung gegen das Coordinatensystem und nach der vorhergehenden allgemeineren Auffassung, wodurch wir zugleich Gelegenheit erhalten, die vorhergehenden Gleichungen und Beziehungen anzuwenden.

Bei der gleichförmigen geradlinigen Bewegung ist sowohl die Größe als die Richtung der Geschwindigkeit unveränderlich, also einmal

$$v = b \ ,$$

und dann hat man, wenn α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche die Richtung der Bewegung mit den Coordinaten-Achsen bildet,

$$u_x = b \cos\alpha \quad , \quad u_y = b \cos\beta \quad . \quad u_z = b \cos\gamma \ ;$$

es sind demnach auch die Componenten der Geschwindigkeit oder die Geschwindigkeiten der Projectionen des Bewegten unveränderlich, woraus zunächst wieder

$$X' = 0 \quad , \quad Y' = 0 \quad , \quad Z' = 0$$

folgt, und dann

$$R' = 0 \quad , \quad T = 0 \quad , \quad N' = 0 \ ,$$

wie vorherzusehen war.

Für die veränderliche geradlinige Bewegung haben wir als Gleichungen der Bahn des Bewegten, wie vorher, die Gleichungen einer Geraden:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y - y_0}{\cos\beta} = \dfrac{x - x_0}{\cos\alpha} \\[2ex] \dfrac{z - z_0}{\cos\gamma} = \dfrac{x - x_0}{\cos\alpha} \end{array}\right\} ;$$

die Geschwindigkeit ist aber eine beliebige Function der Zeit, also

$$v = f(t) \ .$$

Die Geschwindigkeiten der Projectionen oder die Componenten derselben sind demnach

$$u_x = f(t) . \cos\alpha \quad , \quad u_y = f(t) . \cos\beta \quad , \quad u_z = f(t) . \cos\gamma$$

und man erhält daraus die Intensitäten der Kräfte X', Y', Z':

$$\left.\begin{array}{l} X' = m \dfrac{d u_x}{dt} = m f'(t) . \cos\alpha \\[2ex] Y' = m \dfrac{d u_y}{dt} = m f'(t) . \cos\beta \\[2ex] Z' = m \dfrac{d u_z}{dt} = m f'(t) . \cos\gamma \end{array}\right\} ,$$

welche in Verbindung mit den vorhergehenden Werthen von u_x, u_y, u_z zeigen, daß die Bewegungen der Projectionen des Bewegten in den drei

Achsen der Bewegung des letztern selbst ganz ähnlich sind, daß sie z. B. in dem Fall einer gleichförmig veränderten Bewegung desselben ebenfalls gleichförmig veränderte Bewegungen sein werden. Ferner schließt man daraus:

$$T = m\frac{dv}{dt} = m f'(t) = R' = R ,$$

und demnach auch

$$N' = 0 .$$

Bei der geradlinigen Bewegung ist folglich die Kraft R' mit der Kraft R gleichbedeutend, und stellt zugleich ihre in die Richtung der Bewegung fallende Componente T vor; die dazu senkrechte Componente N' ist Null, ebenso wie die Componente N der Kraft R, da hier keine Aenderung in der Richtung der Bewegung hervorzubringen ist. Es dürfte deßhalb schon aus diesen Ergebnissen der sichere Schluß zu ziehen sein, daß die Kräfte N und N' und demnach auch die Kräfte R und R', die erstere als Resultirende von T und N, die letztere als Resultirende von T und N', gleichbedeutend sind. Wir wollen jedoch diesen Schluß durch die Untersuchung einer einfachen Bewegung unterstützen, bei welcher nur eine Aenderung in der Richtung und keine in der Geschwindigkeit zu bewirken ist, bei welcher also, wenn unser Schluß richtig ist, T Null, und $N' = N = R' = R$ sein muß.

§. 62.

Diese einfache Bewegung ist die gleichförmige Bewegung im Kreise, also eine Bewegung, bei welcher der in Bewegung begriffene materielle Punkt immer in gleichen Zeiten gleiche Bogenlängen zurücklegt, bei welcher demnach die Geschwindigkeit unverändert bleibt, und die Kraft R, die nun mit ihrer Componenten N gleichbedeutend ist, nur die fortwährende Aenderung der Richtung zu bewirken hat. Diese Richtungsänderung ist aber, wie in der Einleitung (§. 31) gezeigt worden, analytisch gleichbedeutend mit der Krümmung, und daher wie diese beim Kreise unveränderlich, d. h. in allen Punkten des Kreises oder in jedem Augenblicke der Bewegung dieselbe; die Kraft hat also bei dieser Bewegung, wie bei der gleichförmig veränderten, in jedem Augenblicke dieselbe Wirkung hervorzubringen; sie muß demnach auch wie bei dieser eine unveränderliche Kraft, und ihre Intensität bei sonst gleichen Umständen dieser Wirkung, d. h. der Richtungsänderung oder Krümmung proportional sein, und man sieht, daß man auch diese Richtungsänderung als Maaß der Kräfte benützen könnte, daß dasselbe

aber weniger einfach sein würde, als das im vorigen Abschnitte auf die Geschwindigkeitsänderung gegründete, da die in einer Zeiteinheit bewirkte Richtungsänderung offenbar auch von der Geschwindigkeit des Bewegten abhängt. Um also die Kraft, welche die Richtungsänderung bewirkt, messen zu können, müssen wir untersuchen, welche Geschwindigkeit sie dem Bewegten ertheilen würde, wenn derselbe ihrer Wirkung allein unterworfen wäre, wir müssen gleichsam die Richtungsänderung in Erzeugung von Geschwindigkeit umsetzen oder durch diese verwerthen.

Es ist aber einleuchtend, daß der Zustand unserer Bewegung in jedem Augenblicke derselbe ist, daß also die Richtung der bewegenden Kraft in jedem Augenblicke dieselbe Lage haben muß gegen die Richtung der Bewegung oder Geschwindigkeit, und leicht zu schließen, daß sie fortwährend senkrecht zu dieser Richtung sein muß. Denn wegen der Unveränderlichkeit der Geschwindigkeit ist kein Grund dafür vorhanden, daß die bewegende Kraft mehr zum Vortheil als zum Nachtheil der Geschwindigkeit wirken sollte, oder umgekehrt, während leicht zu sehen ist, daß man in jeder andern Richtung als der senkrechten die Kraft zerlegen kann in eine zur Geschwindigkeit senkrechte Componente, und in eine, welche wie sie längs der Tangente thätig ist, und daß diese letztere zu Gunsten der Geschwindigkeit wirken und die Bewegung beschleunigen wird, wenn der Winkel zwischen der Richtung der Kraft und der Geschwindigkeit ein spitzer ist, daß sie dagegen die Geschwindigkeit vermindern muß, wenn dieser Winkel ein stumpfer ist, wobei die senkrechte Componente, wenn sich diese beiden Winkel zu π ergänzen, dieselbe bleibt und offenbar in beiden Fällen die gleiche Wirkung äußern muß, und es folgt daraus nothwendig, daß auch die Wirkung der ganzen Kraft eine beschleunigende oder eine verzögernde sein müßte, wenn sie eine andere Richtung gegen die Geschwindigkeit hätte, als die senkrechte.

Die Kraft R oder N ist also nothwendig, wie die Componente N′ normal zur Bahn, d. h. fortwährend gegen den Mittelpunkt des Kreises gerichtet, in dem sich der materielle Punkt bewegt, und die von ihr bewirkte Richtungsänderung ist die Folge ihres Bestrebens, den Bewegten jenem Mittelpunkte zu nähern oder ihm eine gegen den Mittelpunkt gerichtete Geschwindigkeit zu ertheilen. Diese Geschwindigkeit ist aber in jedem Augenblicke Null, weil diese Bewegung gegen den Mittelpunkt in jedem Augenblicke anfängt, oder im Entstehen begriffen ist, und die Wirkung der Kraft N kann deßhalb mit der Wirkung einer gegen eine feste Fläche gerichteten Kraft verglichen werden, welche ihrem Angriffspunkte ebenfalls keine Bewegung oder Geschwindigkeit zu ertheilen vermag, die aber in jedem Augenblicke das Bestreben zeigt,

ihm eine solche zu ertheilen, eine Wirkung, die wir bereits mit dem Namen: Druck bezeichnet haben.

Nehmen wir nun, um die analytischen Verhältnisse möglichst einfach zu erhalten, die Ebene des Kreises, in welchem sich der materielle Punkt bewegt, als Ebene der xy an, legen wir die Achse der x durch dessen Mittelpunkt, welcher zugleich Anfangspunkt der Coordinaten sein soll, und durch den Ort, in welchem sich der Bewegte am Anfang der Zeit t befindet, und bezeichnen wir seine constante Geschwindigkeit mit b, so haben wir einmal die einfachen Beziehungen:

$$s = bt \quad , \quad v = b$$

und dann für die Coordinaten des Bewegten am Ende der Zeit t die Werthe:

$$x = r\cos\frac{s}{r} = r\cos\frac{bt}{r} \quad , \quad y = r\sin\frac{s}{r} = r\sin\frac{bt}{r} \; .$$

Daraus ziehen wir für die Geschwindigkeiten des Bewegten parallel zu den Achsen der x und der y die Ausdrücke:

$$u_x = -\frac{ds}{dt}\sin\frac{s}{r} = -b\sin\frac{bt}{r} \; , \quad u_y = \frac{ds}{dt}\cos\frac{s}{r} = b\cos\frac{bt}{r} \; ,$$

welche durch Zusammensetzung wieder

$$v = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = b$$

und durch neue Ableitung die Werthe der Kräfte X' und Y' geben, nämlich:

$$\left\{\begin{array}{l} X' = m\dfrac{d.u_x}{dt} = -m\dfrac{b}{r}\cos\dfrac{s}{r}\cdot\dfrac{ds}{dt} = -m\dfrac{b^2}{r}\cos\dfrac{s}{r} \\ Y' = m\dfrac{d.u_y}{dt} = -m\dfrac{b}{r}\sin\dfrac{s}{r}\cdot\dfrac{ds}{dt} = -m\dfrac{b^2}{r}\sin\dfrac{s}{r} \; . \end{array}\right.$$

Diese beiden Kräfte sind demnach die beiden zu den Coordinaten-Achsen parallelen Componenten einer Kraft R' oder N', welche in jeder Lage des Bewegten gegen den Mittelpunkt des Kreises oder normal zur Kreislinie gerichtet ist, und deren Intensität durch

$$R' = N' = \sqrt{X'^2 + Y'^2} = m\frac{b^2}{r}$$

ausgedrückt wird, während der Werth für T, wie sich dies von selbst versteht, Null wird. Diese Verhältnisse zeigen sich übrigens noch einfacher

und einleuchtender, wenn wir die Bewegung am Anfange der Zeit oder des Bogens s, wo sie dieselbe ist wie am Ende der Zeit t, betrachten, also in dem Augenblicke, wo der Bewegte durch die Achse der x geht; denn man findet dann die Geschwindigkeiten:

$$u_x = 0 \quad , \qquad u_y = b \quad ,$$

welche zeigen, daß der Bewegte in der Richtung der Normalen in jedem Augenblicke die Geschwindigkeit Null hat, und dann die Intensität der im Sinne der Bewegung gerichteten Kraft T, hier Y',

$$Y' = 0 \; ,$$

während die Kraft X', welche den materiellen Punkt senkrecht zur Richtung der Bewegung abzulenken strebt, und demnach mit unserer Kraft R oder unserem Drucke N gleichbedeutend ist, durch ihren Werth für $s = 0$:

$$X' = m\frac{b^2}{r} = R' = N'$$

das Maaß der constanten und der Krümmung $\frac{1}{r}$ proportionalen Kraft gibt, welche die Richtungsänderung hervorbringt, welche also in Verbindung mit der anfänglichen Geschwindigkeit die Bewegung im Kreise erzeugt.

Wir finden durch diese Ergebnisse den Schluß am Ende des vorigen §. bestätigt, daß die normale Componente N' die Richtungsänderung der Bewegung zu bewirken hat und demnach mit der Componenten N der bewegenden Kraft R gleichbedeutend ist, daß folglich diese selbst und ihre Componenten X, Y, Z identisch sind mit der Kraft R' und ihren Componenten X', Y', Z'. Wir schließen ferner aus den vorhergehenden Betrachtungen, daß eine Kraft, welche keinen Einfluß auf die Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes äußern soll, senkrecht zu dieser Geschwindigkeit gerichtet sein muß, und daß umgekehrt eine Kraft, welche senkrecht zur Geschwindigkeit eines materiellen Punktes gerichtet ist, diese Geschwindigkeit nicht ändert.

§. 63.

Verweilen wir noch einen Augenblick, ehe wir zu unsern allgemeinen Betrachtungen zurückkehren, bei dem vorhergehenden Ausdrucke für die

Kraft, welche die Richtungsänderung bei der gleichförmigen Bewegung im Kreise bewirkt. Dieser Ausdruck zeigt unter der Form:

$$N = mb . \frac{b}{r} ,$$

daß der Druck N in jedem Augenblicke sich zu der Bewegungsgröße mb des Bewegten verhält, wie die Geschwindigkeit zum Krümmungshalbmesser r, und führt uns zu dem weitern Schlusse, daß dieses Verhältniß auch bei der Bewegung in jeder andern krummen Linie stattfinden wird. Denn in jedem Augenblicke kann man sich, wie schon im §. 31 der Einleitung ausgesprochen wurde, die Bewegung in dem Krümmungskreise vor sich gehend denken, welcher dem Orte des Bewegten in seiner Bahn angehört, und in welchem er die Geschwindigkeit v oder die Bewegungsgröße mv besitzt, wobei es offenbar gleichgültig ist, ob sich diese Bewegungsgröße während der Bewegung ändert oder nicht, da sie für jeden Krümmungskreis nur eine einzige bestimmte sein kann. Man erhält auf diese Weise als Maaß der Kraft N am Ende der Zeit t, wo die Geschwindigkeit des Bewegten v und an einem Orte der Bahn, wo der Krümmungshalbmesser ϱ ist, den Ausdruck:

$$N = mv . \frac{v}{\varrho} = m \frac{v^2}{\varrho} ,$$

welchen man auch unter die Form:

$$N = mv^2 \varkappa$$

bringen, und als Product aus der lebendigen Kraft des Bewegten in die Krümmung der Curve betrachten kann.

Diese Folgerung wollen wir sogleich auf die Bewegung eines materiellen Punktes in einer Parabel anwenden, indem wir das Gesetz dieser Bewegung durch die Bedingung bestimmen, daß die Bewegung seiner Projection in einer zur Achse der Parabel senkrechten Geraden (der Achse der y) eine gleichförmige sei.

Die Gleichung der Parabel auf Achse und Scheitel bezogen, hat die Form:

$$y^2 = 2px ,$$

und die eben ausgesprochene Bedingung gibt:

$$y = bt ,$$

wo b die constante Geschwindigkeit der Projection in der Achse der y bezeichnet. Eliminirt man mittels der letztern Gleichung y aus der erstern, so folgt:

$$x = \frac{b^2}{2p} t^2 ,$$

und man schließt daraus, daß die Bewegung der Projection des Bewegten in der Achse der x oder in der Achse der Parabel eine gleichförmig beschleunigte ist. Diese beiden Gleichungen geben dann weiter:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{b^2}{p} t \quad , \quad u_y = \frac{dy}{dt} = b ,$$

und damit:

$$v^2 = b^2 \left(1 + \frac{b^2}{p^2} t^2\right) = b^2 \left(1 + \frac{2x}{p}\right) .$$

Ferner erhält man für die Componenten X und Y die Werthe:

$$X = m \frac{d.u_x}{dt} = m \frac{b^2}{p} \quad , \quad Y = m \frac{d.u_y}{dt} = 0 ,$$

welche zeigen, daß die bewegende Kraft R mit der Componenten X gleichbedeutend ist, daß dieselbe demnach eine unveränderliche Kraft und ihre Richtung fortwährend parallel zur Achse der Parabel ist, und damit für die nach der Tangente gerichtete Kraft T den Ausdruck:

$$T = X \frac{dx}{ds} = m \frac{b^2}{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} ,$$

oder da sich aus der Gleichung der Parabel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \sqrt{\frac{p}{2x}}$$

ergibt, den Werth:

$$T = m \frac{b^2}{p} \sqrt{\frac{2x}{2x+p}} .$$

Man hat aber auch

$$T = m \frac{dv}{dt} = m \frac{b}{p} \frac{d.\sqrt{p^2 + b^2 t^2}}{dt} = m \frac{b}{p} \cdot \frac{b^2 t}{\sqrt{p^2 + b^2 t^2}} ,$$

und demnach mittels des Werthes von x in t, T wie vorher.

Die Krümmung $\varkappa = \frac{1}{\varrho}$ wird für eine ebene Curve nach §. 30 der Einleitung durch

$$\pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

ausgedrückt; zieht man also aus der obigen Gleichung der Parabel oder aus ihrem ersten Aenderungsgesetze das zweite:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d. \sqrt{\frac{p}{2x}}}{dx} = -\sqrt{\frac{p}{8x^3}} ,$$

so findet man nach den nöthigen Reductionen und ohne Rücksicht auf das Qualitätszeichen für die Parabel die Krümmung:

$$\varkappa = \frac{1}{\varrho} = \sqrt{\frac{p}{(p+2x)^3}}$$

und damit und dem Werthe von v^2 den Druck N

$$N = m\frac{v^2}{\varrho} = \frac{mb^2}{p}\sqrt{\frac{p}{2x+p}} .$$

Endlich hat man noch für die bewegende Kraft R die Beziehung:

$$R = \sqrt{T^2 + N^2} ,$$

und mit den gefundenen Werthen folgt

$$R = m\frac{b^2}{p} = X$$

für jeden Punkt der Curve, wie vorher.

Für den Scheitel insbesondere wird

$$T = 0 \quad , \qquad N = R = m\frac{b^2}{p}$$

und in dem Punkte, dessen Coordinaten $x = \frac{1}{2}p$, $y = p$ sind, also im Endpunkte der im Brennpunkte errichteten Ordinate, ist

$$T = \frac{1}{2} m \frac{b^2}{p} \sqrt{2} = N ,$$

was auch leicht so einzusehen ist, da in diesem Punkte die Richtung der Resultirenden R den Winkel zwischen der Tangente und Normale halbirt.

§. 64.

Kommen wir nun wieder zu den allgemeinen Gesetzen der freien Bewegung eines materiellen Punktes zurück, und ersetzen wir nun nach den Ergebnissen der vorhergehenden §§. in den Gleichungen (a) in §. 58 die Kräfte X', Y', Z' durch die Componenten X, Y, Z der bewegenden Kraft R, so erhalten wir die Gleichungen:

$$68.)\quad \begin{cases} m\frac{d.u_x}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} = X \\ m\frac{d.u_y}{dt^2} = m\frac{d^2y}{dt^2} = Y \\ m\frac{d.u_z}{dt^2} = m\frac{d^2z}{dt^2} = Z \end{cases}$$

als die allgemeinen Beziehungen zwischen der Geschwindigkeit des Bewegten oder ihren Componenten, der Lage desselben und der bewegenden Kraft oder ihren rechtwinkligen Componenten am Ende der Zeit t, oder als die allgemeinsten Gleichungen der genannten Bewegung. Die Gleichung (b) oder der Werth von T in §. 60 wird in gleicher Weise, und mit Beachtung der Gleichung (65):

$$69.)\quad T = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} ,$$

und zeigt, daß die Geschwindigkeit bei einer krummlinigen Bewegung sich nach demselben Gesetze ändert, wie bei einer geradlinigen, bei welcher die bewegende Kraft in jedem Augenblicke durch die tangentiale Componente $R \cos \vartheta$ der Kraft R, welche diese krummlinige Bewegung veranlaßt, vorgestellt wird, wobei ϑ den veränderlichen Winkel bezeichnet, den die Richtung dieser Kraft mit der Tangente in dem Punkte xyz der Bahncurve oder am Ende der Zeit t bildet.

Die normale Componente $R \sin \vartheta$ oder N, welche die Aenderung in der Richtung der Bewegung oder die Gestalt der Bahncurve bedingt, ergibt sich nun einfach auf folgende Weise. Sind λ, μ, ν

die Winkel zwischen ihrer Richtung und den drei Achsen, also $N \cos\lambda$, $N \cos\mu$, $N \cos\nu$ ihre rechtwinkligen Seitenkräfte parallel zu diesen Achsen, so wie $T \cos l$, $T \cos m$, $T \cos n$ die entsprechenden Seitenkräfte der Kraft T sind, so hat man nach §. 12

$$\left.\begin{aligned} X &= T\cos l + N\cos\lambda \\ Y &= T\cos m + N\cos\mu \\ Z &= T\cos n + N\cos\nu \end{aligned}\right\} . \qquad (c.$$

Setzt man nun für X, Y, Z zuerst ihre obigen Werthe unter die Form:

$$\left.\begin{aligned} X &= m\frac{d.u_x}{dt} = m\frac{d.v\frac{dx}{ds}}{dt} \\ Y &= m\frac{d.u_y}{dt} = m\frac{d.v\frac{dy}{ds}}{dt} \\ Z &= m\frac{d.u_z}{dt} = m\frac{d.v\frac{dz}{ds}}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (d.$$

und führt dann die angedeuteten Ableitungen aus, wodurch man mit der Beachtung des Werthes: $T = m\frac{dv}{dt}$ die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} X &= m\left\{v\frac{d.\frac{dx}{ds}}{dt} + \frac{dx}{ds}\cdot\frac{dv}{dt}\right\} = mv\frac{d.\frac{dx}{ds}}{dt} + T\frac{dx}{ds} \\ Y &= m\left\{v\frac{d.\frac{dy}{ds}}{dt} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{dv}{dt}\right\} = mv\frac{d.\frac{dy}{ds}}{dt} + T\frac{dy}{ds} \\ Z &= m\left\{v\frac{d.\frac{dz}{ds}}{dt} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{dv}{dt}\right\} = mv\frac{d.\frac{dz}{ds}}{dt} + T\frac{dz}{ds} \end{aligned}\right\}$$

findet, und erinnert sich, daß man hat:

$$\cos l = \frac{dx}{ds}\ , \qquad \cos m = \frac{dy}{ds}\ , \qquad \cos n = \frac{dz}{ds}\ ,$$

2) In den meisten Fällen ist jedoch die Größe und Richtung der bewegenden Kraft gegeben und die Art der Bewegung sowie die Gestalt der von dem Bewegten beschriebenen Bahn zu suchen; dabei muß aber die Lage und Geschwindigkeit des Bewegten in einem bestimmten Augenblicke oder am Anfang der Zeit (die anfängliche Lage und Geschwindigkeit) bekannt oder gegeben sein, wenn die Aufgabe eine bestimmte sein soll.

Ist dann die Kraft constant oder als eine Function der Zeit ausgedrückt, so wird dies auch für ihre Componenten der Fall sein, und die Gleichungen (68) können unmittelbar und einzeln integrirt werden. Dasselbe findet noch statt, wenn die Kraft eine solche Function der drei Coordinaten des Bewegten ist, daß jede der Componenten X, Y, Z nur eine Function von der entsprechenden der Veränderlichen x, y, z wird. In allen diesen Fällen kann man demnach die Bewegung des materiellen Punktes parallel zu einer der Achsen ganz unabhängig von den Bewegungen betrachten, welche er parallel zu den beiden andern Achsen zu haben scheint; seine Bewegung kann auf drei einfache von einander unabhängige geradlinige Bewegungen zurückgeführt, oder in diese gleichsam aufgelöset werden.

Sind dagegen die Componenten X, Y, Z gleichzeitig Functionen der drei Veränderlichen x, y, z, so können die Gleichungen (68) nur in gegenseitiger Verbindung angewendet werden, wie dies schon bei den Gleichungen (69) und (70) der Fall ist. Die Bewegung der Projection des bewegten materiellen Punktes in der Achse der x ist zwar noch immer dieselbe, als wenn an demselben in jedem Augenblicke nur eine der Seitenkraft X gleiche bewegende Kraft thätig, und seine anfängliche Geschwindigkeit die zu dieser Achse parallele Componente der wirklichen anfänglichen Geschwindigkeit gewesen wäre; aber jene Seitenkraft X ändert sich gemäß der Bewegungen der Projectionen in den beiden andern Achsen, und diese Bewegungen können deßhalb nicht mehr unabhängig von einander untersucht werden.

Dasselbe würde, wie leicht zu sehen, auch dann stattfinden, wenn die Resultirende R eine Function der Geschwindigkeit wäre, aber nicht dieselbe Richtung hätte, wie diese. Denn wenn das letztere der Fall ist, so wird die Componente N Null und

$$\varrho = \frac{m v^2}{N} = \infty \quad ,$$

die Bahn des Bewegten also eine gerade Linie, deren Lage durch die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit bedingt ist.

Die Gleichungen (69) und (70) oder die Werthe der Componenten T und N werden indessen mit Vortheil nur dann angewendet, wenn eine Bestimmung über die Lage der Resultirenden in Bezug auf die Tangente getroffen ist, wenn man also aus dem gegebenen Werthe von R unmittelbar auf die Werthe von T und N schließen kann; in allen übrigen Fällen führen sie wegen der verwickelten Beziehungen zwischen den Coordinaten, dem Bogen und dem Krümmungshalbmesser auf sehr zusammengesetzte, schwer zu behandelnde Ausdrücke. Man hat deßhalb aus den obigen Gleichungen andere abgeleitet, welche für besondere Aufgaben leichter zum Ziele führen, welche namentlich bei den in der Natur vorkommenden Bewegungen am meisten Anwendung finden und zugleich wegen der allgemeinen Gesetze, die sie ausdrücken, von Wichtigkeit sind.

§. 66.

Verbindet man nämlich, wie bei der geradlinigen Bewegung (§. 47) die Gleichung (69) mit der Gleichung (65), so ergibt sich:

$$\frac{T}{v} = \frac{m\frac{dv}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = m\frac{dv}{ds}$$

oder:

$$m\frac{v\,dv}{ds} = \frac{1}{2}m\frac{d.v^2}{ds} = T\,,$$

und demnach durch Integration:

$$\Delta.mv^2 = 2\int ds.T = 2\int ds\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right),$$

wo T sowie die Componenten X, Y, Z und die Coordinaten x, y, z als Functionen des Bogens s zu nehmen sind. Ist dann für $t=0$, $s=s_0$, $v=v_0$, so hat man als allgemeines Integral:

$$mv^2 - mv_0^2 = 2\int_{s_0}^{s} ds.T = 2\int_{s_0}^{s} ds\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right).$$

Diesem Ausdrucke kann man noch eine einfachere Form geben, wenn man, wie bei den virtuellen Geschwindigkeiten, die Projection des kleinen Bogens Δs, den der Bewegte in der kleinen Zeit Δt beschreibt, oder seiner Sehne Δw auf die Richtung der Kraft R in dem Punkte xyz

mit Δr bezeichnet; nimmt man nämlich das Verhältniß dieses Bogens Δs zu dem Producte aus der Kraft R in ihren Weg Δr, so wird wie in §. 34 (31):

$$\text{Anf}: \frac{R \Delta r}{\Delta s} = R \frac{dr}{ds} = X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} = T ,$$

also auch

71.) $$m v^2 - m v_0^2 = 2 \int_{s_0}^{s} ds . R \frac{dr}{ds} .$$

Um dieses Gesetz in Worte einzukleiden, nennt man einmal, wie schon früher in §. 46 bemerkt wurde, das Product mv^2 die lebendige Kraft des Bewegten, und das Product $R \Delta r$ aus der Intensität der Kraft in die Projection Δr des kleinen Bogens Δs auf die Richtung derselben, oder das Product aus der Kraft in ihren Weg, das ähnliche Product also, welches wir bei der Lehre vom Gleichgewicht virtuelles Moment der Kraft genannt haben, heißt nun Arbeitsänderung der Kraft R; das Product $R \frac{dr}{ds}$ ist demnach das Aenderungsgesetz dieser Arbeit in Bezug auf die Aenderung des Bogens s, und das Integral:

$$\int_{s_0}^{s} ds . R \frac{dr}{ds}$$

drückt die ganze Arbeit der Kraft in der Zeit t oder für den Bogen $s - s_0$ aus. Man kann damit das in der obigen Gleichung enthaltene Gesetz so aussprechen:

Die Zunahme des Bewegten an lebendiger Kraft ist für eine gegebene Zeit gleich der doppelten Arbeit der bewegenden Kraft in dieser Zeit.

Es ist schon darauf aufmerksam gemacht worden, daß wir in dem obigen Ausdrucke ähnlichen Größen und Verhältnissen begegnen, welche wir bei dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten angewendet haben; es muß daher noch auf den Unterschied hingedeutet werden, welcher zwischen beiden Betrachtungen und in Folge dessen in der Bezeichnung stattfindet. Bei der Betrachtung der virtuellen Geschwindigkeiten ist Δs der beliebige Weg, welchen der freie materielle Punkt vermöge irgend einer kleinen Kraft, die man an ihm angreifen läßt, in der kleinen Zeit Δt beschreibt, oder den man ihr in Gedanken kann beschreiben lassen,

weßhalb denn auch der Anfangswerth des Verhältnisses von Δs zu $P\Delta p$ durch das Zeichen δ angedeutet wurde, während in dem Falle, der uns jetzt beschäftigt, Δs der eine bestimmte Weg ist, den der materielle Punkt vermöge der an ihm angreifenden Kräfte in der kleinen Zeit Δt zurücklegen muß und wirklich zurücklegt, und man wird nach dem Vorhergehenden einsehen, daß jenes Prinzip nur mit andern Worten sagt, im Fall des Gleichgewichtes sei die Arbeitsänderung der an einem Punkte angreifenden Kräfte für jede Ortsveränderung desselben Null, oder müsse Null sein. Im Uebrigen finden aber, wie schon bemerkt, zwischen den Componenten und ihrer Resultirenden und der Arbeitsänderung für eine jede dieselben Beziehungen statt, wie bei den virtuellen Momenten; denn wir werden nach unserer jetzigen Vorstellung die Producte $X\Delta x$, $Y\Delta y$, $Z\Delta z$ ebenso als Arbeitsänderung der Componenten X, Y, Z erklären, wie wir das Product $R\Delta r$ Arbeitsänderung der Resultirenden genannt haben. Wir können daher sagen:

Das Aenderungsgesetz der Arbeit der Resultirenden ist dem Aenderungsgesetze für die Summe der Arbeiten aller Kräfte gleich,

und werden daraus den Schluß ziehen, daß sich die Aenderungsgesetze der Arbeiten der Kräfte auf dieselbe Weise zerlegen und zusammensetzen lassen, wie diese Kräfte selbst.

§. 67.

Nehmen wir in dem obigen Ausdrucke R als eine unveränderliche Kraft an und setzen auch ihre Richtung als beständig voraus, so daß $\frac{dr}{ds}$ nur eine Function von s wird, wie dies z. B. der Fall ist, wenn R das Gewicht des materiellen Punktes vorstellt, so haben wir

$$mv^2 - mv_0^2 = 2R(r - r_0)\;; \qquad (72.$$

die Arbeit der Kraft wird also in diesem Falle einfach durch das Product aus der Kraft in die Projection des von dem Bewegten zurückgelegten Weges auf ihre Richtung ausgedrückt.

So haben wir in dem in §. 63 ausgeführten Beispiele der Bewegung in einer Parabel für die lebendige Kraft des Bewegten am Ende der Zeit t den Werth:

$$mv^2 = ma^2 + 2ma^2\frac{x}{p}$$

gefunden, und für die Intensität der bewegenden Kraft, welche constant und immer parallel zur Achse der Parabel gerichtet war,

$$R = m \frac{a^2}{p} .$$

Am Anfang der Zeit oder im Scheitel der Parabel war aber die Geschwindigkeit des Bewegten a, es war demnach der Zuwachs an lebendiger Kraft

$$mv^2 - ma^2 = 2m \frac{a^2}{p} x$$

folglich derselbe, als wenn sich der materielle Punkt längs der Achse der Parabel, der Achse der x, im Sinne der Kraft bewegt hätte; denn die Arbeit wächst, wie man sieht, in diesem Falle nur mit der Abscisse x, d. i. mit der Projection des von dem Bewegten beschriebenen Bogens auf die Richtung der Kraft.

Der vorhergehende Ausdruck (72) für eine constante Kraft mit unveränderlicher Richtung wird uns dazu dienen, die Arbeit irgend einer Kraft mit der Arbeit eines Gewichtes zu vergleichen, und zwar in ähnlicher Weise, wie wir das Maaß der fördernden Kräfte durch die Betrachtung der durch eine beständige Kraft erzeugten Bewegung und ihre Beschleunigung festgestellt haben.

Zuvor will ich jedoch den Begriff, der mit der Bezeichnung: Arbeit zu verbinden ist, näher erläutern.

Wenn eine Kraft an einem materiellen Punkte angreift, aber durch irgend eine Ursache verhindert wird, diesen Punkt in ihrem Sinne in Bewegung zu setzen, oder genauer und allgemeiner ausgedrückt, etwas zur Aenderung seiner Geschwindigkeit beizutragen, so leistet sie in Wirklichkeit Nichts, oder doch nichts Wahrnehmbares, d. i. keine Arbeit, ihr Bestreben, den Punkt zu bewegen, kann nicht unmittelbar wahrgenommen werden, und bringt nur einen Druck hervor, ohne dadurch den örtlichen Zustand des materiellen Punktes im geringsten zu ändern *). Ein Gewicht z. B., das auf einer festen wagrechten Ebene liegt, wird so lange diese Ebene seinem Drucke widersteht, ganz wirkungslos erscheinen; seine Wirkung wird sich erst äußern, wenn die Ebene nachgibt, und das Gewicht in Bewegung kommt. Die Kraft muß also, um

*) Man hat sonst auch eine solche unwahrnehmbare Wirkung im Gegensatze zur wahrnehmbaren oder zur lebendigen Kraft, welche mit Arbeit homogen ist, eine todte Kraft genannt.

eine Arbeit zu verrichten, einen Weg machen, d. h. ihr Angriffspunkt muß sich so bewegen, daß die Projection seines Weges auf die Richtung der Kraft nicht Null ist, oder daß der Anfangswerth des Verhältnisses zwischen dem wirklichen Wege und seiner Projection auf die Richtung der Kraft nicht Null ist. Dies wäre z. B. der Fall, wenn sich ein schwerer materieller Punkt auf einer festen wagrechten Ebene bewegt, in Beziehung auf sein Gewicht, und es ist leicht zu sehen, daß diese Bewegung dieselbe sein wird, als wenn der materielle Punkt nicht schwer wäre *); sein Gewicht leistet folglich keine Arbeit.

Wir verstehen demnach unter Arbeit die Wirkung, welche eine Kraft hervorbringt, während sie einen gewissen Weg macht, und nach dem Vorhergehenden wird es nun einleuchten, daß die Arbeit einer constanten Kraft von unveränderlicher Richtung nur nach ihrem Wege oder nach der Projection des von ihrem Angriffspunkte beschriebenen Weges auf ihre Richtung bemessen werden kann, wie dies auch aus der Gleichung (72) hervorgeht. Es müssen aber bei gleichen Wegen die Arbeiten zweier solchen Kräfte sich auch wie diese Kräfte selbst verhalten, und demnach allgemeiner die Arbeiten zweier constanten Kräfte von unveränderlicher Richtung in demselben Verhältnisse stehen, wie die Producte aus der Intensität der Kräfte in ihre Wege. Bezeichnen demnach A und $A_{,}$ die Arbeiten der Kräfte P und $P_{,}$ für die Wege l und $l_{,}$, so hat man

$$A : A_{,} = Pl : P_{,}l_{,} ,$$

wobei es gleichgültig ist, ob diese Wege oder jene Arbeiten in gleichen oder verschiedenen Zeiten gemacht oder geleistet worden **).

Nehmen wir daher diejenige Arbeit $A_{,}$ als Einheit für die Arbeit, als Arbeits-Einheit an, welche von der Einheit der Kraft geleistet wird, wenn sie die Einheit des Weges macht, so haben wir zugleich

$$A_{,} = 1 , \quad P_{,} = 1 , \quad l_{,} = 1$$

*) Wenn zwischen dem materiellen Punkte und der Ebene Reibung stattfindet, so ist diese wohl eine Folge seines Gewichtes oder vielmehr des Druckes auf die Ebene; man nimmt aber in der Vorstellung von dem Gewichte gänzlich Umgang, und bringt die Reibung als eine unabhängige constante Kraft in Rechnung.

**) Soll indessen die Intensität einer Kraft nach einer von ihr geleisteten Arbeit beurtheilt werden, so muß allerdings gefragt werden, in welcher Zeit diese Arbeit geleistet wurde, und welche Arbeit demnach von ihr in der Einheit der Zeit geleistet wird.

und demnach

$$A = Pl$$

als Maaß für die von einer Kraft P, welche in der Zeit t den Weg l macht, in dieser Zeit geleistete Arbeit. Nach unserm Maaßsystem, in welchem das Kilogramm die Einheit für die Kraft, der Meter die Einheit für die Länge ist, wird daher die Arbeits-Einheit diejenige sein, welche ein Kilogramm leistet, das in lothrechter Richtung 1 Meter zurücklegt. Wir wollen diese Arbeit ein Meterkilogramm nennen, und demgemäß unter jeder andern Arbeit, also unter jedem Producte Pl eine gewisse Anzahl Meterkilogramm verstehen.

Hinsichtlich der Homogeneität ist dann noch zu bemerken, daß die Arbeit jedem Producte aus Kraft und Länge, also auch mit jedem Producte aus Masse in Geschwindigkeit und Länge, oder aus Masse und Fläche, oder aus Masse und Quadrat der Geschwindigkeit (lebendiger Kraft), u. s. w. homogen ist, übereinstimmend mit der Gleichung (72).

§. 68.

Es wäre nun nachzuweisen, daß nach den vorhergehenden Bestimmungen über das Maaß der Arbeit einer Kraft von unveränderlicher Intensität und Richtung, das Aenderungsgesetz für die Arbeit einer der Stärke und Richtung nach veränderlichen Kraft in Bezug auf die Aenderung des von ihrem Angriffspunkte beschriebenen Bogens durch

$$R \frac{dr}{ds}$$

ausgedrückt wird; dieser Nachweis kann sehr leicht auf dieselbe Weise geführt werden, wie bei der geradlinigen Bewegung das Maaß einer veränderlichen Kraft aus dem einer nicht veränderlichen abgeleitet wurde, und mit Hülfe des bei dem Beweise des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten angewendeten Verfahrens.

Man kann sich die Sache aber viel einfacher darstellen, wenn man von der Aenderung in der Richtung der Kraft Umgang nimmt; denn es ist einleuchtend, daß diese Aenderung auf das Aenderungsgesetz der Arbeit keinen Einfluß haben kann, da dieses nur für einen bestimmten Augenblick oder nur für eine bestimmte Lage des Bewegten, also auch nur für eine bestimmte Richtung der Kraft gilt. Derselbe Schluß könnte offenbar auch in Bezug auf die Intensität der Kraft R gemacht werden; es läßt sich diese indessen einfach genug im Zusammenhange mit

ihrem Weg betrachten. — Lassen wir nämlich den Bogen s, an dessen Endpunkt M der Bewegte am Ende der Zeit t angekommen ist, durch dessen fernere Bewegung während der kleinen Zeit $\varDelta t$ um $\varDelta s$ wachsen, und bezeichnen wir die Projection dieses kleinen Bogens auf die Richtung der Kraft R im Punkte M mit $\varDelta r$, so wird die Aenderung $\varDelta A$ der Arbeit A während dieser Zeit $\varDelta t$, während welcher die Kraft R auch um $\varDelta R$ zugenommen hat, offenbar größer sein, als $R \varDelta r$ und kleiner als $(R+\varDelta R)\varDelta r$; man hat daher wieder, wenn α einen ächten Bruch bezeichnet, die Gleichung:

$$\varDelta A = (R + \alpha \varDelta R) \varDelta r$$

und die Verhältnisse:

$$\frac{\varDelta A}{\varDelta s} = (R + \alpha \varDelta R) \frac{\varDelta r}{\varDelta s},$$

wodurch sich in dem Punkte M oder xyz, wo $\varDelta R$ Null wird und die Verhältnisse: $\frac{\varDelta A}{\varDelta s}$, $\frac{\varDelta r}{\varDelta s}$ ihre Anfangswerthe: $\frac{dA}{ds}$, $\frac{dr}{ds}$ erhalten, das Aenderungsgesetz:

$$\frac{dA}{ds} = R \frac{dr}{ds},$$

ergibt, worin A, R und r als Functionen von s zu betrachten sind.

§. 69.

An dieses Aenderungsgesetz und die Gleichung (71) knüpfen sich nun folgende einfache Schlüsse:

Ist der Ausdruck $R \frac{dr}{ds}$ Null, so kann entweder R oder $\frac{dr}{ds}$ Null sein; im ersten Falle halten sich die Kräfte an dem Bewegten das Gleichgewicht, im zweiten ist, wie in §. 34 gezeigt wurde, die Richtung der Resultirenden senkrecht zur Richtung der Bewegung. Soll dann die Voraussetzung: $R \frac{dr}{ds} = 0$ für die ganze Bewegung oder für jeden Werth von t stattfinden, so erhalten wir durch die Gleichung (71)

$$mv^2 - mv_0^2 = 0 \quad , \quad v = v_0 ,$$

und demnach jedenfalls eine gleichförmige Bewegung, und zwar entweder eine geradlinige gleichförmige, für welche $R = 0$ ist, oder eine krummlinige gleichförmige, für welche $\frac{dr}{ds} = 0$ sein muß, bei welcher also

die Richtung der Kraft fortwährend senkrecht zur Richtung der Bewegung bleibt. Die Kraft wird daher in diesem Falle mit ihrer Componenten N gleichbedeutend, und ihre Intensität nach (70) der Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ der Bahncurve proportional sein. Der einfachste Fall einer solchen Bewegung ist die oben schon betrachtete gleichförmige Bewegung im Kreise, und wir schließen aus dem Vorhergehenden weiter, daß die bloße Aenderung der Richtung einer Bewegung keine Arbeit ist, sondern nur ein Druck, übereinstimmend mit der in §. 62 ausgesprochenen Ansicht. In der That kann man auch bei der ebengenannten Bewegung im Kreise, ohne sie zu ändern, die Kraft durch einen Faden von unveränderlicher Länge ersetzt denken, mittels dessen der Bewegte mit dem festen Mittelpunkte der Bewegung verbunden ist, was nie bei einer arbeitenden Kraft geschehen kann. Bei der gleichförmigen Bewegung in andern krummen Linien müßte der Faden, der die Kraft ersetzt, in jedem Augenblicke die Länge des entsprechenden Krümmungshalbmessers haben; er müßte sich also an die feste Evolute der zu beschreibenden Bahn anlegen und bei der Bewegung von ihr abwickeln.

Wenn das Aenderungsgesetz $R\frac{dr}{ds}$ nur in bestimmten Punkten der Bahn Null wird, in welchen dann wie vorher die Resultirende entweder Null oder senkrecht zur Bewegung gerichtet ist, so gibt die Gleichung (71) für diese Punkte die abgeleitete:

$$m\frac{d.v^2}{ds} = R\frac{dr}{ds} = 0 \ ,$$

und diese drückt wie man weiß auch die Bedingung aus, daß in den betreffenden Punkten die lebendige Kraft einen größten oder kleinsten Werth hat. Sollte sich aber der Bewegte mit der Geschwindigkeit Null von einem solchen Punkte aus zu bewegen anfangen, so würde er im Falle, daß $R = 0$ ist, an diesem Orte in Ruhe bleiben, im zweiten Falle dagegen, nämlich wenn $\frac{dr}{ds} = 0$ wäre, unmittelbar der Richtung der Kraft folgen.

Findet man endlich für einen bestimmten Punkt der Bahncurve den Ausdruck:

$$\int_{s_0}^{s} ds.R\frac{dr}{ds} = 0 \ ,$$

so hat man für diesen Punkt

$$m v^2 - m v_0^2 = 0 \quad , \qquad v = v_0 \ ,$$

und der Bewegte besitzt seine anfängliche Geschwindigkeit wieder; die bewegende Kraft hat folglich in der Zwischenzeit ihre eigene Arbeit durch Gegenwirkung wieder verzehrt, oder gleiche und entgegengesetzte Arbeiten geliefert.

§. 70.

Der zuletzt berührte Fall gehört indessen einem viel allgemeineren Gesetze an, welches in der Gleichung (71) enthalten ist.

Sind nämlich die Componenten X, Y, Z solche Functionen der Coordinaten x, y, z, daß der Ausdruck:

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds}$$

das vollständige Aenderungsgesetz einer Function jener drei Veränderlichen darstellt, daß man also hat:

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} = \frac{d \, . \, F(x, y, z)}{ds} \ ,$$

wo $F(x, y, z)$ eine beliebige Function der Veränderlichen x, y, z bezeichnet, so gibt die Gleichung (71) den Ausdruck:

$$m v^2 - m v_0^2 = 2 F(x, y, z) - 2 F(x_0, y_0, z_0) \ , \qquad (73.$$

in welchem x_0, y_0, z_0 die Werthe der Coordinaten x, y, z am Anfange der Zeit vorstellen, und aus welchem man schließt, daß unter der gemachten Voraussetzung die lebendige Kraft, also auch die Geschwindigkeit des Bewegten immer wieder dieselbe wird, so oft die Function $F(x, y, z)$ dieselben Werthe wieder erhält, daß demnach die lebendige Kraft nur von der Lage des Bewegten am Ende der Zeit, und nicht von dem Wege abhängt, den er seit dem Anfang der Zeit zurückgelegt hat. — Man hat diesem Satze den Namen: Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft gegeben.

Die diesem Princip zu Grunde liegende Voraussetzung findet wirklich statt in allen Fällen, wo nur solche Kräfte an dem Bewegten angreifen, deren Richtungen in jeder Lage desselben durch feste Punkte gehen, und deren Intensität eine Function der Entfernung des Bewegten von dem entsprechenden festen Punkte ist.

Um dies zu beweisen, seien a, b, c die Coordinaten des ersten dieser festen Punkte, durch welchen die Richtung der Kraft R in jeder

Lage des Bewegten geht; die Entfernung r des letztern von jenem festen Punkte wird an einem Orte, dessen Coordinaten x, y, z sind, durch die Gleichung:

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

ausgedrückt, und die zu den Coordinaten=Achsen parallelen Componenten der Kraft R sind:

$$\mp R\frac{x-a}{r}\,,\qquad \mp R\frac{y-b}{r}\,,\qquad \mp R\frac{z-c}{r}\,,$$

wo gleichzeitig entweder die obern oder die untern Zeichen genommen werden, je nachdem die Kraft R ihren Angriffspunkt dem festen Punkte nähern oder ihn davon entfernen will. Der Theil des Ausdruckes:

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\,,$$

welcher von der Kraft R herrührt, wird demnach

$$\mp\frac{R}{r}\left[(x-a)\frac{dx}{ds} + (y-b)\frac{dy}{ds} + (z-c)\frac{dz}{ds}\right],$$

und da aus dem obigen Werthe von r^2 das Aenderungsgesetz:

$$r\frac{dr}{ds} = (x-a)\frac{dx}{ds} + (y-b)\frac{dy}{ds} + (z-c)\frac{dz}{ds}$$

folgt, so nimmt derselbe die Form:

$$\mp R\frac{dr}{ds}$$

an, welche sogleich zeigt, daß wenn R, wie oben vorausgesetzt wurde, nur eine Function von r ist, das Integral:

$$\mp\int_{s_0}^{s} ds.R\frac{dr}{ds} \quad \text{in} \quad \mp\int_{r_0}^{r} dr.R$$

übergeht, wenn man r selbst als unabhängige Veränderliche nimmt, und daß es folglich das Integral einer Function von einer einzigen Veränderlichen wird.

Für die übrigen Kräfte R′, R″, etc. erhält man natürlich Integrale von ähnlicher Form, und die Gleichung (71) wird damit

$$m v^2 - m v_0^2 = \mp 2 \int_{r_0}^{r} dr . R \mp 2 \int_{r'_0}^{r'} dr' . R' \mp 2 \int_{r''_0}^{r''} dr'' . R'' \mp \text{etc.}$$

oder einfacher:

$$m v^2 - m v_0^2 = 2 \Sigma . \int_{r_0}^{r} dr . R \, , \qquad (74.$$

worin nun die Kräfte, welche ihren Angriffspunkt von dem entsprechenden festen Punkte entfernen, oder die Entfernung r vergrößern wollen, als positive, diejenigen dagegen, welche den Abstand r zu vermindern streben, als negative Größen eingeführt werden müssen.

Daß übrigens auch die Fälle hieher gehören, bei welchen die Kraft eine unveränderliche Intensität und Richtung hat, wird von selbst einleuchten.

§. 71.

Die zweite der erwähnten allgemeinen Gleichungen, welche sich durch die Verbindung der Gleichungen (68) ergeben, erhält man einfach auf folgendem Wege.

Man multiplicirt die erste jener Gleichungen (68) mit y, die zweite mit x, und zieht das erste Product vom zweiten ab; dann nimmt man die Differenz zwischen der ersten, nachdem sie mit z, und der dritten, nachdem diese mit x multiplicirt worden ist; ebenso verfährt man mit der dritten und zweiten, von denen man die erstere mit y, die letztere mit z multiplicirt, und gelangt so zu den ganz allgemeinen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= Yx - Xy \, , \\ m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= Xz - Zx \, , \\ m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= Zy - Yz \, . \end{aligned}\right\} \qquad (75.$$

Die Bedeutung dieser Gleichungen kann erst später klar dargelegt werden, was im zweiten Buche bei der Bewegung eines festen Systems geschehen soll; für jetzt möge es genügen anzudeuten, daß die obigen Gleichungen die Bewegung des materiellen Punktes hauptsächlich insoferne darstellen, als sie um den Anfangspunkt der Coordinaten

stattfindet, also insoferne, als sie wie eine drehende Bewegung anzusehen ist. Ferner kann bemerkt werden, daß in einer jeden dieser Gleichungen ohne die Zeit nur zwei Veränderliche vorkommen, und daß deßhalb in ähnlicher Weise, wie die Gleichungen (68) einzeln die Bewegungen der Projectionen des Bewegten in den drei Coordinaten-Achsen vorstellen, durch die Gleichungen (75) die Gesetze der Bewegung für die drei Projectionen des Bewegten in den drei Coordinaten-Ebenen ausgedrückt werden, so daß durch sie die Bewegung in einer beliebigen krummen Linie auf die Bewegung in drei ebenen Curven, welche offenbar die Projectionen der Bahn des Bewegten in den drei Coordinaten-Ebenen sind, zurückgeführt oder gleichsam zerlegt wird.

Eine jede der vorhergehenden Gleichungen stellt also die Bewegung der Projection des Bewegten in den betreffenden Coordinaten-Ebenen um den Anfangspunkt vor, weßhalb sie denn auch eine einfachere Form annehmen, wenn man auf der linken Seite derselben Polarcoordinaten statt der rechtwinkligen einführt. Bezeichnet man nämlich die Länge des Fahrstrahls in der Ebene der xy, d. h. die Projection des Fahrstrahles r im Raume auf diese Ebene, mit r_1, die in den beiden andern Coordinaten-Ebenen ebenso mit r_2, r_3, ferner den Winkel, welchen der Fahrstrahl r_1 in der Ebene der xy mit der Achse der x bildet, durch ω_1, den, welchen r_2 in der Ebene der xz mit der Achse der z bildet, durch ω_2, endlich den, welchen r_3 in der Ebene der yz mit der Achse der y einschließt, durch ω_3, so daß alle diese Winkel positiv sind, wenn die Bewegung in der entsprechenden Ebene von der darauf senkrecht stehenden positiven Achse angesehen, von der Linken gegen die Rechte, oder bestimmter, in dem Sinne, wie sich der Zeiger einer Uhr bewegt, vor sich geht: mit diesen Bezeichnungen erhält man in der Ebene der xy zwischen den gewöhnlichen und den Polar-Coordinaten die Beziehung (Einleitung §. 11):

$$\frac{y}{x} = \text{tang}\,\omega_1 \quad , \qquad x = r_1 \cos \omega_1 \ ,$$

und damit durch die erste und zweite Ableitung:

$$x^2 \frac{d.\frac{y}{x}}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r_1^2 \frac{d\omega}{dt} \ ,$$

$$\frac{d.\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d.\,r_1^2\frac{d\omega_1}{dt}}{dt} \ ,$$

Aehnliche Ausdrücke geben die Beziehungen:

$$\frac{x}{z} = \text{tang}\,\omega_2 \quad , \qquad \frac{z}{y} = \text{tang}\,\omega_3 \ ,$$

$$z = r_2 \cos\omega_2 \quad , \qquad y = r_3 \cos\omega_3 \ ,$$

in den Ebenen der xz und der yz, wobei zwischen den Winkeln ω_1, ω_2, ω_3 und den Winkeln ω und ϑ, durch welche die Lage des Fahrstrahls im Raume bestimmt wird, die Beziehungen:

$$\text{tang}\,\omega_1 = \text{tang}\,\omega \ , \quad \text{tang}\,\omega_2 = \text{tang}\,\vartheta \cos\omega \ , \quad \text{cotg.}\,\omega_3 = \text{tang}\,\vartheta \sin\omega \ ,$$

und zwischen diesem Fahrstrahl und seinen Projectionen die Gleichungen:

$$r_1 = r \sin\vartheta \ , \quad r_2 = \sqrt{1 - \sin^2\vartheta \sin^2\omega} \ , \quad r_3 = r\sqrt{1 - \sin^2\vartheta \cos^2\omega}$$

stattfinden. Die Gleichungen (75) nehmen damit die Form an:

$$\left.\begin{aligned}
m\,\frac{d.\,r_1^2 \frac{d\omega_1}{dt}}{dt} &= Yx - Xy \ , \\
m\,\frac{d.\,r_2^2 \frac{d\omega_2}{dt}}{dt} &= Xz - Zx \ , \\
m\,\frac{d.\,r_3^2 \frac{d\omega_3}{dt}}{dt} &= Zy - Yz \ ,
\end{aligned}\right\} \qquad (76.$$

unter welcher wir später bei der Untersuchung der Bewegung eines festen Systems um eine feste Achse Anwendung von ihnen machen werden.

Hier wollen wir ihre Anwendung nur für den zwar nicht ganz allgemeinen, aber sehr ausgedehnten Fall betrachten, wo die rechte Seite derselben Null wird.

Diese Voraussetzung wird stattfinden, einmal, wenn die Resultirende aller Kräfte fortwährend Null ist, diese also sich in jeder Lage des Bewegten das Gleichgewicht halten, und zweitens, wenn die Resultirende immer gegen den Anfangspunkt der Coordinaten gerichtet ist. Denn in diesem Falle fällt die Richtung der Resultirenden R mit der des Fahrstrahles r zusammen, und bildet folglich mit ihren Componenten X, Y, Z dieselben Winkel, als jene mit den entsprechenden Coordinaten-Achsen oder mit ihren Projectionen x, y, z in denselben: es stehen demnach auch die Componenten X, Y, Z in demselben Verhältnisse zu ihrer

Resultirenden, wie die parallelen Coordinaten des Bewegten zu dem Fahrstrahl r, und man hat:

$$\frac{X}{R} = \frac{x}{r} \quad , \quad \frac{Y}{R} = \frac{y}{r} \quad , \quad \frac{Z}{R} = \frac{z}{r}$$

oder daraus

$$\frac{R}{r} = \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} \, ,$$

also auch

$$Yx - Xy = 0 \quad , \quad Xz - Zx = 0 \quad , \quad Zy - Yz = 0$$

wie behauptet wurde.

Mit diesen Werthen gehen denn die Gleichungen (76) durch Integration in folgende über:

77.) $r_1^2 \frac{d\omega_1}{dt} - C_1 = 0$, $r_2^2 \frac{d\omega_2}{dt} - C_2 = 0$, $r_3^2 \frac{d\omega_3}{dt} - C_3 = 0$,

worin die constanten Größen C_1, C_2, C_3 die anfänglichen Werthe der veränderlichen Producte: $r_1^2 \frac{d\omega_1}{dt}$, etc. vertreten, und mit Beachtung der oben aufgeführten Beziehungen zwischen den Polar-Coordinaten und den rechtwinklichen findet man daraus für die letztern die Gleichungen:

78.)
$$\left\{ \begin{aligned} x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} &= C_1 \\ z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} &= C_2 \\ y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} &= C_3 \, . \end{aligned} \right.$$

Multiplicirt man dann diese drei Gleichungen der Reihe nach mit z, y und x, so gibt ihre Summe zwischen den Coordinaten x, y, z des Bewegten in irgend einem Augenblicke die Gleichung:

79.) $$C_1 z + C_2 y + C_3 x = 0 \; ,$$

und zeigt in dieser Form, welche die Gleichung einer durch den Anfangspunkt gehenden Ebene vorstellt, daß die Bewegung immer in einer Ebene vor sich geht, deren Lage durch die Constanten C_1, C_2, C_3 und durch den Anfangspunkt bestimmt ist. Offenbar muß diese Lage auch durch die anfängliche Richtung der Kraft und der Geschwindigkeit bestimmt sein, und da die erstere immer durch den Anfangspunkt geht,

also immer in jener Ebene liegt, so ist in der That kein Grund denkbar, weßhalb der materielle Punkt diese Ebene verlassen sollte.

§. 72.

Untersuchen wir nun, welche Bedeutung den Constanten C_1, C_2, C_3 unterlegt, und wie darnach das Gesetz der Bewegung in jener Ebene ausgesprochen werden kann.

Bezeichnet man die Oberfläche des Sectors BAM, Fig. 62, welcher durch den Fahrstrahl r_1 in der Ebene der xy vom Anfang der Zeit an beschrieben wurde, mit O_1, so hat man als Aenderungsgesetz derselben in Bezug auf die Aenderung des Winkels ω_1, wie man sich in §. 42 des 2ten Buches überzeugen kann,

$$\frac{d\,O_1}{d\,\omega_1} = \frac{1}{2}\,r_1^2$$

und demnach als Aenderungsgesetz in Bezug auf die Zeit

$$\frac{d\,O_1}{d\,t} = \frac{1}{2}\,r_1^2\,\frac{d\,\omega_1}{d\,t},$$

und in ähnlicher Weise ergeben sich für die beiden andern Coordinaten-Ebenen die Aenderungsgesetze:

$$\frac{d\,O_2}{dt} = \frac{1}{2}\,r_2^2\,\frac{d\,\omega_2}{dt}, \qquad \frac{d\,O_3}{dt} = \frac{1}{2}\,r_3^2\,\frac{d\,\omega_3}{dt},$$

indem man die Oberflächen der entsprechenden Sectoren DAM_2 und CAM_3 mit O_2 und O_3 bezeichnet. Die Gleichungen (77) werden damit umgewandelt in:

$$\frac{d\,O_1}{dt} = \frac{1}{2}\,C_1, \qquad \frac{d\,O_2}{dt} = \frac{1}{2}\,C_2, \qquad \frac{d\,O_3}{dt} = \frac{1}{2}\,C_3$$

und geben durch Integration die einfachen Gesetze:

$$O_1 = \frac{1}{2}\,C_1\,t, \qquad O_2 = \frac{1}{2}\,C_2\,t, \qquad O_3 = \frac{1}{2}\,C_3\,t. \quad (80.$$

Die Constante C_1 drückt demnach die doppelte Oberfläche des Sectors BAb aus, der von dem Fahrstrahl r_1 in der Ebene der xy in der Einheit der Zeit beschrieben wird, und die beiden andern Constanten C_2 und C_3 haben gleiche Bedeutung für die Bewegungen in den Ebenen der xz und der yz; das durch die vorhergehenden Gleichungen ausgedrückte Gesetz der Bewegung läßt sich darnach so aussprechen:

Der materielle Punkt bewegt sich so, daß die Projectionen seines Fahrstrahles r in den drei Coordinaten-Ebenen Sectoren beschreiben, deren Oberflächen der Zeit proportional sind.

Bezeichnet man ferner die Oberfläche des Sectors DAM, der von dem Fahrstrahl r vom Anfang der Zeit an in der Ebene der Bewegung selbst beschrieben wird, mit O, so hat man nach der Lehre von den Projectionen der Flächen

$$O^2 = O_1^2 + O_2^2 + O_3^2 ,$$

und demnach mittels der Gleichungen (80)

$$O = \frac{1}{2}\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}\,.\,t ;$$

das oben für die Projectionen des Fahrstrahles r ausgesprochene Gesetz findet also auch in der Ebene der Bewegung selbst statt, wie dies übrigens auch einfach daraus geschlossen werden kann, daß wenn man die Ebene der xy mit der Ebene der Bewegung zusammenfallen läßt, oder was auf dasselbe hinauskommt, diese letztere sogleich als Ebene der xy annimmt, die erste der Gleichungen (77), (78) oder (80) die einzige Gleichung der Bewegung ist, da die andern wegen $r_2 = 0$, $r_3 = 0$ wegfallen. Man hat demnach in der Ebene der Bewegung selbst einfach

81.) $$O = \frac{1}{2} C t ,$$

indem man nun mit C die doppelte Oberfläche $\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}$ des in der Zeit-Einheit beschriebenen Sectors bezeichnet.

Ist z. B. BC, Fig. 63, die Bahn des Bewegten und deren Ebene nun die Ebene der xy, und läßt man die Zeit von dem Augenblicke anfangen, in welchem der Bewegte die Achse der x in B schneidet, so wird derselbe in den aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten solche Bogen Bm_1, m_1m_2, m_2m_3, etc. zurücklegen, daß die Sectoren BAm_1, m_1Am_2, m_2Am_3, etc. gleiche Oberflächen haben, daß also die ganzen Sectoren BAm, BAm_2, BAm_3, etc. der Zeit proportional sind, und $\frac{1}{2}C$ wird das Maaß der Oberfläche von einem jeden der kleinen Sectoren sein.

Umgekehrt läßt sich leicht schließen, daß wenn die oben ausgesprochene Bedingung für die Bewegung eines materiellen Punktes erfüllt ist, wenn der Fahrstrahl desselben ebene Sectoren beschreibt, deren

Oberflächen der Zeit proportional sind, die Richtung der bewegenden Kraft immer durch den Anfangspunkt geht, oder die Kraft selbst Null ist. Denn diese Bedingung führt nothwendig auf die Gleichungen (80), und durch deren erstes Aenderungsgesetz in Bezug auf die Zeit, auf die Gleichungen (77) zurück, und wenn man die Abgeleiteten dieser letztern in die Gleichungen (76) einführt, so findet man die Bedingungsgleichungen:

$$Yx - Xy = 0 \quad , \qquad Xz - Zx = 0 \quad , \qquad Zy - Yz = 0$$

wieder, welche der ausgesprochenen Behauptung gemäß nur befriedigt werden können, wenn entweder $X = Y = Z = R = 0$ ist, oder wenn die Richtung der Resultirenden R für jede Lage des Bewegten durch den Anfangspunkt geht.

Der besondere Fall: $R = 0$ gehört übrigens, wie wir wissen, nur der gleichförmigen geradlinigen Bewegung an, und daß bei dieser der Fahrstrahl in der That Dreiecke beschreibt, deren Oberfläche der Zeit proportional ist, wird der Anblick der Figur 64 einleuchtend machen.

Das vorhergehende Gesetz der Bewegung wird gewöhnlich Princip von der Einhaltung der Oberflächen genannt.

§. 73.

Der constanten Größe C oder dem Ausdrucke $r^2 \dfrac{d\omega}{dt}$ kann aber noch eine andere Bedeutung unterlegt werden, welche in engerer Beziehung zu der Natur der Bewegung steht, als die vorhergehende geometrische Vorstellung, indem sie unmittelbar die nothwendigen Gegebenen ausdrückt, und die uns Gelegenheit gibt, uns mit einem neuen Begriffe bekannt zu machen, den wir in der Folge häufig anwenden werden.

Um dazu zu gelangen, betrachten wir noch einmal die gleichförmige Bewegung im Kreise, bei welcher die Kraft constant und immer gegen den Mittelpunkt gerichtet ist, für welche also auch das vorhergehende geometrische Gesetz gültig erklärt werden müßte, wenn es nicht unmittelbar aus der Natur der Bewegung folgte, und bezeichnen wieder, wie vorher, den Winkel, welchen der unveränderliche Fahrstrahl r am Ende der Zeit t mit seiner Richtung am Anfang der Zeit bildet, durch ω. Es ist dann einleuchtend, daß das Verhältniß: $\dfrac{\omega}{t}$ der Zeit zu dem vom Fahrstrahl beschriebenen Winkel ebenso wie das: $\dfrac{s}{t}$ für die ganze Bewegung unverändert bleibt, und daß für zwei verschiedene solcher

Bewegungen, welche aber in Kreisen von gleichen Halbmessern vor sich gehen, die Winkel ω und ω', welche in derselben Zeit beschrieben werden, oder daß überhaupt die in der Zeiteinheit beschriebenen Winkel:

$$\frac{\omega}{t} \quad \text{und} \quad \frac{\omega'}{t'}$$

in demselben Verhältnisse stehen, wie die in der Einheit der Zeit zurückgelegten Bogen:

$$\frac{s}{t} \quad \text{und} \quad \frac{s'}{t'},$$

vorausgesetzt, daß auch die Bogen s und s' vom Anfang der Zeit an gemessen sind, also auch wie die Geschwindigkeiten:

$$v \quad \text{und} \quad v',$$

und man hat deßhalb dieses Verhältniß: $\frac{\omega}{t}$ die Winkelgeschwindigkeit des Bewegten genannt; es soll künftig immer durch den Buchstaben φ bezeichnet werden.

Für gleichförmige Bewegungen in Kreisen von verschiedenen Halbmessern, hat man ferner die gleichen Verhältnisse:

$$\frac{\omega}{t} : \frac{\omega'}{t'} = \frac{\frac{s}{r}}{t} : \frac{\frac{s'}{r'}}{t'} = \frac{\frac{s}{t}}{r} : \frac{\frac{s'}{t'}}{r'} = \frac{v}{r} : \frac{v'}{r'} .$$

Setzen wir also $\frac{\omega'}{t'} = \varphi' = 1$, wodurch auch zufolge unserer Winkel-Einheit (Einleitung §. 11 Anm.), $\frac{s'}{t'} = v' = r'$ wird, so erhalten wir:

$$\frac{\omega}{t} = \varphi = \frac{v}{r} \quad , \quad v = r\varphi ,$$

und wir können darnach sagen: die Winkelgeschwindigkeit eines materiellen Punktes, der sich gleichförmig in einem Kreise bewegt, ist gleich der fördernden Geschwindigkeit eines andern, welcher sich in der Einheit der Entfernung vom Mittelpunkte um diesen so bewegt, daß er mit dem ersten sich immer auf demselben Halbmesser befindet.

Denken wir uns sodann eine veränderliche Bewegung im Kreise, so haben wir als Maaß der fördernden Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} ,$$

und demnach auch, da $s = r\omega$ und r constant ist,

$$v = r\frac{d\omega}{dt} \quad , \qquad \varphi = \frac{v}{r} = \frac{d\omega}{dt} \; ,$$

woraus folgt, daß bei der veränderlichen Bewegung im Kreise die Winkelgeschwindigkeit durch das Aenderungsgesetz des Winkels ω in Bezug auf die Zeit ausgedrückt wird, wie die fördernde Geschwindigkeit durch das Aenderungsgesetz des Bogens s.

Nehmen wir endlich eine beliebige ebene Curve BC, Fig. 65, so wird die Aenderung des Winkels BAM oder ω immer der Aenderung des Kreisbogens bm gleich sein, der von einem Punkte m in der Einheit der Entfernung vom Anfangspunkte so beschrieben wird, daß dieser mit dem in der Bahn BC sich bewegenden materiellen Punkte M sich immer auf demselben Fahrstrahl befindet, und man hat folglich auch hier

$$\varphi = \frac{d\omega}{dt} \tag{82}$$

als Maaß der Winkelgeschwindigkeit.

Nach diesen Auseinandersetzungen kann nun das durch die Gleichung:

$$r^2\frac{d\omega}{dt} = C \quad , \qquad \frac{d\omega}{dt} = \varphi = \frac{C}{r^2} \; ,$$

ausgedrückte Gesetz auch so ausgesprochen werden: Wenn die bewegende Kraft in jeder Lage des Bewegten gegen einen als Anfang der Coordinaten genommenen festen Punkt gerichtet ist, so bewegt sich ihr Angriffspunkt so, daß seine Winkelgeschwindigkeit in jedem Augenblicke dem Quadrat des Fahrstrahls verkehrt proportional ist.

Wir haben aber ferner noch die Beziehung:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \; ,$$

oder wenn man für x und y ihre Werthe in Polarcoordinaten:

$$x = r\cos\omega \quad , \qquad y = r\sin\omega$$

nimmt, woraus dann

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\omega - r\sin\omega\frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\omega + r\cos\omega\frac{d\omega}{dt}$$

folgt, nach einigen Reductionen:

83.) $$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\omega}{dt}\right)^2 .$$

Diese Ausdrücke zeigen, daß $\frac{dr}{dt}$ und $r\frac{d\omega}{dt}$ zwei unter sich rechtwinklige Componenten der Geschwindigkeit v des Bewegten sind, während aus dem obigen Werthe der Winkelgeschwindigkeit im Kreise:

$$\varphi = \frac{v}{r} = \frac{d\omega}{dt} ,$$

folgt, daß $r\frac{d\omega}{dt}$ auch die fördernde Geschwindigkeit eines Punktes M vorstellt, welcher am Ende der Zeit t die gleiche Entfernung r von dem Anfangspunkte und dieselbe Geschwindigkeit hat, wie der gegebene Bewegte, der sich aber in gleichbleibender Entfernung oder in einem Kreisbogen um den Anfangspunkt A bewegen will; die Richtung dieser Geschwindigkeit ist die der Tangente MN, Fig. 65, an jenem Kreisbogen, und demnach senkrecht zu dem Fahrstrahl r. Wir schließen daraus, daß $r\frac{d\omega}{dt}$ die zu diesem Fahrstrahl senkrechte, und folglich $\frac{dr}{dt}$ die längs desselben gerichtete Componente der Geschwindigkeit v ist. Unsere Gleichung nimmt darnach die Form an:

$$r^2\frac{d\omega}{dt} = r \,.\, r\frac{d\omega}{dt} = C ,$$

und kann nun so gedeutet werden:

Unter den gegebenen Verhältnissen bewegt sich der materielle Punkt so, daß das Product aus seinem Fahrstrahl in seine dazu senkrechte Geschwindigkeit (senkrechte Componente der Geschwindigkeit) unveränderlich ist, und die Größe C drückt das Product aus der anfänglichen Entfernung r_0 von dem Anfangspunkte in die rechtwinklige Componente $v_0 \sin \alpha_0$ der anfänglichen Geschwindigkeit v_0 aus, wobei α_0 den Winkel XBv_0, Fig. 65, bezeichnet, welchen die Richtung dieser Geschwindigkeit mit der Verlängerung des ersten Fahrstrahles AB bildet, so daß dieser Winkel Null wird, wenn die Geschwindigkeit längs dieser Verlängerung gerichtet ist, und die Entfernung r_0 zu vergrößern strebt, ein Fall, welcher indessen nebenbei bemerkt, so wie der, wo $\alpha_0 = \pi$ ist, eine geradlinige Bewegung zur Folge hat.

Mit diesen Bezeichnungen nimmt denn die obige Gleichung die bestimmte Form:

$$r^2 \frac{d\omega}{dt} = r_0 v_0 \sin \alpha_0 \qquad (84.$$

an, unter welcher sie die nothwendigen Gegebenen ausgedrückt enthält, nämlich die anfängliche Entfernung und die Größe und Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit.

Endlich ist leicht zu sehen, daß $r_0 \sin \alpha_0$ auch die Länge p_0 der vom Anfangspunkt A auf die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit gefällten Senkrechten Ap mißt; ebenso wird man finden, daß wenn man den Winkel zwischen dem Fahrstrahl r und der Richtung der Geschwindigkeit (der Tangente) am Ende der Zeit t mit ϑ bezeichnet, man

$$r \frac{d\omega}{dt} = v \sin \vartheta \quad , \qquad r^2 \frac{d\omega}{dt} = r v \sin \vartheta = p v$$

hat, wo dann $p = r \sin \vartheta$ die Länge der vom Anfangspunkt auf die Tangente gefällten Senkrechten vorstellt. Unser Bewegungsgesetz wird daher auch

$$p v = p_0 v_0 \ , \qquad (85.$$

und zeigt, daß bei der bisher betrachteten Bewegung die Geschwindigkeit in jedem Augenblicke der von dem Anfangspunkt auf ihre Richtung gefällten Senkrechten verkehrt proportional ist.

§. 74.

Gehen wir nun zur näheren Betrachtung einiger bemerkenswerthen freien Bewegungen eines materiellen Punktes über.

Die geradlinige Bewegung im Raume ist zwar in §. 61 schon behandelt worden, wir wollen aber der Vollständigkeit wegen wieder mit den einfachsten Fällen anfangen, und nun die Kraft als gegeben voraussetzen. — Sei demnach zuerst $R = 0$. Diese Annahme gibt die Gleichungen:

$$\frac{du_x}{dt} = X = 0 \quad , \qquad \frac{du_y}{dt} = Y = 0 \quad , \qquad \frac{du_z}{dt} = Z = 0 \ ,$$

also durch Integration, wenn v_0 die anfängliche Geschwindigkeit ist, und α, β, γ die Winkel ihrer Richtung mit den drei Achsen bezeichnen:

$$u_x - v_0 \cos \alpha = 0 \ , \quad u_y - v_0 \cos \beta = 0 \ , \quad u_z - v_0 \cos \gamma = 0 \ ,$$

und

$$v = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = v_0 \ .$$

Sind ferner a, b, c die Coordinaten der Lage des Bewegten am Anfang der Zeit, so ergeben sich durch fernere Integration der Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \quad , \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \cos\beta \quad , \quad \frac{dz}{dt} = v_0 \cos\gamma$$

die Beziehungen:

$$x - a = v_0 t \cos\alpha \quad , \quad y - b = v_0 t \cos\beta \quad , \quad z - c = v_0 t \cos\gamma \ ,$$

welche noch einfacher werden, wenn man den Punkt, dessen Coordinaten a, b, c sind, als Anfang der Coordinaten nimmt, d. h. $a = b = c = 0$ setzt, nämlich:

$$x = v_0 t \cos\alpha \quad , \quad y = v_0 t \cos\beta \quad , \quad z = v_0 t \cos\gamma \ ,$$

wo natürlich die x, y und z vom neuen Anfangspunkte an gemessen werden. Durch Elimination von t findet man die Gleichungen der Bahn:

$$\frac{x - a}{\cos\alpha} = \frac{y - b}{\cos\beta} = \frac{z - c}{\cos\gamma}$$

im ersten, und einfacher

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}$$

im zweiten Falle, und außerdem hat man in diesem noch

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = v_0 t \ ,$$

also lauter Gesetze, welche der geradlinigen gleichförmigen Bewegung angehören.

Nehmen wir zweitens die bewegende Kraft der Größe und Richtung nach als unveränderlich an, und die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit v_0 parallel zur Richtung der Kraft, so daß die Componenten der erstern nach den drei Achsen wieder

$$v_0 \cos\alpha \quad , \quad v_0 \cos\beta \quad , \quad v_0 \cos\gamma \ ,$$

die der letztern, welche mit P bezeichnet sei,

$$P \cos\alpha \quad , \quad P \cos\beta \quad , \quad P \cos\gamma$$

sind, so geben die Gleichungen (68) die Ausdrücke:

$$m u_x - m v_0 \cos\alpha = P \cos\alpha . t \quad , \quad m u_y - m v_0 \cos\beta = P \cos\beta . t$$

$$m u_z - m v_0 \cos\gamma = P \cos\gamma . t \ ,$$

aus denen man, wenn zur Abkürzung $\frac{P}{m} = c$ gesetzt wird,

$$v = v_0 + ct$$

zieht. Ferner findet man durch eine zweite Integration, nachdem wieder $\frac{dx}{dt}$ für u_x, $\frac{dy}{dt}$ für u_y, $\frac{dz}{dt}$ für u_z gesetzt worden, die Gleichungen:

$$x - a = (v_0 t + \frac{1}{2} c t^2) \cos\alpha \quad , \quad y - b = (v_0 t + \frac{1}{2} c t^2) \cos\beta ,$$

$$z - c = (v_0 t + \frac{1}{2} c t^2) \cos\gamma ,$$

worin a, b, c wieder die Coordinaten der anfänglichen Lage des Bewegten sind, und dann aus diesen durch Elimination von t, wie vorher die Gleichungen einer Geraden:

$$\frac{x - a}{\cos\alpha} = \frac{y - b}{\cos\beta} = \frac{z - c}{\cos\gamma} .$$

Die Bewegung ist also wieder eine geradlinige, und zwar nach dem Werthe von v, ebenso wie die Bewegungen der Projectionen des materiellen Punktes in den drei Achsen, eine gleichförmig veränderte. Nimmt man daher den Anfang der Coordinaten auf der Geraden selbst an, und bezeichnet die anfängliche Entfernung des Bewegten von diesem Anfang mit r_0, so ist

$$a = r_0 \cos\alpha \quad . \quad b = r_0 \cos\beta \quad , \quad c = r_0 \cos\gamma ,$$

und damit ergibt sich

$$r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2} c t^2 ,$$

wie vorauszusehen war.

Im Allgemeinen wird man aus dem Vorhergehenden schließen, daß die Bewegung immer eine geradlinige sein wird, wenn die Richtung der bewegenden Kraft unveränderlich ist, und mit der Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit zusammenfällt; denn man hat dann

$$X = R \cos\alpha \quad , \quad Y = R \cos\beta \quad , \quad Z = R \cos\gamma$$

und erhält durch die Gleichungen (68), wenn R in Function von t ausgedrückt angenommen wird,

$$u_x = \left(v_0 + \int_0^t dt . \frac{R}{m}\right) \cos\alpha \quad , \quad u_y = \left(v_0 + \int_0^t dt . \frac{R}{m}\right) \cos\beta \ ,$$

$$u_z = \left(v_0 + \int_0^t dt . \frac{R}{m}\right) \cos\gamma \ ,$$

folglich auch

$$v = v_0 + \int_0^t dt . \frac{R}{m} \ .$$

Daraus ziehen wir dann wieder rückwärts

$$T = m \frac{dv}{dt} = R \quad , \qquad N = 0$$

also für jeden Werth von t

$$\varkappa = 0 \quad , \qquad \varrho = \infty$$

was nur bei einer geraden Linie stattfinden kann.

§. 75.

Als Beispiel einer krummlinigen Bewegung, welche durch eine Kraft von unveränderlicher Intensität und Richtung hervorgerufen wird, soll nun die Bewegung eines schweren materiellen Punktes untersucht werden, dem eine beliebig gerichtete anfängliche Geschwindigkeit ertheilt worden, und der während der Bewegung nur der Wirkung seines unveränderlichen Gewichtes unterworfen ist.

Seien wieder v_0 diese anfängliche Geschwindigkeit und α, β, γ die Winkel ihrer Richtung mit den drei Coordinaten-Achsen, von denen die der z parallel zur Richtung der Schwere, und zwar deren positive Hälfte aufwärts gerichtet angenommen werden soll, und $p = mg$ das Gewicht des materiellen Punktes. Die Gleichungen (68) werden

$$m \frac{du_x}{dt} = 0 \quad , \qquad m \frac{du_y}{dt} = 0 \quad , \qquad m \frac{du_z}{dt} = -p = -mg \ ,$$

und geben durch erste Integration

$$u_x = v_0 \cos\alpha \quad , \qquad u_y = v_0 \cos\beta \quad , \qquad u_z = v_0 \cos\gamma - gt \ .$$

Führt man dann wieder für die Componenten der Geschwindigkeit ihre analytischen Werthe: $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ ein, und integrirt von neuem

unter der Voraussetzung, daß der Anfang der Bewegung zugleich Anfang der Coordinaten sei, so findet man die Gleichungen:

$$x = v_0 t \cos\alpha \quad , \quad y = v_0 t \cos\beta \quad , \quad z = v_0 t \cos\gamma - \frac{1}{2} g t^2 ,$$

welche zeigen, daß die Bewegungen der Projectionen in den Achsen der x und y gleichförmige sind, während die in der Achse der z eine gleichförmig veränderte ist. Die beiden ersten geben denn auch durch Elimination von t:

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} ,$$

d. h. die Gleichung einer durch die Achse der z gehenden Ebene, in welcher die Bewegung stattfindet. Man wird demnach die fernere Untersuchung vereinfachen, wenn man das Coordinatensystem so um die Achse der z dreht, daß die Ebene der xz mit der Ebene der Bewegung zusammenfällt, also um den Winkel ε, für welchen man hat:

$$\tang \varepsilon = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} .$$

Darnach findet man als Geschwindigkeit der Projection des Bewegten in der neuen Achse der x:

$$\sqrt{u_x^2 + u_y^2} = v_0 \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta} = v \sin\gamma ,$$

und als Ausdruck der Entfernung dieser Projection vom Anfangspunkt am Ende der Zeit t oder als Werth der neuen x

$$\sqrt{x^2 + y^2} = v_0 t \sin\gamma ,$$

und die beiden Gleichungen der Bewegung werden demnach

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t \sin\gamma \\ z &= v_0 t \cos\gamma - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} .$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen die Coordinaten des Bewegten für irgend einen Augenblick, und geben auch durch Elimination von t die Gleichung der in der Ebene der xz enthaltenen Bahncurve, nämlich

$$z = x \cot\gamma - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \sin^2\gamma} ,$$

also die einer Parabel, deren Achse zur Achse der z oder zur Richtung der Schwere parallel ist, und die wie sich von selbst versteht, durch den

Anfang der Coordinaten geht, da z mit x Null wird. Daß die Curve eine Parabel ist, erkennt man daraus, daß die Coeffizienten A und B in der allgemeinen Form der Gleichung des zweiten Grades:

$$Az^2 + Bxz + Cx^2 + Dz + Ex + F = 0 ,$$

Null sind, daß man also auch $4AC - B^2 = 0$ hat; ferner zeigt die Abwesenheit des Gliedes mit dem Producte xz in unserer Gleichung, daß die Achse dieser Parabel zu einer der Coordinaten-Achsen parallel ist, und zwar zur Achse der z, weil auch das Glied mit z^2 fehlt.

Um nun die Verhältnisse dieser Curve genauer zu untersuchen, kann man zuerst statt der anfänglichen Geschwindigkeit v_0 die entsprechende Geschwindigkeitshöhe h_0, für welche man bekanntlich (§. 49)

$$h_0 = \frac{v_0^2}{2g}$$

hat, einführen, wodurch die Gleichung derselben die Form:

$$z = x \cot\gamma - \frac{x^2}{4h_0 \sin^2\gamma}$$

annimmt. Für $z = 0$ erhält man daraus zuerst

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = 4h_0 \sin\gamma \cos\gamma = 2h_0 \sin 2\gamma$$

als Abscissen der Durchschnittspunkte der Parabel mit der Achse der x; den zweiten dieser Werthe nennt man die Wurfweite; er zeigt, daß diese für dieselbe anfängliche Geschwindigkeit am größten ist, wenn man $\gamma = \frac{1}{4}\pi$ hat. Im Scheitel unserer Parabel hat z offenbar seinen größten Werth; man bestimmt deßhalb die Abscisse desselben durch die Gleichung:

$$\frac{dz}{dx} = \cot\gamma - \frac{x}{2h \sin^2\gamma} = 0 \quad , \quad x = h_0 \sin 2\gamma ,$$

und durch Einführung dieses Werthes in die Gleichung der Curve folgt

$$z = h_0 \cos^2\gamma .$$

Setzt man daher in derselben Gleichung

$$z = h_0 \cos^2\gamma - z' \quad , \quad x = x' + 2h \sin\gamma \cos\gamma ,$$

so nimmt diese die gewöhnliche Form:

$$x'^2 = 4h_0 \sin^2\gamma \, . \, z'$$

an und zeigt, daß der Parameter unserer Parabel durch $2h_0 \sin^2\gamma$, und die Ordinate des Brennpunktes durch $h_0 \cos 2\gamma$ ausgedrückt wird.

Alle diese Ausdrücke lassen sich übrigens auch leicht durch Construction darstellen. Ist A, Fig. 66, der Anfang der Coordinaten, AB die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit, also der Winkel ZAB gleich γ, AC die Geschwindigkeitshöhe h_0, CD senkrecht zu AB, und DE zu AC, so hat man $AD = h_0 \cos\gamma$, $AE = h_0 \cos^2\gamma$, und es ist demnach die Verlängerung DT von DE die Tangente im Scheitel G der Parabel. Ferner ist $DE = h_0 \cos\gamma \sin\gamma$ und dadurch der Scheitel G gefunden, wenn $DG = DE$ gemacht wird; die zur Achse der z parallele GJ ist die Achse der Curve, und die doppelte AJ oder AH gibt den Durchgangspunkt H in der Achse der x. Zuletzt sieht man, daß die Verlängerung von CD die Achse GJ im Brennpunkte F schneidet, da $GF = CE = CD \sin\gamma = h_0 \sin^2\gamma$ ist, daß also auch die doppelte Länge $2FG = FK$ den Parameter der Parabel vorstellt, womit dann alle nothwendigen Größen bestimmt sind.

Was endlich noch die Geschwindigkeit betrifft, so erhalten wir durch das Gesetz von der Erhaltung der lebendigen Kraft (71) zuerst

$$m v^2 - m v_0^2 = -2p\int_0^s ds \,.\, \frac{dz}{ds} = -2p\int_0^z dz \,.\, 1 = -2pz \;,$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gz \;.$$

Die Geschwindigkeit hat demnach den kleinsten Werth da, wo z einen größten hat, nämlich im Scheitel der Curve; dort ist aber $z = h_0 \cos^2\gamma = \frac{v_0^2}{2g}\cos^2\gamma$, also wird

$$v = \sqrt{v_0^2 - v_0^2 \cos^2\gamma} = v_0 \sin\gamma \;;$$

d. h. die Geschwindigkeit im Scheitel ist dieselbe, wie die der Projection des Bewegten in der Achse der x, wie dies offenbar sein muß, da ihre Richtung im Scheitel zu dieser Achse parallel ist. Für $z = 0$ ist v jedenfalls gleich v_0, also dieselbe am Anfang wie bei der Rückkehr des Bewegten in die Horizontal-Ebene, wie denn überhaupt die Geschwindigkeit in gleichen Abständen vom Scheitel dieselbe ist.

In dem besondern Falle, wo die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit eine wagrechte, also $\gamma = \frac{1}{2}\pi$ ist, wird einfach

$$x^2 = -4h_0 z \;;$$

die Parabel hat dann ihren Scheitel im Anfangspunkt und die Achse der negativen z zur Achse; ihr Parameter ist $2h_0$, und ihr Brennpunkt um die Länge h_0 vom Scheitel entfernt.

§. 76.

Bei der eben betrachteten Bewegung kann die Aufgabe gestellt werden, die Größe und Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit so zu bestimmen, daß die Bahn des Bewegten durch einen gegebenen Punkt geht.

Legt man zur Lösung dieser Aufgabe die lothrechte Ebene der xz durch den gegebenen Punkt und durch denjenigen, von welchem die Bewegung ausgehen soll, und nimmt diesen letztern als Anfang oder Schnittpunkt einer wagrechten und einer lothrechten Coordinatenachse an, auf welche die Lage des erstern durch die Gleichungen

$$x = a \quad , \qquad z = h$$

bezogen ist, so leuchtet zuerst ein, daß die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit vor Allem in dieser Ebene liegen muß; ferner nimmt die oben abgeleitete Gleichung der Bahn des Bewegten mit den voranstehenden Werthen von x und z die Form an:

$$4h_0 \sin^2\gamma\,(a \cot\gamma - h) = a^2$$

und gibt, wenn γ bestimmt ist, für h_0 den einzigen Werth:

$$h_0 = \frac{a^2}{4\,(a \cot\gamma - h)\,\sin^2\gamma} ,$$

welcher als Bedingung der Möglichkeit

$$a \cot\gamma - h > 0$$

voraussetzt, weil v_0 für ein negatives h_0 imaginär würde. Diese Bedingung drückt aber aus, daß der gegebene Punkt C, Fig. 67, nicht weiter von der Achse AX entfernt liegt, als der Durchschnittspunkt D der durch C gelegten Lothlinie BD mit der Richtung AD der anfänglichen Geschwindigkeit; denn da $AB = a$, $BC = h$, und Winkel $ZAD = \gamma$ ist, so hat man

$$BD = a \cot\gamma \ .$$

Diese Anschauung kann auch dazu dienen, den vorhergehenden Werth

von h_0 durch Construction zu erhalten, und zwar auf verschiedene Weise; die einfachste dürfte wohl folgende sein. Man hat offenbar

$$\frac{AB}{\sin\gamma} = AD = \frac{a}{\sin\gamma} \quad , \quad AE = \frac{a}{2\sin\gamma} ;$$

bildet man daher aus dem Werthe von h_0 die stetige Proportion:

$$a \cot\gamma - h : \frac{a}{2\sin\gamma} = \frac{a}{2\sin\gamma} : h_0 ,$$

so sieht man, daß wenn CE rückwärts bis C' verlängert, AC' = DC nach AG, AE nach AF, DE nach DF übertragen, und durch E eine Parallele EH zu FG gezogen wird, die abgeschnittene AH die verlangte h_0 sein muß, mit welcher dann die zur Construction der Bahncurve nothwendigen Stücke nach der Angabe des vorigen §. gezeichnet werden können.

Ist dagegen die anfängliche Geschwindigkeit v_0 also auch die entsprechende Höhe h_0 bestimmt, und γ zu suchen, so wird man $\sin^2\gamma$ durch $\frac{1}{1+\cot^2\gamma}$ ersetzen, und so die Gleichung:

$$a^2 u^2 - 4 a h_0 u + a^2 + 4 h h_0 = 0$$

erhalten, in welcher zur Abkürzung u für $\cot\gamma$ steht; sie gibt in Bezug auf diese Größe aufgelöset, den zweifachen Werth:

$$u = \frac{2h_0}{a} \pm \frac{\sqrt{4h_0^2 - 4hh_0 - a^2}}{a} ,$$

und zeigt dadurch, daß der beabsichtigte Zweck im Allgemeinen auf zwei verschiedenen Wegen erreicht werden kann, wenn die Wurzelgröße einen reellen von Null verschiedenen Werth hat. Diese letztere Bedingung wird aber durch die Ungleichheit:

$$4h_0^2 - 4hh_0 - a^2 > 0$$

ausgedrückt, und sie muß vor Allem durch die gegebenen Größen befriedigt werden, wenn die Erfüllung der Aufgabe überhaupt möglich sein soll, so daß der Fall: $4h_0^2 - 4hh_0 - a^2 = 0$, für welchen sich der obige Werth auf $u = \frac{2h_0}{a}$ reduzirt und die Aufgabe nur auf eine einzige Weise gelöset werden kann, die Grenze für die Möglichkeit der

Auflösung bildet. Stellen wir uns deßhalb die letzte Gleichung unter der Form:

$$x_,^2 = 4h_0(h_0 - z_,)$$

anschaulich dar, indem wir uns die Gegebenen a und h als veränderliche Coordinaten denken, und sie deßhalb durch $x_,$ und $z_,$ ersetzen, so zeigt sich uns wieder eine Parabel, deren Achse nun mit der Achse der z zusammenfällt und im Sinne der negativen z gerichtet ist, deren Scheitel auf der positiven Hälfte derselben in einer Entfernung $= h_0$ vom Anfang entfernt liegt, und deren Parameter gleich $2h_0$ ist, wornach denn der Anfangspunkt der Coordinaten zugleich Brennpunkt der Curve ist. Machen wir demnach AD, Fig. 68, gleich h_0, AE gleich $2h_0$, und construiren den Parabelbogen DCE, so werden alle Punkte dieses Bogens durch ihre Coordinaten die letzte Bedingungsgleichung befriedigen; man wird also den Punkt C nur unter einem einzigen Winkel γ erreichen, dessen Cotangente $u = \frac{2h_0}{a}$ ist, und diesen demnach dadurch finden, daß man die Lothlinie BC verlängert, bis man $BF = 2AD = 2h_0$ hat, und AF zieht. Zeichnet man dann wieder die Wurflinie AGC nach der frühern Angabe, so sieht man, daß diese die vorhergehende Parabel DCE in C berührt.

Für alle Punkte, die wie C′ außerhalb dieser Parabel liegen, ist

$$a^2 > 4h_0(h_0 - h)$$

oder

$$a^2 + 4hh_0 > 4h_0^2,$$

und der beabsichtigte Zweck kann mit der gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit auf keine Weise erreicht werden. Für diejenigen Punkte dagegen, welche wie C, Fig. 69, innerhalb der Curve DGE liegen, gibt es immer zwei Winkel γ oder zwei Richtungen der anfänglichen Geschwindigkeit, unter welchen der Bewegte durch den gegebenen Punkt C geht.

Will man diese Richtungen durch Zeichnung erhalten, so wird man den Werth von au oder a cot γ suchen, und dazu den obengefundenen Werth von u auf die Form bringen:

$$au = 2h_0 \pm \sqrt{2h_0(2h_0 - 2h) - a^2}.$$

Man construirt nun zuerst die Wurzelgröße: $\sqrt{2h_0(2h_0 - 2h)}$ dadurch, daß man $AD' = 2AD = 2h_0$, $BC' = 2BC = 2h$ macht, durch eine Parallele C′J zu AB die BC′ = AJ von AD′ abschneidet, und zu

$AD' = 2h_0$ und $JD' = 2h_0 - 2h$ eine mittlere geometrische Proportionale $D'K$ zeichnet; beschreibt man dann mit dieser letztern als Halbmesser von D' aus einen Kreisbogen $KH'H$, so schneidet dieser die durch C gelegte Lothlinie BF in zwei Punkten H und H' so, daß man

$$\overline{FH}^2 = \overline{FH'}^2 = \overline{D'K}^2 - \overline{D'F}^2 = 2h_0(2h_0 - 2h) - a^2$$

und demzufolge auch

$$\overline{BH} = \overline{BF} + \overline{FH} = 2h_0 + \sqrt{2h_0(2h_0 - 2h) - a^2}$$

$$\overline{BH'} = \overline{BF} - \overline{FH'} = 2h_0 - \sqrt{2h_0(2h_0 - 2h) - a^2}$$

erhält, und die Geraden AH und AH' die verlangten Richtungen vorstellen.

Führt man nun wieder nach diesen beiden Richtungen und mit der gegebenen Geschwindigkeitshöhe h_0 die Construction der entsprechenden Bahnen aus, wie sie Fig. 70 zeigt, so findet man, daß auch diese von dem Parabelbogen DGE berührt werden, und zwar in den Punkten G und G', in denen diese Curve von den durch die Punkte M und M' gezogenen Vertikalen MG und $M'G'$ geschnitten wird, für welche man also die Abscissen hat:

$$x_1 = 2h_0 \tang \gamma_1 \quad , \qquad x_2 = 2h_0 \tang \gamma_2 \; .$$

Man wird daraus schließen, daß diese Berührung für alle Parabeln stattfindet, welche der Bewegte mit derselben anfänglichen Geschwindigkeit unter allen möglichen Richtungen derselben beschreiben kann. In der That findet man nach dem in der Einleitung (§. 44) angegebenen Verfahren, indem man nämlich den veränderlichen Winkel γ aus der Gleichung der veränderlichen Curve:

$$z_, = x_, \cot \gamma - \frac{x_,^2}{4h_0 \sin^2 \gamma}$$

mittels ihres Aenderungsgesetzes in Bezug auf γ:

$$x_, = 2h_0 \tang \gamma \; ,$$

welches die Bedingung der Berührung ausdrückt, eliminirt, die Gleichung:

$$x_,^2 = 4h_0(h_0 - z_,)$$

der umhüllenden Curve DGE wieder.

§. 77.

Nach den vorhergehenden, durch eine unveränderliche Kraft veranlaßten Bewegungen sind diejenigen die einfachsten und bemerkenswerthesten, welche durch eine Kraft hervorgerufen werden, deren Richtung in jeder Lage des Bewegten durch einen festen Punkt geht, und deren Intensität eine Function der Entfernung des erstern von dem letztern ist. Ehe ich jedoch diesen Fall unter der Voraussetzung, daß die Kraft bestimmt sei, allgemein mittels der im §§. 71 und 72 erhaltenen Gesetze durchführe, wollen wir einige einfache Bewegungen dieser Art betrachten, unter der Voraussetzung, daß die Bahn des Bewegten vorgeschrieben und der feste Punkt für die Richtung der Kraft bestimmt sei, und daß die Intensität der letztern ausgedrückt werden soll.

Die Bahn des Bewegten sei zuerst wieder eine Parabel und die Kraft immer gegen den Brennpunkt dieser Curve gerichtet; der Anfang der Bewegung sei der Scheitel A, Fig. 71, und die Geschwindigkeit derselben in diesem Punkte $= v_0$. Bezeichnet dann m die Masse des Bewegten, so hat man in diesem Punkte, wo die Tangente senkrecht zum Fahrstrahl AF, oder zur Richtung der Kraft ist, wenn p den Parameter vorstellt,

$$T = 0 \quad , \qquad N = m\frac{v_0^2}{\varrho} = m\frac{v_0^2}{p} = R \; .$$

In einem beliebigen Punkte M dagegen, dessen Abscisse $AP = x$ sei, und für welchen der Fahrstrahl FM und die Krümmung $\varkappa = \frac{1}{\varrho}$ durch:

$$r = \sqrt{(x - \tfrac{1}{2}p)^2 + 2px} = x + \tfrac{1}{2}p$$

und

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\frac{p}{(2x+p)^3}} = \sqrt{\frac{p}{8r^3}}$$

ausgedrückt werden, bildet der Fahrstrahl einen Winkel ϑ mit der Tangente, welcher dem Winkel zwischen der Tangente und der Achse der Parabel oder der Achse der x gleich ist, und für den man hat:

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \frac{p}{\sqrt{2px}} \, ,$$

$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{2x}{2x+p}} = \sqrt{\frac{x}{r}} \, , \quad \sin\vartheta = \sqrt{\frac{p}{2x+p}} = \sqrt{\frac{p}{2r}} \; .$$

Ist demnach R die Intensität der Kraft in diesem Punkte, so hat man auch:

$$T = R\sqrt{\frac{x}{r}} \quad , \qquad N = -R\sqrt{\frac{p}{2r}} \; ,$$

wobei zu beachten ist, daß die Kraft R positiv genommen wird, wenn sie im Sinne der Verlängerung des Fahrstrahls wirkt, und daß die Componente N immer gegen den Krümmungsmittelpunkt gerichtet ist. Ferner hat man nach dem in §. 73 ausgesprochenen Satze (84), da in unserm Falle $r_0 = \frac{1}{2}p$, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ist:

$$r^2\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}pv_0 = C \; ,$$

und weil die Richtung der Geschwindigkeit mit dem Fahrstrahl den Winkel ϑ bildet, so wird:

$$r\frac{d\omega}{dt} = v\sin\vartheta = v\sqrt{\frac{p}{2r}} \quad , \qquad r^2\frac{d\omega}{dt} = v\sqrt{\frac{1}{2}pr} \; ;$$

folglich hat man

$$v\sqrt{\frac{1}{2}pr} = \frac{1}{2}pv_0 \quad , \qquad v = v_0\sqrt{\frac{p}{2r}} \; ,$$

und schließt daraus, daß die Geschwindigkeit der Bewegung abnimmt, wie der Sinus des Winkels zwischen der Tangente an der Bahncurve und ihrer Achse.

Mit diesem Werthe von v folgt dann weiter:

$$N = m\frac{v^2}{\varrho} = mv_0^2\frac{p}{2r}\sqrt{\frac{p}{8r^3}} = -R\sqrt{\frac{p}{2r}}$$

und daraus

$$R = -\frac{1}{4}mp\frac{v_0^2}{r^2} \; .$$

Die Intensität der Kraft steht demnach im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung des Bewegten von dem Brennpunkte F, und ihre Wirkung ist eine anziehende, d. h. sie strebt diese Entfernung zu vermindern.

Endlich gibt der Lehrsatz von der Einhaltung der Oberflächen (§. 72) auch sehr einfach die Beziehung zwischen der Lage des Bewegten

und der Zeit, welche er zu seiner Bewegung vom Scheitel an bis dorthin gebraucht hat. Man hat bekanntlich als Oberfläche des Segmentes AMP (vergl. §. 43 im 2ten Buche)

$$O_1 = \frac{2}{3} x y$$

und für die des Dreieckes FPM

$$O_2 = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} p) y ,$$

woraus für den Sector AFM

$$O = \frac{2}{3} x y - \frac{1}{2} x y + \frac{1}{4} p y = \frac{1}{12}(2x + 3p) y$$

folgt. Nach (81) ist aber

$$t = \frac{2O}{C} \quad , \quad \text{also} \quad t = \frac{(2x + 3p)\sqrt{2px}}{3pv_0} .$$

Dieser Werth von t ergibt sich indessen auch ohne Schwierigkeit auf dem gewöhnlichen Wege, indem man für v seinen analytischen Werth: $\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{ds}{dx}$ setzt; denn man findet so

$$\frac{dx}{dt} = v \frac{dx}{ds} = v_0 \sqrt{\frac{p}{2x + p}} \cdot \sqrt{\frac{2x}{2x + p}} = \frac{v_0}{2x + p}\sqrt{2px}$$

und damit durch Integration

$$t = \frac{1}{v_0}\int_0^x dx . \frac{2x + p}{\sqrt{2px}} ,$$

woraus mit den nöthigen Reductionen wieder der obige Werth folgt.

Schließlich dürfte noch zu bemerken sein, daß man hier viel weniger einfache Ausdrücke erhalten würde, wenn man die Geschwindigkeit und die Intensität der Kraft in Function der Zeit darstellen wollte.

§. 78.

Auf ähnlichem Wege wollen wir noch einen zweiten Fall untersuchen, nämlich die Bewegung eines materiellen Punktes in einer Ellipse, vermöge einer Kraft, die beständig gegen den Mittelpunkt dieser Curve gerichtet ist.

Sei dieser Mittelpunkt der Anfang der Coordinaten, die große Achse die der x und der Scheitel auf der positiven Seite der Anfang der Bewegung; bezeichnen wir ferner die Geschwindigkeit in diesem Punkte wieder mit v_0, die halbe große Achse der Curve mit a, die halbe kleine mit b, so findet man zuerst:

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega}$$

als Gleichung der Ellipse durch ihre Polarcoordinaten r und ω ausgedrückt, wo also r den Fahrstrahl vom Mittelpunkte aus, und ω den Winkel vorstellt, den dieser mit der positiven Achse der x bildet. Ferner hat man als Ausdruck für die Krümmung in einem Punkte, dessen Coordinaten r und ω sind,

$$\varkappa = \frac{1}{\varrho} = \frac{a^4 b^4}{r^3 \left(a^4 \sin^2 \omega + b^4 \cos^2 \omega\right)^{\frac{3}{2}}} ,$$

und wenn man aus der vorhergehenden Gleichung den Werth von $\sin^2 \omega$ und $\cos^2 \omega$ zieht, nämlich:

$$\sin^2 \omega = \frac{b^2 (a^2 - r^2)}{r^2 (a^2 - b^2)} , \qquad \cos^2 \omega = \frac{a^2 (r^2 - b^2)}{r^2 (a^2 - b^2)}$$

so nimmt der Werth von $\varkappa$ die einfache Form an:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{a b}{\left(a^2 + b^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}} .$$

Der Winkel τ, welchen die Tangente in demselben Punkte der Curve mit der Achse der x bildet, wird durch die Gleichung:

$$\tan \tau = \frac{dy}{dx} = - \frac{b^2 \cos \omega}{a^2 \sin \omega} = - \frac{b^2}{a^2} \cot \omega$$

bestimmt, und der Winkel ϑ, den dieselbe Tangente mit der Verlängerung des Fahrstrahls einschließt, ist offenbar gleich $\tau - \omega$ und demnach

$$\sin \vartheta = \sin (\tau - \omega) = \sin \tau \cos \omega - \cos \tau \sin \omega ,$$

oder mit der Beachtung, daß man nach dem Obigen für die Functionen $\sin \tau$ und $\cos \tau$ die Werthe:

$$\cos \tau = - \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \tau}} = - \frac{r a^2 \sin \omega}{a b \sqrt{a^2 + b^2 - r^2}}$$

$$\sin\tau = \frac{\tan\tau}{\sqrt{1+\tan^2\tau}} = \frac{r b^2 \cos\omega}{a b \sqrt{a^2+b^2-r^2}}$$

findet, und mit Rücksicht auf die Gleichung der Ellipse

$$\sin\vartheta = \frac{a b}{r\sqrt{a^2+b^2-r^2}} \; .$$

Der Lehrsatz (81) in §. 73 führt dann zu den Gleichungen

$$C = a v_0 \quad , \qquad r^2 \frac{d\omega}{dt} = r v \sin\vartheta \; ,$$

und gibt für die Geschwindigkeit den Werth:

$$v = v_0 \frac{a}{r\sin\vartheta} = v_0 \frac{\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{b} \; ;$$

die Componente N wird dadurch

$$N = m\frac{v^2}{\varrho} = m v_0^2 \frac{a}{b\sqrt{a^2+b^2-r^2}}$$

und daraus folgt endlich

$$R = -\frac{N}{\sin\vartheta} = -m\frac{v_0^2}{b^2} r \; .$$

Die bewegende Kraft ist demnach wieder eine anziehende, gegen den Mittelpunkt hin wirkende, und ihre Intensität steht im geraden Verhältnisse der Entfernung des Bewegten von diesem Mittelpunkte.

Was noch die Zeit der Bewegung betrifft, so leuchtet nach dem Princip von der Einhaltung der Oberflächen ein, daß diese für jeden Quadranten der Ellipse dieselbe sein muß, da diese Bogen Sectoren von gleicher Oberfläche begrenzen. Diese Oberfläche ist aber bekanntlich gleich $\frac{1}{4}\pi a b$, und demnach die Zeit für die Zurücklegung eines Quadranten:

$$t = \frac{2O}{C} = \frac{1}{2}\pi\frac{b}{v_0} \; ;$$

die ganze Umlaufszeit in der Ellipse wird folglich

$$T = 2\pi\frac{b}{v_0} \; ,$$

und ist demnach, verglichen mit dem in §. 52 gefundenen Werthe, dieselbe, als wenn sich der materielle Punkt blos in der kleinen Achse der Ellipse mit der anfänglichen Geschwindigkeit v_0 vom Mittelpunkte aus bewegt hätte.

Eine solche Bewegung, auf welche wir übrigens wieder zurückkommen, und die wir noch genauer werden kennen lernen, kann annähernd das freie Ende eines mit dem andern Ende befestigten elastischen Stabes annehmen, wenn man denselben aus der Gleichgewichtslage bringt, und ihm beim Loslassen einen Seitendruck ertheilt. Vollkommen besitzt diese Bewegung ein Aetherteilchen, welches sogenanntes elliptisch-polarisirtes Licht fortpflanzt.

§. 79.

Ich nehme nun die allgemeine Auflösung der Aufgabe vor, die Gesetze der Bewegung eines materiellen Punktes zu bestimmen, wenn die Richtung der bewegenden Kraft immer durch denselben festen Punkt geht und ihre Intensität eine Function der Entfernung des Bewegten von diesem festen Punkte ist.

Wir haben bereits in §§. 71 bis 73 gefunden, daß die Bewegung immer in einer Ebene erfolgt, welche durch den festen Punkt und durch die anfängliche Lage und Geschwindigkeit des Bewegten bestimmt wird; ferner, daß das Gesetz der Bewegung in dieser Ebene durch die Gleichung:

$$r^2 \frac{d\omega}{dt} = C = r_0 v_0 \sin\alpha_0 \qquad (a.$$

ausgedrückt wird, deren Erklärung in dem genannten Paragraphen gegeben worden ist. Verbinden wir nun mit dieser Gleichung den Ausdruck für das Princip der lebendigen Kraft (74):

$$m v^2 - m v_0^2 = 2 \int_{r_0}^{r} dr \,.\, R \,,$$

durch welchen wir die Geschwindigkeit des Bewegten für einen Ort, dessen Fahrstrahl r ist, unmittelbar erhalten, so kann daraus durch Elimination von t eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen erhalten werden, welche die Gleichung der Bahncurve sein wird. Am zweckmäßigsten wählt man dazu die Polarcoordinaten, und ersetzt dazu in der vorhergehenden Gleichung v^2 durch den in §. 73 gefundenen Werth (83):

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\omega}{dt}\right)^2 ,$$

wodurch man die obige Gleichung unter die Form bringen kann:

$$\text{b.)}\quad \left(r^2\frac{d\omega}{dt}\right)^2\left[\left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\omega}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right]=v_0^2+2\int_{r_0}^{r}dr.\frac{R}{m}.$$

Eliminirt man sodann den ersten Factor mittels der Gleichung (a) so ergibt sich mit Beibehaltung der Bezeichnung C für $r_0\, v_0 \sin\alpha_0$ die Differentialgleichung:

$$C\frac{d.\frac{1}{r}}{d\omega}=\mp\sqrt{v_0^2+2\int_{r_0}^{r}dr.\frac{R}{m}-\frac{C^2}{r^2}}$$

als Aenderungsgesetz des verkehrten Fahrstrahls in Bezug auf den Winkel ω, und damit folgt durch Integration

$$86.)\quad \omega-\omega_0=\mp\int_{r_0}^{r}dr.\frac{C}{\sqrt{v_0^2+2\int_{r_0}^{r}dr.\frac{R}{m}-\frac{C^2}{r^2}}}.\frac{d.\frac{1}{r}}{dr}$$

als Polargleichung der Bahn des Bewegten, worin ω_0 den Winkel zwischen dem anfänglichen Fahrstrahl r_0 und der Polar-Achse bezeichnet, welche in einer beliebigen Richtung durch den festen Punkt gezogen ist. — Das Aenderungsgesetz von $\frac{1}{r}$ in Bezug auf r ist offenbar für ein wachsendes r negativ; es wird daher auch

$$\frac{d.\frac{1}{r}}{d\omega}=\frac{d.\frac{1}{r}}{dr}.\frac{dr}{d\omega}$$

negativ sein, wenn r mit ω wächst. Da sich nun das Zeichen vor dem Integral immer nach den anfänglichen Verhältnissen richten muß, und da die anfängliche Geschwindigkeit den Winkel α mit dem Fahrstrahl r_0 bildet, wonach r im Anfang wachsen wird, so lange α kleiner ist als $\frac{1}{2}\pi$, so muß man für diesen Fall das obere Zeichen nehmen, das untere dagegen, wenn $\alpha > \frac{1}{2}\pi$, weil der in C enthaltene Factor $\sin\alpha_0$ zum Zeichenwechsel nichts beiträgt.

Umgekehrt wird man, wenn die Gleichung der zu beschreibenden Bahn gegeben ist, aus ihr das Aenderungsgesetz: $\frac{d.\frac{1}{r}}{d\omega}$ in Function von r ableiten, dadurch zuerst die Arbeit der Kraft mittels der Gleichung (b) unter der Form:

$$2\int_{r_0}^{r} dr\,.\,R = m\,C^2 \left\{ \left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\omega}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \right\} - m v_0^2$$

erhalten, und daraus durch eine zweite Ableitung in Bezug auf r die Intensität der bewegenden Kraft, also

$$R = \frac{1}{2}\,m\,C^2 \left\{ \frac{d\left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\omega}\right)^2}{dr} - \frac{1}{2r^3} \right\} \qquad (87.$$

in Function der Entfernung r finden.

In beiden Fällen wird man die Beziehungen zwischen der Lage des Bewegten oder zwischen seinen Coordinaten und der Zeit t aus dem Aenderungsgesetze dieser letztern mittels der Gleichung (a) erhalten; denn hat man diesem Aenderungsgesetze die Form:

$$\frac{dr}{d\omega} = f(r)$$

gegeben, indem man mittels der Gleichung der Bahn die Veränderliche ω daraus eliminirt hat, und multiplicirt dasselbe Glied für Glied mit der Gleichung:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{C}{r^2}$$

so folgt:

$$\frac{dr}{dt} = C\frac{f(r)}{r^2},$$

und gibt umgekehrt das allgemeine Integral:

$$C\,t = \int_{r_0}^{r} dr\,.\,\frac{r^2}{f(r)}\,. \qquad (88.$$

In dem Falle, wo die Kraft in Function von r gegeben ist, hat man nach dem Vorhergehenden unmittelbar

$$r^2 \frac{d.\frac{1}{r}}{dt} = \mp \sqrt{v_0^2 + 2\int_{r_0}^{r} dr.\frac{R}{m} - \frac{C^2}{r^2}}\,,$$

also auch durch Umkehrung und Integration den Ausdruck

89.) $$t = \pm \int_{r_0}^{r} dr.\frac{1}{\sqrt{v_0^2 + 2\int_{r_0}^{r} dr.\frac{R}{m} - \frac{C^2}{r^2}}}$$

als Beziehung zwischen t und r. Man wird daraus den Werth von r in Function von t ziehen, und mittels Einführung desselben in den durch die Gleichung (86) erhaltenen Werth von ω, auch für diese Veränderliche einen Ausdruck in Function der Zeit ableiten. Hinsichtlich der Wahl des Zeichens ist hier leicht zu sehen, daß das obere Zeichen wieder für den Fall gelten wird, wo $\alpha_0 < \frac{1}{2}\pi$, wo also r mit t wächst. — Auf diese Weise hat denn die Aufgabe ihre vollständige Lösung gefunden, und es soll diese nun an einigen weitern Beispielen sowohl mit gegebener Kraft, als mit vorgeschriebener Bahn durchgeführt werden, um keinen Zweifel über die Anwendung der vorhergehenden Formeln bestehen zu lassen.

§. 80.

Beginnen wir mit dem leichtern Falle, wo die Bahn des Bewegten vorgeschrieben ist, und nehmen wir zuerst das in §. 78 behandelte Beispiel noch einmal auf, so erhalten wir sogleich aus der dort aufgeführten Gleichung der Ellipse unter der Form:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \sin^2\omega\,,$$

als erste Ableitung

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d.\frac{1}{r}}{d\omega} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \sin\omega \cos\omega\,.$$

und daraus mit den ebendaselbst abgeleiteten Werthen von $\sin\omega$ und $\cos\omega$ den Ausdruck:

$$\left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\omega}\right)^2 = \frac{(a^2-r^2)(r^2-b^2)}{a^2b^2r^2} .$$

Damit ergibt sich dann ferner:

$$\left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\omega}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} - \frac{r^2}{a^2b^2}$$

und endlich

$$R = -mC^2\frac{r}{a^2b^2} = -m\frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha_0}{a^2b^2} r .$$

Wenn also wie oben $r_0 = a$, $\alpha_0 = \frac{1}{2}\pi$ ist, so folgt übereinstimmend mit dem dortigen Werthe:

$$R = -m\frac{v_0^2}{b^2} r .$$

Zur Bestimmung der Zeit findet man unter der Voraussetzung, daß am Anfang derselben r mit t wächst, das Aenderungsgesetz:

$$\frac{dr}{dt} = C\frac{\sqrt{(a^2-r^2)(r^2-b^2)}}{abr} ,$$

und damit das allgemeine Integral:

$$Ct = ab\int_{r_0}^{r} dr . \frac{r}{\sqrt{(a^2-r^2)(r^2-b^2)}} .$$

Setzt man hier

$$r^2-b^2 = z \quad , \quad a^2-r^2 = a^2-b^2-z \quad , \quad r\frac{dr}{dz} = \frac{1}{2} ,$$

so hat man das unbestimmte Integral:

$$C\Delta t = \frac{1}{2}ab\int dz . \frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)z-z^2}} = \frac{1}{2}ab\Delta . \text{arc}\cos\frac{a^2-b^2-2z}{a^2-b^2} ,$$

also mit dem Werthe von z

$$Ct = \frac{1}{2}\, a b \overset{r}{\underset{r_0}{\Delta}} . \operatorname{arc\,cos} \frac{a^2 + b^2 - 2r^2}{a^2 - b^2},$$

oder

$$Ct = \frac{1}{2}\, a b \left(\operatorname{arc\,cos} \frac{a^2 + b^2 - 2r^2}{a^2 - b^2} - \operatorname{arc\,cos} \frac{a^2 + b^2 - 2r_0^2}{a^2 - b^2} \right).$$

Für unsere obige Annahme: $r_0 = a$, $\alpha_0 = \frac{1}{2}\pi$ und für $r = b$ folgt daraus, mit der Beachtung, daß dann r im Anfang abnimmt, wie dort:

$$\frac{1}{4} T = \frac{a b}{2 a v_0} (\operatorname{arc\,cos} -1 - \operatorname{arc\,cos} 1) = \frac{1}{2} \pi \frac{b}{v_0}$$

für die Zeit der Bewegung durch einen Quadranten.

§. 81.

Ein ferneres Beispiel bietet uns die Bewegung der Planeten um die Sonne, indem wir von ihrer gegenseitigen Wirkung aufeinander Umgang nehmen, und ihre Masse in ihren Mittelpunkten vereinigt denken, um sie als materielle Punkte betrachten zu können.

Die nach ihrem Entdecker Keppler benannten Gesetze dieser Bewegungen sind nämlich folgende drei:

1) Alle Planeten beschreiben ebene Curven, und ihre von dem Mittelpunkte der Sonne ausgehenden Fahrstrahlen beschreiben Sectoren, deren Oberflächen den Zeiten proportional sind.

2) Die Planetenbahnen sind Ellipsen, deren einen Brennpunkt der Mittelpunkt der Sonne einnimmt.

3) Die Quadrate der Umlaufszeiten der verschiedenen Planeten stehen in demselben Verhältnisse, wie die Würfel der großen Achsen ihrer Bahnen.

Aus dem ersten dieser Gesetze folgt nach §. 72, daß die Kraft, welche die Planeten in Bewegung erhält, in jeder Lage derselben gegen den Mittelpunkt der Sonne gerichtet sein muß.

Um sodann aus dem zweiten die sich darbietenden Folgerungen zu ziehen, namentlich die Intensität dieser bewegenden Kraft abzuleiten, sei der Mittelpunkt der Sonne der Anfang eines Polar-Systems, 2a die große Achse der Bahn eines der Planeten, e deren relative Excentricität, und ε der Winkel, welchen die Achse der Bahn mit der Polar-Achse

einschließt. Den Pol also in einem Brennpunkt angenommen, ist dann die Gleichung der Ellipse:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\omega-\varepsilon)} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{r} = \frac{1+e\cos(\omega-\varepsilon)}{a(1-e^2)} .$$

Die erste Ableitung derselben in Bezug auf ω zum Quadrat erhoben wird demnach:

$$\left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\omega}\right)^2 = \frac{e^2\sin^2(\omega-\varepsilon)}{a^2(1-e^2)^2} ,$$

und damit ergibt sich der Ausdruck:

$$\left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\omega}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1+e^2+2e\cos(\omega-\varepsilon)}{a^2(1-e^2)^2}$$

oder mit dem aus der Gleichung der Ellipse gezogenen Werthe von $e\cos(\omega-\varepsilon)$ nach den erforderlichen Reductionen:

$$\left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\omega}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{a(1-e^2)}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) ;$$

daraus folgt sofort nach Gleichung (87)

$$R = -m\frac{C^2}{a(1-e^2)}\cdot\frac{1}{r^2} .$$

Die bewegende Kraft ist demnach eine anziehende, gegen die Sonne hintreibende, und ihre Intensität steht für einen und denselben Planeten im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats seiner Entfernung von der Sonne.

Durch das dritte Gesetz endlich können wir die Wirkungen, welche diese Kraft auf die verschiedenen Planeten ausübt, unter sich vergleichen. Drücken wir nämlich die Constante C durch die Umlaufszeit T des Planeten und die Oberfläche O der beschriebenen Ellipse aus, wodurch man nach §. 71

$$C = \frac{2O}{T} = \frac{2\pi ab}{T} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}$$

erhält, so wird der vorhergehende Werth von R

$$R = -m\frac{4\pi^2a^3}{T^2}\cdot\frac{1}{r^2} .$$

Nach dem dritten Gesetze ist aber das Verhältniß $\frac{a^3}{T^2}$ für alle Planeten dasselbe; es kann sich demnach die bewegende Kraft nur proportional der Masse dieser Körper und verkehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung r von der Sonne ändern, und deßhalb kein Unterschied in der Wirkung jener Kraft in Betreff der Beschaffenheit der einzelnen Planeten stattfinden, so daß wenn zwei dieser Körper in ihren Bahnen ausgewechselt würden, jeder die Bewegung des andern annehmen müßte.

§. 82.

Nun wollen wir umgekehrt die Kraft als gegeben voraussetzen, und unsere Aufgabe für mehrere einfache Functionen der Entfernung möglichst allgemein und vollständig zu lösen versuchen.

Sei zuerst die Intensität der bewegenden Kraft der Entfernung des bewegten materiellen Punktes von dem festen proportional und für eine bestimmte Entfernung bekannt. Man wird sich damit wie in §. 52 diejenige Entfernung l berechnen, in welcher jene Intensität dem Gewichte $P = mg$ des bewegten materiellen Punktes an der Oberfläche der Erde gleich ist, wodurch man alsdann die Proportion:

$$R : P = r : l$$

und daraus den Werth:

$$R = P\frac{r}{l} \quad , \qquad \frac{R}{m} = g\,\frac{r}{l} = \frac{g}{l}\,r$$

erhält, und die Gleichungen eine solche Form annehmen, daß sich ihre Homogeneität leicht überblicken läßt.

Damit ergibt sich nun sogleich als Ausdruck für die Arbeit der Kraft in der Zeit t:

$$2\int_{r_0}^{r} dr\,.\,\frac{R}{m} = \frac{g}{l}\,(r^2 - r_0{}^2)$$

und es wird

$$v^2 = v_0{}^2 + \frac{g}{l}\,(r^2 - r_0{}^2)$$

der Ausdruck für das Quadrat der Geschwindigkeit. Ferner nimmt die Gleichung (68) die Form an:

$$\omega - \omega_0 = \mp \int_{r_0}^{r} dr \, . \, \frac{C}{\sqrt{v_0^2 - \frac{g}{l} r_0^2 + \frac{g}{l} r^2 + \frac{C^2}{r^2}}} \frac{d.\frac{1}{r}}{dr},$$

oder wenn man zur Vereinfachung

$$v_0^2 - \frac{g}{l} r_0^2 = 2\alpha C \quad , \quad \frac{g}{l} = \beta^2 \quad , \quad \left(\frac{1}{r}\right)^2 = z$$

setzt, wodurch man

$$\frac{d.\frac{1}{r}}{dz} = \frac{d.\frac{1}{r}}{dr} \cdot \frac{dr}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

findet, die Form:

$$2(\omega - \omega_0) = \mp \int_{z_0}^{z} dz \, . \, \frac{C}{\sqrt{\beta^2 + 2\alpha C z - C^2 z^2}} = \mp \int_{z_0}^{z} dz \, . \, \frac{C}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha - C z)^2}},$$

und das allgemeine Integral dieses Ausdruckes wird demnach

$$2(\omega - \omega_0) = \mp \left(\text{arc cos} \frac{\alpha - C z}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \text{arc cos} \frac{\alpha - C z_0}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right).$$

Lassen wir dann die Bewegung in der beliebig gerichteten Polar-Achse anfangen, so daß der erste Fahrstrahl r_0 in dieser Achse liegt, und $\omega_0 = 0$ ist, und bezeichnen wir den Winkel, dessen Cosinus $= \frac{\alpha - C z_0}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ ist, zur Abkürzung mit 2ε, so ergibt sich mit dem obern Zeichen, also wenn z im Anfang kleiner wird, oder r mit ω wächst, und mit der Beachtung, daß $\cos(\varepsilon - \omega) = \cos(\omega - \varepsilon)$

$$\frac{\alpha - C z}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \cos 2(\omega - \varepsilon)$$

oder in entwickelter Form und in Bezug auf z aufgelöst

$$C z = \alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left[\cos^2(\omega - \varepsilon) - \sin^2(\omega - \varepsilon) \right].$$

Diesen Ausdruck multiplicire man mit $\frac{1}{z} = r^2$, und setze x^2 für $r^2 \cos^2(\omega - \varepsilon)$, y^2 für $r^2 \sin^2(\omega - \varepsilon)$, $x^2 + y^2$ für r^2, so daß

die Achse der x mit der Richtung zusammenfällt, welche den Winkel ε mit der Polar=Achse bildet (Fig. 72 und 73), und man wird

$$C = \alpha(x^2 + y^2) - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,(x^2 - y^2)$$

oder in der gewöhnlichen Gestalt:

$$\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) y^2 + \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) x^2 = C$$

als Gleichung der Bahncurve in Bezug auf rechtwinklige Coordinaten finden. Diese Form zeigt, daß die Curve eine Ellipse oder Hyperbel sein wird, und daß ihr Mittelpunkt mit dem festen Punkte in der Richtung der Kraft zusammenfällt.

Der Coeffizient α, dessen eigentlicher Werth

$$\alpha = \frac{v_0^2 - \frac{g}{l} r_0^2}{2C} = \frac{v_0^2 - \frac{g}{l} r_0^2}{2 r_0 v_0 \sin \alpha_0}$$

ist, wird positiv sein, wenn $v_0^2 - \frac{g}{l} r_0^2 > 0$, und wenn C positiv ist; das Verhältniß $\beta^2 = \frac{g}{l}$ dagegen wird noch §. 70 positiv, wenn die Kraft eine abstoßende, negativ, wenn sie eine anziehende ist. Nehmen wir zuerst das letztere an, so wird

$$\alpha = \frac{v_0^2 + \beta^2 r_0^2}{2C}\,,$$

und hat dann immer dasselbe Zeichen wie C; die Gleichung der Bahn nimmt damit die Form an:

$$\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right) y^2 + \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right) x^2 = C\,,$$

und wird demnach, da $\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ immer positiv ist, die einer Ellipse auf Mittelpunkt und Achsen bezogen (Fig. 72).

Wird dagegen β^2 positiv, die Kraft als eine abstoßende vorausgesetzt, so können α und C gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben, und die Gleichung der Bahncurve kann die Form:

$$\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \pm \alpha\right) y^2 - \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \mp \alpha\right) x^2 = C$$

erhalten, welche zeigt, daß diese eine Hyperbel ist, deren Achse mit der Achse der y zusammenfällt (Fig. 73).

Die Ellipse wird ein Kreis, wenn $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = 0$ ist, d. h. wenn

$$(v_0^2 + \beta^2 r_0^2)^2 = 4\beta^2 C^2 = 4\beta^2 r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha_0 \ ;$$

des kann aber nur der Fall sein, wenn $\alpha_0 = \frac{1}{2}\pi$, $\sin\alpha_0 = 1$ ist; denn der vorstehende Ausdruck zeigt unter der Form:

$$v_0^4 + \beta^4 r_0^4 = 2\beta^2 r_0^2 v_0^2 (2\sin^2\alpha_0 - 1) \ ,$$

und wenn man beachtet, daß die Summe der Quadrate zweier Größen nie kleiner werden kann, als ihr doppeltes Product, daß derselbe nur noch für $2\sin^2\alpha_0 - 1 = 1$ möglich ist; dann ist aber:

$$(v_0^2 - \beta^2 r_0^2)^2 = 0 \quad , \qquad v_0^2 = \beta^2 r_0^2 = r_0^2 \frac{g}{l} = \alpha C \ ,$$

also auch die Gleichung des Kreises

$$y^2 + x^2 = \frac{l}{g} \cdot \frac{C^2}{r_0^2} = \frac{l}{g} v_0^2 = r_0^2$$

wie vorauszusehen war.

Unter derselben Voraussetzung: $v_0^2 = \beta^2 r_0^2$ wird im zweiten Falle, wo β^2 positiv ist, $\alpha = 0$, die Gleichung der Bahn demnach

$$\beta (y^2 - x^2) = C$$

und die Hyperbel eine gleichseitige.

Wäre ferner in einem besondern Falle $C = 0$, also entweder $r_0 = 0$, oder $v_0 = 0$ oder $\alpha_0 = 0$, so würde $\alpha = \infty$. In diesem Falle wird man die allgemeine Gleichung, die wir für die Bahncurve erhalten haben, durch α dividiren, und dann mit dem Werthe $\alpha = \infty$

$$y = 0$$

finden, woraus folgt, daß die Bewegung eine geradlinige wird, deren Richtung mit der Achse der x oder mit der Geraden zusammenfällt, welche mit der ursprünglichen Polar-Achse den Winkel ε bildet. Nun haben wir aber

$$\cos 2\varepsilon = \frac{\alpha - C z_0}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\alpha C - C^2 z_0}{C\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \ ;$$

oder da

$$C^2 z_0 = \frac{C^2}{r_0^2} = v_0^2 \sin^2\alpha_0 \quad , \qquad \alpha C = \frac{1}{2}(v_0^2 - \beta^2 r_0^2)$$

ist, in entwickelter Form:

$$\cos 2\varepsilon = \frac{v_0^2(1-2\sin^2\alpha_0)-\beta^2 r_0^2}{\sqrt{(v_0^2-\beta^2 r_0^2)^2+4\beta^2 r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha_0}} .$$

Wird also $C=0$, wegen $r_0=0$, so ergibt sich

$$\cos 2\varepsilon = 1-2\sin^2\alpha_0 = \cos 2\alpha_0 \quad , \qquad \varepsilon = \alpha_0$$

wie vorherzusehen war; ist dagegen $\alpha_0 = 0$, so hat man

$$\cos 2\varepsilon = 1 \quad , \qquad \varepsilon = 0$$

und die Bewegung geht in der Richtung des ersten Fahrstrahls vor sich; in dem Falle endlich wo $v_0 = 0$ wäre, hätte man zwar dasselbe Resultat, allein es ist einleuchtend, daß dann gar keine Bewegung stattfindet.

Um nun auch den Ausdruck für die Zeit der Bewegung darzustellen, gibt man der Gleichung (89) durch dieselben Substitutionen wie oben, die Form:

$$t = \mp \int_{z_0}^{z} dz . \frac{1}{2z\sqrt{\beta^2+2\alpha Cz-C^2z^2}} ,$$

unter welcher dieselbe nach den bekannten Regeln rational gemacht und integrirt werden kann. Es mag aber die Ausführung dem Leser zur Uebung empfohlen und nur bemerkt werden, daß je nachdem β^2 positiv oder negativ ist, die Zeit t durch einen Logarithmus oder durch eine Winkelfunction ausgedrückt erscheint, was wieder darauf hindeutet, daß im ersten Falle, welcher der Hyperbel entspricht, die Bewegung eine in gleichem Sinne fortgehende, im zweiten Falle, in der Ellipse, eine wiederkehrende oder periodische sein wird.

§. 83.

Die Gesetze der eben betrachteten Bewegungen können nämlich gemäß der in §. 65 gemachten Bemerkung viel einfacher als durch die Formeln des §. 79, durch die Gleichungen (68) gefunden werden, da man durch diese jede derselben auf zwei geradlinige zurückführen, und jede einzelne Ordinate des Bewegten unmittelbar in Function der Zeit erhalten kann.

Nehmen wir also die Ebene, in welcher die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit und der feste Richtungspunkt der Kraft liegt als Ebene der xy, diesen Punkt selbst als Anfang der Coordinaten, und drücken die Intensität der bewegenden Kraft, wie vorher, durch

$$R = P\,\frac{r}{l}$$

aus, so sind ihre beiden Componenten in der Ebene der Bewegung und parallel zu den beiden Coordinaten=Achsen:

$$X = P\frac{r}{l}\cdot\frac{x}{r} = P\frac{x}{l} \quad , \quad Y = P\frac{r}{l}\cdot\frac{y}{r} = P\frac{y}{l} ,$$

und demnach nur Functionen einer Veränderlichen, und zwar derjenigen, welche der parallelen Achse entspricht. Die dritte Componente Z ist natürlich Null, ebenso wie die entsprechende Componente der anfänglichen Geschwindigkeit; es genügen daher die beiden ersten der Gleichungen (68), welche nun die Form annehmen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P\frac{x}{l} \quad , \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = P\frac{y}{l} ,$$

zur Bestimmung der Bewegung; diese sind, wie man sieht, ganz unabhängig von einander und eine jede kann für sich allein auf dieselbe Weise, wie es in §. 52 geschehen ist, behandelt werden. Hier wollen wir jedoch die Integration der vorstehenden Gleichungen allgemeiner halten, und dann erst die so gefundenen unbestimmten Integrale auf unsern Fall anwenden.

Setzen wir dazu wie oben den Quotienten $\frac{P}{m} = g$, und die erste der obigen Gleichungen unter die Form:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \pm\frac{g}{l}x = \pm\beta^2 x ,$$

indem wir wie in dem vorhergehenden §. das Verhältniß $\frac{g}{l}$ durch β^2 ersetzen, und diese Größe für eine anziehende Wirkung negativ, für eine abstoßende positiv bezeichnen, und multipliciren wir dann auf beiden Seiten mit $2\frac{dx}{dt}$, so wird sie

$$\frac{d.\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{dt} = \pm\beta^2\frac{d.x^2}{dt}$$

und die erste Integration gibt den Ausdruck:

$$\overset{t}{\underset{t_0}{\Delta_t}}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \pm\overset{t}{\underset{t_0}{\Delta_t}}\beta^2 x^2 ,$$

und wenn wir die Differenz: $\pm\beta^2 x_0{}^2 - \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2$ der Werthe von $\pm\beta^2 x^2$ und $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ für den beliebigen Werth t_0 von t durch die constante Größe $\beta^2 h^2$ vorstellen, so wird das allgemeine Integral die Form:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \pm\beta^2(x^2 - h^2)$$

annehmen. Für die fernere Integration müssen wir nun zwischen den beiden in dieser Gleichung enthaltenen Fällen unterscheiden; wir erhalten dadurch für den ersten die Gleichung:

$$\frac{dx}{dt} = \beta\sqrt{x^2 - h^2}\,,$$

für den zweiten die Gleichung:

$$\frac{dx}{dt} = \beta\sqrt{h^2 - x^2}\,,$$

und die zweite Integration gibt für jene das allgemeine Integral

$$\beta(t - t_0) = \int_{x_0}^{x} dx\,.\,\frac{1}{\sqrt{x^2 - h^2}} = \log n\,\frac{x + \sqrt{x^2 - h^2}}{k}\,,$$

worin k für $x_0 + \sqrt{x_0{}^2 - h^2}$ steht; für diese dagegen

$$\beta(t - t_0) = \int_{x_0}^{x} dx\,.\,\frac{1}{\sqrt{h^2 - x^2}} = \text{arc sin}\,\frac{x}{h} - \varepsilon\,,$$

worin ebenso arc sin $\frac{x_0}{h}$ durch ε ersetzt ist.

Lösen wir nun diese Gleichungen in Bezug auf x auf, so ziehen wir aus der ersten, indem wir die Zahlen statt der Logarithmen nehmen, einmal

$$e^{\beta(t-t_0)} = \frac{x + \sqrt{x^2 - h^2}}{k}\,, \qquad e^{-\beta(t-t_0)} = k\,\frac{x - \sqrt{x^2 - h^2}}{h^2}$$

und dann durch Elimination der Wurzelgröße

$$x = \frac{1}{2}\,k\,e^{\beta(t-t_0)} + \frac{h^2}{2k}\,e^{-\beta(t-t_0)}.$$

In diesem Ausdrucke kann man aber die von dem beliebigen Werthe t_0 abhängigen Factoren

$$\frac{1}{2} k e^{-\beta t_0} \quad , \qquad \frac{h^2}{2k} e^{+\beta t_0} \quad .$$

durch die allgemeinen Größen A und B ersetzen, und erhält auf diese Weise den Ausdruck:

$$x = A e^{\beta t} + B e^{-\beta t}$$

als unbestimmtes Integral der Gleichung:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \beta^2 x \ .$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich aus der zweiten der obigen Gleichungen zuerst

$$x = h \sin(\beta t - \beta t_0 + \varepsilon)$$

oder durch Entwickelung

$$x = h \sin(\varepsilon - \beta t_0) \cos \beta t + h \cos(\varepsilon - \beta t_0) \sin \beta t$$

und wenn auch hier die von dem willkürlichen t_0 abhängigen Factoren:

$$h \sin(\varepsilon - \beta t_0) \qquad h \cos(\varepsilon - \beta t_0)$$

durch A und B ersetzt werden, so wird man

$$x = A \cos \beta t + B \sin \beta t$$

als unbestimmtes Integral der Gleichung:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \beta^2 x$$

erhalten.

Die allgemeine Auflösung unserer Aufgabe liegt also in dem Falle einer anziehenden Kraft in den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} x = A \cos \beta t + B \sin \beta t \ , \\ y = A' \cos \beta t + B' \sin \beta t \ , \end{array}\right\} \qquad (A.$$

und im Falle einer abstoßenden Wirkung in den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} x = A e^{\beta t} + B e^{-\beta t} \ , \\ y = A' e^{\beta t} + B' e^{-\beta t} \ . \end{array}\right\} \qquad (B.$$

Jede dieser Gleichungen enthält aber zwei Coeffizienten, welche aus den Gegebenen der Aufgabe zu bestimmen sind, und dazu reicht eine einzige Gleichung nicht hin; es müssen also noch die ersten Abgeleiteten in Bezug auf t, nämlich für die Gleichungen (A) die Aenderungsgesetze:

$$A'.)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -A\beta \sin\beta t + B\beta \cos\beta t \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -A'\beta \sin\beta t + B'\beta \cos\beta t \end{cases}$$

und für die Gleichungen (B) die Aenderungsgesetze:

$$B'.)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A\beta e^{\beta t} - B\beta e^{-\beta t} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = A'\beta e^{\beta t} - B'\beta e^{-\beta t} \end{cases}$$

zu Hülfe genommen werden, welche wie wir wissen bei der Bewegung die zu den Coordinaten-Achsen parallelen Componenten der Geschwindigkeit ausdrücken, woraus hervorgeht, daß außer der Kenntniß der Coordinaten des Bewegten für eine bestimmte Zeit t_0, die man in die Gleichungen (A) oder (B) einzuführen hat, auch noch die Kenntniß der Componenten der Geschwindigkeit für denselben Augenblick nothwendig ist, um sie in die Gleichungen (A') oder (B') substituiren, und damit die vier Coeffizienten A, B, A', B' bestimmen zu können.

§. 84.

Um diese Gleichungen nun für unsern Fall anwenden zu können, setze ich voraus, daß die Achse der x durch den anfänglichen Ort des Bewegten gelegt und die anfängliche Entfernung und Geschwindigkeit wieder r_0 und v_0 sei, und bezeichne wie früher den Winkel, welchen die Richtung der letztern mit dem anfänglichen Fahrstrahl oder jetzt mit der Achse der x bildet, mit α_0; man hat dann zugleich

$$t = 0\ ,\quad x = r_0\ ,\quad y = 0\ ,\quad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha_0\ ,\quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha_0\ ,$$

und die Gleichungen (A) und (A') werden dadurch

$$r_0 = A \qquad , \qquad 0 = A'\ ,$$
$$v_0 \cos\alpha_0 = B\beta \quad , \quad v_0 \sin\alpha_0 = B'\beta\ ;$$

daraus ergeben sich die vier Coeffizienten

$$A = r_0 \quad , \quad A' = 0 \quad , \quad B = \frac{v_0 \cos\alpha_0}{\beta} \quad , \quad B' = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{\beta} .$$

Für den Fall einer anziehenden Wirkung sind sonach die Gleichungen der Bewegung:

$$\left.\begin{aligned} x &= r_0 \cos\beta t + \frac{v_0}{\beta} \cos\alpha_0 \sin\beta t \\ y &= \frac{v_0}{\beta} \sin\alpha_0 \sin\beta t \end{aligned}\right\} \qquad (C.$$

und die Ausdrücke für die Componenten der Geschwindigkeit sind

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_0 \cos\alpha_0 \cos\beta t - \beta r_0 \sin\beta t \\ u_y &= v_0 \sin\alpha_0 \cos\beta t \ . \end{aligned}\right\} \qquad (D.$$

Eliminirt man nun in den Gleichungen (C) die Veränderliche t, indem man zuerst in der obern $\sin\beta t$ durch seinen Werth aus der untern ersetzt, wodurch jene die Form:

$$r_0 \sin\alpha_0 \cos\beta t = x \sin\alpha_0 - y \cos\alpha_0 \qquad (a.$$

annimmt, diese dann ins Quadrat erhebt, und $\cos^2\beta t = 1 - \sin^2\beta t$ aufs Neue durch die untere Gleichung ausdrückt, so findet man

$$\beta^2 r_0^2 y^2 + v_0^2 (x \sin\alpha_0 - y \cos\alpha_0)^2 = r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha_0 = C^2$$

als Gleichung der von dem Bewegten beschriebenen Ellipse, welche wie man sieht, ihren Mittelpunkt im Anfangspunkt, aber ihre Achsen gegen die der Coordinaten geneigt hat.

Diese Gleichung wird daher einfacher, wenn man die Bewegung von einem solchen Punkte anfangen läßt, wo die Geschwindigkeit senkrecht zum Fahrstrahl gerichtet, oder $\alpha_0 = \frac{1}{2}\pi$ ist; sie wird nämlich

$$\beta^2 r_0^2 y^2 + v_0^2 x^2 = r_0^2 v_0^2 \quad , \qquad \frac{\beta^2 y^2}{v_0^2} + \frac{x^2}{r_0^2} = 1$$

und zeigt, daß dann der erste Fahrstrahl r_0 die der Achse der x entsprechende Achse der Ellipse ist; die andere der Achse der y entsprechende ist $\frac{v_0}{\beta} = v_0 \sqrt{\frac{1}{g}}$. Soll demnach die Bewegung in einem Kreise vor sich gehen, so muß

$$r_0 = v_0 \sqrt{\frac{1}{g}} \quad , \quad v_0 = \beta r_0$$

werden; dann hat man aber auch

$$u_x = - v_0 \sin \beta t \quad , \quad u_y = v_0 \cos \beta t$$

und folglich

$$v = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = v_0 \,;$$

die Bewegung wird also in diesem Falle eine gleichförmige.

Die Gleichungen (C) und (D), welche die Lage und Geschwindigkeit des Bewegten am Ende einer gegebenen Zeit ausdrücken, zeigen, daß die Bewegung nach jedem Umlauf, wozu die Zeit:

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = 2\,\pi \sqrt{\frac{1}{g}}$$

erfordert wird, wieder von vorn anfängt; insbesondere ersieht man aus denselben, daß

1) für $t = 0$, $x = r_0$, $y = 0$, $u_x = v_0 \cos \alpha_0$, $u_y = v_0 \sin \alpha_0$ wird, übereinstimmend mit unserer Annahme,

2) daß für $\beta t = \frac{1}{2}\pi$ oder $t = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{1}{g}}$, $x = v_0 \sqrt{\frac{1}{g}} \cos \alpha_0$, $y = v_0 \sqrt{\frac{1}{g}} \sin \alpha_0$, $u_x = - r_0 \sqrt{\frac{g}{1}}$, $u_y = 0$ wird, y also seinen größten Werth hat, und die Geschwindigkeit zur Achse der x parallel ist, was offenbar dem Punkte B, Fig. 74, entspricht, wo die Tangente zum Durchmesser AC parallel ist, also dem Endpunkte des conjugirten Durchmessers BD;

3) daß für $\beta t = \pi$ oder $t = \pi \sqrt{\frac{1}{g}}$, $x = - r_0$, $y = 0$, $u_x = - v_0 \cos \alpha_0$, $u_y = - v_0 \sin \alpha_0$ wird, was im Punkte C stattfinden muß; hier ist demnach die Geschwindigkeit dieselbe, wie in A, nur im entgegengesetzten Sinne gerichtet;

4) daß für $\beta t = \frac{3}{2}\pi$ oder $t = \frac{3}{2}\pi \sqrt{\frac{1}{g}}$ der Bewegte in D

ankommt, wo $x = -v_0 \sqrt{\frac{l}{g}} \cos\alpha_0$, $y = -v_0 \sqrt{\frac{l}{g}} \sin\alpha_0$, $u_x = r_0 \sqrt{\frac{g}{l}}$, $u_y = 0$ ist, und endlich

5) daß er für $\beta t = 2\pi$, $t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, wie schon erwähnt, die Bewegung in A von neuem beginnt.

Der Bewegte gebraucht also, wie man daraus allgemein schließen wird, immer von einem Endpunkt eines Durchmessers bis zu dem der Richtung der Bewegung nach nächsten Ende des conjugirten Durchmessers ein Viertel der ganzen Umlaufszeit, und diese Umlaufszeit ist unabhängig von seiner anfänglichen Lage und Geschwindigkeit; sie wird blos durch die Intensität der bewegenden Kraft bestimmt.

Diese Verhältnisse werden übrigens noch anschaulicher durch die Gleichung (a) ausgedrückt, wenn man beachtet, daß

$$x \sin\alpha_0 - y \cos\alpha_0$$

die Länge der Senkrechten OP, Fig. 74, vorstellt, welche vom Anfangspunkt O auf eine durch den Punkt M oder xy gezogene Gerade MP gefällt werden kann, die zur Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit oder zu dem conjugirten Durchmesser BD parallel ist; ebenso ist, wie schon früher bemerkt wurde, $r_0 \sin\alpha_0$ die Länge der auf die Richtung Aa oder av_0 der anfänglichen Geschwindigkeit gefällten Senkrechten Oa. Bezeichnen wir also die letztere mit p_0, die erstere mit p, so ergibt sich aus der Gleichung (a) einfach

$$\cos\beta t = \frac{p}{p_0},$$

und daraus ist leicht zu schließen, daß wenn man mit dem Halbmesser p_0 von O aus einen Kreis beschreibt, und von irgend einem Punkte M die zu OB parallele MP zieht, der dadurch abgeschnittene Bogen am die Zeit βt vorstellt.

Diese Verhältnisse nach den Gleichungen (C) und (D) in dem einfacheren Falle zu betrachten, wo $\alpha_0 = \frac{1}{2}\pi$ ist, und diese Gleichungen mit den ähnlichen in §. 52 zu vergleichen, soll dem Leser überlassen

bleiben, und nur bemerkt werden, daß man durch diese Vergleichung zu dem folgenden Schlusse kommt:

Wenn drei Atome gleichzeitig von den Punkten A und a ausgehen, der eine von a mit der Geschwindigkeit Null, der zweite von a mit der Geschwindigkeit $r_0 \sqrt{\frac{g}{l}} \sin \alpha_0$, welche senkrecht zu dem Fahrstrahl Oa gerichtet ist, und der dritte von A mit einer beliebigen zu Oa senkrecht gerichteten Geschwindigkeit, und die alle drei derselben anziehenden Kraft unterworfen sind, von denen sich also der erste in der Geraden ac, der zweite in dem Kreise abc, und der dritte in einer Ellipse ABC bewegen wird, so befinden sich diese drei Atome in jedem Augenblicke auf derselben zur ac senkrechten Geraden, z. B. das erste in P, das zweite in m, und das dritte in M.

Für den Fall, wo die Kraft eine abstoßende Wirkung äußert, wo also die Gleichungen (B) anzuwenden sind, wird man finden, daß diese unter denselben Voraussetzungen für die anfängliche Lage und Geschwindigkeit wie vorher, die Formen annehmen:

$$\text{E.)} \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\beta r_0 + v_0 \cos \alpha_0}{2\beta} e^{\beta t} + \frac{\beta r_0 - v_0 \cos \alpha_0}{2\beta} e^{-\beta t} \\ y &= \frac{v_0 \sin \alpha_0}{2\beta} \left(e^{\beta t} - e^{-\beta t} \right), \end{aligned} \right.$$

und wenn man die erste unter die Form

$$x = \frac{1}{2} r_0 \left(e^{\beta t} + e^{-\beta t} \right) + \frac{v_0 \cos \alpha_0}{2\beta} \left(e^{\beta t} - e^{-\beta t} \right)$$

bringt, und den Factor $\frac{v_0}{2\beta} \left(e^{\beta t} - e^{-\beta t} \right)$ mittels der zweiten eliminirt, so ergibt sich:

$$\text{b.)} \qquad x \sin \alpha_0 - y \cos \alpha_0 = \frac{1}{2} r_0 \sin \alpha_0 \left(e^{\beta t} + e^{-\beta t} \right)$$

oder mit derselben Bezeichnung wie oben

$$p = \frac{1}{2} p_0 \left(e^{\beta t} + e^{-\beta t} \right).$$

Dieser Ausdruck zeigt dann durch seine Vergleichung mit der Gleichung der Kettenlinie, deren Ableitung man im 3ten Buche finden wird, daß wenn man über der verlängerten auf die Richtung Aa der anfäng-

lichen Geschwindigkeit gefällten Senkrechten Oa, Fig. 75, als Achse der veränderlichen p und mit dem Parameter $Oa = p_0$ eine Kettenlinie amb construirt, und von irgend einem Punkte M oder M' der Bahn des Bewegten eine Parallele MP zu Aa zieht, das durch die Kettenlinie abgeschnittene Stück Pm der Zeit t proportional ist; denn offenbar stellt die Senkrechte OP = p die Ordinate des Punktes m der Kettenlinie vor, dessen Abscisse Pm ist; bezeichnet man diese mit q, so hat man nach der Gleichung der Kettenlinie

$$p = \frac{1}{2} p_0 \left(e^{\frac{q}{p_0}} + e^{-\frac{q}{p_0}}\right),$$

und durch Vergleichung mit dem vorhergehenden Ausdrucke

$$\frac{q}{p_0} = \beta t ;$$

woraus dann folgt, daß man die Zeit, welche der Bewegte braucht um von A nach M zu gelangen, wenn v_0 positiv ist, oder um den Bogen AM' zu beschreiben, wenn v_0 negativ ist, durch das von der Kettenlinie abgeschnittene Stück Pm der zu Aa Parallelen Pm anschaulich darstellen kann.

In der Figur ist nach dem frühern bereits angedeutet, daß die Bahn eine Hyperbel ist; die Gleichung dieser Curve ergibt sich aus den vorhergehenden Gleichungen wie in dem vorigen Falle, indem man die Gleichung (b) zum Quadrat erhebt und die Summe

$$e^{2\beta t} + e^{-2\beta t}$$

mittels der zweiten der Gleichungen (E) daraus eliminirt; man findet so

$$v_0^2 (x \sin \alpha_0 - y \cos \alpha_0)^2 - \beta^2 r_0^2 y^2 = C^2,$$

und sieht, daß diese Gleichung aus der frühern der Ellipse einfach durch den Zeichenwechsel von β^2 folgt, wie es in der Natur der Sache liegt.

§. 85.

In §. 81 haben wir aus den Keppler'schen Gesetzen den Schluß gezogen, daß die Kraft, welche die Planeten in ihren Bahnen erhält, als eine von dem Mittelpunkte der Sonne ausgehende angenommen werden muß, und daß ihre Intensität im umgekehrten Verhältnisse zu dem Quadrate der Entfernung eines Planeten von der Sonne steht.

Nehmen wir nun diesen Fall ebenfalls umgekehrt auf, indem wir dieses Gesetz für die Kraft als gegeben voraussetzen, und die Gesetze der daraus erfolgenden Bewegungen untersuchen.

Sei also $P = mk$ die Intensität dieser anziehenden Kraft, wenn sich der Bewegte, dessen Masse wie immer mit m bezeichnet ist, in der Entfernung l von dem festen Punkte befindet, gegen welchen die Kraft fortwährend gerichtet bleibt, und den wir als Anfang der Polarcoordinaten r und ω annehmen, die Polar-Achse natürlich in der Ebene der Bewegung vorausgesetzt. In der Entfernung r wird die Kraft durch

$$R = -P\frac{l^2}{r^2} = -mk\frac{l^2}{r^2}$$

ausgedrückt sein, und demnach die Arbeit derselben vom Anfang der Zeit an den Werth:

$$\int_{r_0}^{r} dr . R = -Pl^2 \int_{r_0}^{r} dr . \frac{1}{r^2} = Pl^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

erhalten. Der Ausdruck für die Aenderung der lebendigen Kraft des Bewegten nimmt dadurch die Form an:

$$mv^2 - mv_0^2 = 2mkl^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

und gibt die Geschwindigkeit durch die Gleichung:

$$v^2 = v_0^2 - 2k\frac{l^2}{r_0} + 2k\frac{l^2}{r} .$$

Führt man dann denselben Werth von $\int_{r_0}^{r} dr . R$, nachdem er durch m dividirt worden, in die Gleichung (89) ein, so wird diese

$$\omega - \omega_0 = \mp \int_{r_0}^{r} dr . \frac{C\dfrac{d.\frac{1}{r}}{dr}}{\sqrt{v_0^2 - 2k\dfrac{l^2}{r_0} + 2k\dfrac{l^2}{r} + \dfrac{C^2}{r^2}}}$$

oder, wenn man zur Abkürzung wieder

$$v_0^2 - 2k\frac{l^2}{r_0} = \alpha^2 \quad . \quad kl^2 = \beta C \quad , \quad \frac{1}{r} = z$$

setzt, und die beiden letzten Glieder unter dem Wurzelzeichen zu einem vollständigen Quadrat ergänzt:

$$\omega - \omega_0 = \mp \int_{z_0}^{z} dz \, . \frac{C}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - (\beta - Cz)^2}} \; ;$$

die Ausführung der angedeuteten Integration gibt also

$$\omega - \omega_0 = \mp \left\{ \text{arc cos} \frac{\beta - Cz}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \text{arc cos} \frac{\beta - Cz_0}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right\} .$$

Den Winkel, dessen Cosinus durch

$$\frac{\alpha - Cz_0}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

ausgedrückt ist, bezeichne ich mit ε_0, und nehme das obere von beiden Zeichen, so daß r im Anfang mit ω wachsend, und der Winkel α_0 der anfänglichen Geschwindigkeit mit dem anfänglichen Fahrstrahl r_0 als ein spitzer vorausgesetzt ist; man zieht damit aus dem vorhergehenden Ausdruck in Bezug auf z den Werth:

$$Cz = \beta - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos (\omega_0 + \varepsilon_0 - \omega)$$

und wenn darin für z wieder $\frac{1}{r}$ eingeführt, und von Neuem $\omega_0 + \varepsilon_0$ durch $\pi + \varepsilon$ ersetzt und beachtet wird, daß

$$\cos (\pi + \varepsilon - \omega) = \cos (\pi - (\omega - \varepsilon)) = - \cos (\omega - \varepsilon)$$

ist, so folgt

$$r = \frac{C}{\beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos (\omega - \varepsilon)} \, . \qquad (A.$$

Dieser Ausdruck zeigt sehr große Aehnlichkeit mit der Form der Polargleichung der Curven des zweiten Grades, wenn der Pol im Brennpunkt sich befindet, nämlich mit der Gleichung:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos (\omega - \varepsilon)} ,$$

worin p den Parameter der Curve oder die auf der großen Achse errichtete Ordinate im Brennpunkt, e die relative Excentrizität oder das Verhältniß der Entfernung des Brennpunktes vom Mittelpunkte zu der halben großen Achse, und ε den Winkel zwischen dieser letztern und der

Polar-Achse bezeichnet, von welcher aus der veränderliche Winkel ω gemessen wird. Diese Gleichung gehört demnach einer Ellipse an, wenn $e < 1$, einer Hyperbel, wenn $e > 1$, und einer Parabel, wenn $e = 1$ ist. Für die beiden ersten Curven gibt man derselben auch die Formen:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\omega-\varepsilon)} \quad , \qquad r = -\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\omega-\varepsilon)} \, ,$$

indem man die halbe große Achse mit a bezeichnet. — Bringen wir also die oben gefundene Gleichung (A) unter die Form:

$$r = \frac{\frac{C}{\beta}}{1+\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}}\cos(\omega-\varepsilon)} \, ,$$

um sie mit den vorhergehenden vergleichen zu können, so sehen wir zuerst, daß

$$\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}} = e \quad , \qquad \frac{C}{\beta} = p = a(1-e^2)$$

zu setzen ist; daraus folgt dann

a.) $$1 - e^2 = -\frac{\alpha^2}{\beta^2} \quad , \qquad a = -\frac{\beta C}{\alpha^2} \, ,$$

oder wenn man für α^2 und βC ihre Werthe einführt:

$$a = -\frac{kl^2}{\alpha^2} = -\frac{kl^2}{v_0{}^2 - 2k\frac{l^2}{r_0}} = r_0 \frac{kl^2}{2kl^2 - v_0{}^2 r_0}$$

$$e = \sqrt{1-\frac{C^2}{a\beta C}} = \sqrt{1-\frac{r_0{}^2 v_0{}^2 \sin^2\alpha_0}{akl^2}} \, .$$

Die Hauptform der Bahn des Bewegten hängt demnach blos von dem Zeichen von a oder wie dieses selbst von dem Zeichen von α^2, d. i. von dem Zeichen der Differenz:

$$v_0{}^2 - 2k\frac{l^2}{r_0}$$

ab, also blos von der Größe der anfänglichen Geschwindigkeit in Bezug auf die anfängliche Entfernung des Bewegten, aber nicht von ihrer

Richtung, und zwar wird nach den vorhergehenden Ausdrücken die Bahn des Bewegten

eine Ellipse, wenn $\frac{2kl^2}{r_0} - v_0^2 > 0$

eine Parabel, wenn $\frac{2kl^2}{r_0} - v_0^2 = 0$

eine Hyperbel, wenn $\frac{2kl^2}{r_0} - v_0^2 < 0$

ist. Um aber die Bedeutung dieser Bedingungen kennen zu lernen, bringt man die mittlere unter die Form:

$$v^2 = \frac{2kl^2}{r}$$

indem man v_0 und r_0 veränderlich nimmt, und nun diesen Werth mit dem obigen allgemeinen von v^2 vergleicht. Man sieht, daß jener Ausdruck in den vorhergehenden übergeht, wenn dort $v_0 = 0$, $r_0 = \infty$ gesetzt wird, daß also dieser letztere die Geschwindigkeit ausdrückt, welche der Bewegte erlangen müßte, wenn er aus unendlicher Entfernung mit der anfänglichen Geschwindigkeit Null durch die Wirkung unserer Kraft in gerader Richtung gegen den Pol bis in die Entfernung r_0 bewegt würde, wozu übrigens, wie aus dem Werthe von t in §. 53 zu ersehen ist, eine unendlich große Zeit erforderlich wäre.

Auch der Ausdruck für die Achse a der Curve ist ebenso wie der für die Geschwindigkeit v unabhängig von der Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit; diese Richtung hat jedoch Einfluß auf die Excentricität und auf den Parameter der Bahncurve, wie man aus dem Ausdrucke:

$$p = \frac{C}{\beta} = \frac{C^2}{\beta C} = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha_0}{kl^2}$$

ersehen wird, aus welchem insbesondere für die Parabel mit der obigen Bedingung der einfache Werth:

$$p = \frac{1}{2} r_0 \sin^2\alpha_0$$

gezogen wird.

Mit dem Werthe von a kann man nun auch dem allgemeinen Werthe der Geschwindigkeit eine einfachere Form geben, nämlich die Form:

$$v^2 = kl^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \qquad \text{(B.}$$

welche sich geradezu auf die Ellipse bezieht; für die Hyperbel hat man nur das Zeichen von a zu ändern, und für die Parabel wird $\frac{1}{a} = 0$, also

$$v^2 = \frac{2kl^2}{r} = v_0^2 \frac{r_0}{r} ,$$

wie in §. 77.

Will man endlich die Bahncurve durch eine Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten ausdrücken, so wird man die Achse der x mit der Hauptachse der Curve zusammenfallen lassen, und demnach

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad r \cos(\omega - \varepsilon) = x$$

in die Polargleichung einführen; mit dem letztern Werthe nimmt sie zuerst die Form an:

$$\beta r = C - x\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

und nachdem diese zum Quadrat erhoben worden, findet man mit dem ersten:

$$\beta^2 y^2 - \alpha^2 x^2 + 2Cx\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = C^2 .$$

Diese Gleichung enthält noch ein Glied mit x und ein constantes Glied, weil der Anfangspunkt der Coordinaten zwar auf den Achsen der Curve, aber weder im Mittelpunkte noch im Scheitel liegt. Substituirt man daher $x = x' + c$, und setzt das Glied mit x' gleich Null, so erhält man die Mittelpunktsgleichung; macht man dagegen das neue constante Glied Null, so ergibt sich die Scheitelgleichung. Der Coeffizient von x' wird

$$2C\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 2\alpha^2 c$$

und gibt

$$c = ae = \frac{\beta C}{\alpha^2}\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}} .$$

Wird dann die Größe c in der neuen Gleichung der x' durch diesen Werth eliminirt, so erhält man einfach:

$$\beta^2 y^2 - \alpha^2 x'^2 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} C^2 ,$$

oder in anderer Form

$$\frac{\alpha^2}{C^2} y^2 - \frac{\alpha^4}{\beta^2 C^2} x'^2 = -1 ,$$

und man sieht daraus wieder, daß diese Gleichung die einer Ellipse ist, wenn α^2 einen negativen Werth hat, daß sie einer Hyperbel angehört, wenn α^2 positiv ist, und daß sie illusorisch wird, wenn man $\alpha = 0$ hat, weil sie sich in diesem Falle auf die Parabel bezieht und es für diese keinen Mittelpunkt gibt; in dem ersten Falle erkennt man auch leicht, daß

$$\frac{\beta C}{\alpha^2} = a \quad \text{und} \quad \frac{C}{\alpha} = b$$

die beiden Halbachsen der Ellipse sind.

Um die Gleichung der Parabel zu erhalten, wird man sogleich in der auf den Brennpunkt bezogenen Gleichung $\alpha^2 = 0$ setzen, und dadurch die Gleichung

$$\beta^2 y^2 = C(C - 2\beta x)$$

finden, welche zeigt, daß der Scheitel der Parabel in einer Entfernung:

$$x = \frac{C}{2\beta}$$

von dem Anfangspunkt auf der positiven Seite der x liegt, daß aber die Achse der Curve im Sinne der negativen x gerichtet, und der Parameter derselben $p = \frac{C}{\beta}$ ist, wie wir schon wissen.

§. 86.

Es erübrigt uns nun noch, die Beziehungen zwischen der Lage des Bewegten und der Zeit der Bewegung festzustellen. Dazu gibt uns wieder die Gleichung (89) mit den frühern Abkürzungen und mit der Abänderung, daß α^2 für $\frac{2kl^2}{r_0} - v_0^2$, also mit entgegengesetztem Zeichen genommen wird, so daß sich die Untersuchung geradezu auf die Bewegung in der Ellipse bezieht, den Ausdruck:

$$t = \pm \int_{r_0}^{r} dr \,.\, \frac{1}{\sqrt{-\alpha^2 + 2\beta C \frac{1}{r} - C^2 \frac{1}{r^2}}} \,,$$

welchem man dann mit den aus den Gleichungen (a) gezogenen Werthen:

$$C^2 = a^2 \frac{\alpha^4}{\beta^2} = a^2 \alpha^2 (1 - e^2) \quad , \qquad \beta C = a \alpha^2 \quad ,$$

die Form geben kann:

$$a\alpha t = \pm \int_{r_0}^{r} dr \, . \frac{r}{\sqrt{e^2 - 1 + \frac{2r}{a} - \frac{r^2}{a^2}}} \, .$$

Beachtet man ferner, daß der größte und kleinste Werth von r in der Ellipse $a(1+e)$ und $a(1-e)$ ist, daß man daher jeden beliebigen Werth dieser Größe durch

$$r = a(1 - e \cos u)$$

vorstellen kann, so ist leicht zu sehen, daß das vorhergehende Integral mit diesem Werthe rational gemacht werden kann, und die Form annimmt:

$$\frac{\alpha}{a} t = \pm \int_{u_0}^{u} du . (1 - e \cos u) \, ,$$

also durch Ausführung der angedeuteten Integration und mit dem obern Zeichen

$$\frac{\alpha}{a} t = u - u_0 - e(\sin u - \sin u_0)$$

gibt. Dieser Ausdruck verwandelt sich durch Einführung der Werthe von u und α in den folgenden:

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{k}{a}} . t = \arccos\frac{a-r}{ae} - e\sqrt{e^2 - 1 + \frac{2r}{a} - \frac{r^2}{a^2}} + u_0 - e \sin u_0 \, ,$$

aus welchem man für $r = a(1-e)$, also für die Zeit, welche der Bewegte braucht, um vom Anfangspunkt der Bewegung bis in den dem Brennpunkt zunächstliegenden Scheitel der großen Achse zu gelangen, den Werth:

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{k}{a}} . t = u_0 - e \sin u_0$$

zieht; dadurch ergibt sich dann ein einfacherer allgemeiner Ausdruck für die Zeit, nämlich:

C.) $$n t = u - e \sin u \, ,$$

indem man dieselbe von dem Augenblicke an zählt, wo der Bewegte durch den dem Brennpunkt zunächst liegenden Scheitel der großen Achse

geht, und den Coeffizient von t durch n abkürzt. Für die ganze Umlaufszeit hat man offenbar $u = 2\pi$ zu nehmen, und findet damit

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{k l^2}}.$$

Würden sich demnach mehrere materielle Punkte mit verschiedenen anfänglichen Entfernungen und Geschwindigkeiten also auch in verschiedenen Ellipsen vermöge derselben Kraft um denselben festen Punkt bewegen, so würde für alle derselbe Werth für k und l bleiben; es müßte also auch für einen jeden von ihnen der Quotient

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k l^2}{4\pi^2}$$

den gleichen Werth haben, und demnach für alle das dritte Keppler'sche Gesetz gelten.

Mittels der obengefundenen Ausdrücke kann man nun leicht die Zeit der Bewegung bestimmen, wenn die Lage des Bewegten als bekannt vorausgesetzt wird; denn für ein gegebenes ω erhält man aus der Gleichung der Curve den entsprechenden Werth von r, und mit diesem durch die Gleichung (C) in der entwickelten Form:

$$\sqrt{\frac{k l^2}{a^3}}\, t = \text{arc cos} \frac{a - r}{a e} - e \sqrt{e^2 - 1 + \frac{2r}{a} - \frac{r^2}{a^2}}$$

unmittelbar den Werth von t, welcher sich indessen leichter mittels des Hülfswinkels $u = \text{arc cos} \frac{a - r}{a e}$ und der Gleichung (C) in ihrer oben angegebenen Form berechnen läßt.

Die umgekehrte Aufgabe: die Lage des Bewegten für eine gegebene Zeit zu bestimmen, das sogenannte Keppler'sche Problem hat aber, namentlich für die Lehre von der Planetenbewegung und deren Anwendung auf die Astronomie, eine viel größere Wichtigkeit, und gerade diese Aufgabe kann nicht direct gelöset werden, da man aus der Gleichung (C) keinen allgemeinen begrenzten Werth für u in Function von t erhalten kann. Man muß also für gegebene Zahlenwerthe von t die entsprechenden für u aus der genannten Gleichnng annäherungsweise berechnen, und damit den entsprechenden Werth für r durch die Gleichung:

$$r = a(1 - e \cos u)$$

bestimmen; führt man alsdann diesen in die bekannte Gleichung der Curve ein, so gibt diese auch den Winkel ω. Es ist jedoch für diesen Zweck einfacher, zwischen der Gleichung der Curve und der vorstehenden den Fahrstrahl r zu eliminiren, und ω unmittelbar in Function von u auszudrücken.

Die Polar-Gleichung der Curve auf die große Achse bezogen gibt

$$\frac{r}{a} = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \omega},$$

und mittels der vorhergehenden Gleichung erhält man demnach die Beziehung:

$$\frac{1 - e^2}{1 + e \cos \omega} = 1 - e \cos u,$$

woraus man leicht die Werthe:

$$\cos \omega = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}, \quad \cos u = \frac{\cos \omega + e}{1 + e \cos \omega}$$

zieht und schließt, daß für $e = 0$, $u = \omega$ wird. Es ergeben sich daraus ferner die Ausdrücke:

$$1 - e \cos \omega = \frac{(1 + e)(1 - \cos u)}{1 - e \cos u}, \quad 1 + \cos \omega = \frac{(1 - e)(1 + \cos u)}{1 - e \cos u},$$

und wenn man dann den ersten derselben durch den zweiten dividirt, und die bekannte Beziehung:

$$\tang \frac{1}{2} \omega = \sqrt{\frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega}}$$

beachtet, so findet man die einfache Gleichung:

$$\tang \frac{1}{2} \omega = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tang \frac{1}{2} u .$$

Es dürfte indessen nicht überflüssig sein, dasselbe Ergebniß aus den Gleichungen der Bewegungen selbst abzuleiten. Wir haben nämlich oben schon durch Elimination von r mittels der Veränderlichen u als Aenderungsgesetz von t in Bezug auf u den Ausdruck

$$\alpha \frac{dt}{du} = \pm a (1 - e \cos u)$$

erhalten, und daraus den Werth von t gezogen; multiplicirt man aber diese Gleichung mit der Gleichung:

$$r^2 \frac{d\omega}{dt} = C \ ,$$

so ergibt sich mit der Beachtung, daß $r^2 = a^2(1 - e\cos u)^2$, $a\alpha = \frac{\beta C}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{1-e^2}$ ist, und mit Beibehaltung des obern Zeichens, das Aenderungsgesetz:

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e\cos u} \ .$$

Setzt man ferner:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}u = z \ , \qquad \cos u = (1 - z^2)\cos^2\frac{1}{2}u = \frac{1-z^2}{1+z^2} \ ,$$

so findet man für das vorhergehende Aenderungsgesetz das folgende:

$$\frac{d.\frac{1}{2}\omega}{dz} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e+z^2(1+e)}$$

und wenn ω mit u und z zugleich Null wird, das allgemeine Integral:

$$\frac{1}{2}\omega = \int_{z_0}^{z} dz . \frac{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}}{1 + \frac{1+e}{1-e}z^2} = \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,z \ ;$$

also auch umgekehrt:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,z = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}u \ ,$$

wie vorher.

§. 87.

In den drei Gleichungen

$$nt = u - e\sin u$$

$$r = a(1 - e\cos u) \ , \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}u$$

ist also die Auflösung des genannten Problem's enthalten, und es handelt sich nun darum, aus der ersten dieser Gleichungen den Werth von u zu ziehen, was ebenso wie die Bestimmung der Lage des

Bewegten annähernd durch eine ziemlich einfache Construction erreicht werden kann.

Untersuchen wir dazu vor Allem die Bedeutung des Winkels u, und sehen wir, wie man die beiden Coordinaten r und ω oder die Lage des Bewegten durch Zeichnung finden kann, wenn der Winkel u bekannt ist.

Die oben gemachte Bemerkung, daß für $e = 0$, also im Kreise, die Winkel u und ω gleichbedeutend werden, führt schon darauf, daß der Winkel u seinen Scheitel im Mittelpunkt der Ellipse haben werde; und die Vergleichung des Werthes von r in Function von u, nämlich:

$$r = a(1 - e \cos u)$$

mit dem bekannten Werthe dieses Fahrstrahls in Function von der im Mittelpunkte anfangenden Abscisse x, nämlich

$$r = a - ex$$

zeigt, daß man $x = a \cos u$ hat, daß also u der Mittelpunktswinkel ist, dem in einem Kreise vom Halbmesser a ein Cosinus $= x$ zugehört. Ist demnach C, Fig. 76, der Mittelpunkt, AB die große Achse der von dem Bewegten beschriebenen Ellipse und F der Brennpunkt, gegen welchen die Kraft gerichtet ist, M die Lage des Bewegten am Ende der Zeit t, also $MF = r$, Winkel $AFM = \omega$, und beschreibt man über AB einen Halbkreis ADB, errichtet auf AB die durch M gehende Ordinate PM, welcher verlängert den Halbkreis in N schneidet, und zieht die Gerade CN, so ist offenbar auf der einen Seite

$$CP = x = a \cos ACN;$$

auf der andern

$$FP = r \cos \omega = a(\cos ACN - e)$$

und wenn in dieser Gleichung für r der Werth: $a \dfrac{1 - e^2}{1 + e \cos \omega}$ eingeführt wird, so zieht man daraus

$$\cos ACN = \frac{\cos \omega + e}{1 + e \cos \omega}$$

d. i. denselben Werth, den wir oben für cos u erhalten haben.

Es ist demnach der Winkel ACN der mit u bezeichnete Winkel, und man schließt daraus, daß wenn dieser bekannt und durch ihn der Bogen AN in dem über der großen Achse der Ellipse beschriebenen Halbkreise bestimmt ist, man nur von dem Endpunkte N dieses Bogens eine Senkrechte NP auf die große Achse ziehen darf, um die Lage M des Bewegten durch den Durchschnitt dieser Senkrechten mit der Ellipse

zu erhalten, wodurch dann auch die Coordinaten r und ω gefunden sind.

Um nun u für einen gegebenen Werth von t zu finden, ziehe man durch den Mittelpunkt C der Ellipse, Fig. 77, eine Gerade CN unter einem Winkel $= \frac{1}{4}\pi = 45^0$ gegen die große Achse AB, beschreibe dann von demselben Punkte aus zwei Kreise, den einen über der Achse AB, den andern über dem Abstand FF' der beiden Brennpunkte, theile beide in eine gleiche Anzahl gleicher Bogen, wie Au_1, u_1u_2, etc., Fa_1, a_1a_2, etc., und trage die Bogen des großen Kreises, zu Geraden ausgestreckt, auf die Ordinaten-Achsen CU auf; durch die Theilungspunkte u_1, u_2, etc. auf dieser Achse ziehe man die Geraden u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, etc., durch die Theilungspunkte a_1, a_2, etc. auf dem kleineren Kreise die Geraden a_1b_1, a_2b_2, etc., zu AB parallel, und endlich durch die dadurch entstehenden neuen Theilungspunkte b_1, b_2, etc., auf der Achse CU die Parallelen b_1t_1, b_2t_2, etc., zu der Geraden CN, bis sie die entsprechenden Parallelen u_1v_1, u_2v_2, etc., in den Punkten t_1, t_2, t_3, etc., schneiden, deren Abscissen u_1t_1, u_2t_2, etc. die Zeiten vorstellen, welche den durch die Ordinaten Cu_1, Cu_2, etc. dargestellten Winkeln u entsprechen. Denn durch die Construction hat man offenbar $Cu_4 =$ Bogen $Au_4 = au$, $Cb_4 = ae\sin u$, und demnach

$$CT_4 = u_4t_4 = u_4v_4 - t_4v_4 = Cu_4 - Cb_4 = a(u - e\sin u)$$

oder

$$CT_4 = ant\ .$$

Verbindet man daher die erhaltenen Punkte durch eine stetige krumme Linie $Ct_1t_2t_3\ldots$, so wird man auch umgekehrt, wenn t gegeben ist, u finden, indem man den Zahlenwerth von ant als Abscisse von C an auf der Achse CT aufträgt, und in deren Endpunkt eine Ordinate bis zu der ebengezeichneten Curve errichtet; die Länge dieser Ordinate wird den Bogen au, und damit den Winkel u geben. Um indessen der Curve keine zu große Ausdehnung geben zu müssen, kann man ihre zweite Hälfte $Ct_7t_8t_9\ldots$ wieder von C anfangen lassen, und den Sinus von u durch dieselbe bestimmen, da dieser ohnehin zur ferneren Verwendung des Winkels u brauchbarer ist, als der in eine Gerade ausgestreckte Bogen au. Dazu darf man nur durch den Endpunkt der durch die Abscisse ant bestimmten Ordinate eine Parallele zur Achse CN unserer Hülfscurve ziehen, um auf der Achse CU den Werth von $ae\sin u$ und durch eine neue Parallele den Bogen aeu auf dem kleinen

Kreise zu erhalten, womit denn auch der Winkel u und der Bogen au auf dem größern Kreise gegeben ist.

In Fig. 78 sind die vorhergehenden Constructionen vereinigt angewendet, um die Lagen des Bewegten in der einen Hälfte der Ellipse nach sechs gleichen Zeitabschnitten zu bestimmen, wozu die der halben Umlaufszeit entsprechende Abscisse CT_6 in sechs gleiche Theile getheilt wurde; das Uebrige dieser Construction wird nach dem Vorhergehenden keiner weitern Erklärung bedürfen, und soll dem Nachdenken des Lesers überlassen bleiben.

Es leuchtet nun ein, daß diese Construction um so weniger genaue Ergebnisse liefern wird, je kleiner e ist, je mehr sich also die Ellipse einem Kreise nähert, wie dies z. B. bei den meisten Planeten der Fall ist. Für sehr kleine Werthe von e kann man aber die zweite und die höhern Potenzen von e bei der ersten Annäherung vernachlässigen, und demnach den Werth von u zuerst unter die Form:

$$u = nt + e \sin u$$

bringen, und dann auch

$$u = nt + e \sin(nt + e \sin u)$$

schreiben. Entwickelt man dann den Sinus der Summe, setzt für $\sin . e \sin u$ und $\cos . e \sin u$ ihre Werthe

$$\sin . e \sin u = e \sin u - \frac{1}{6} e^3 \sin^3 u \ ,$$

$$\cos . e \sin u = 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 u \ ,$$

und vernachlässigt alle höhern Potenzen von e, die zweite mitgerechnet, so hat man einfach

a'.) $$u = nt + e \sin nt$$

als ersten Annäherungswerth von u.

Auf gleiche Weise kann man dann auch r und ω unmittelbar in Function von t annäherungsweise ausdrücken; man findet nämlich zuerst

$$r = a(1 - e \cos u) = a[1 - e \cos(nt + e \sin nt)] \ ,$$

und daraus mit derselben Vernachlässigung wie vorher

b'.) $$r = a(1 - e \cos nt) \ .$$

Ferner hat man

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{C}{r^2} \quad , \quad \frac{(1-e^2)^2}{(1+e\cos\omega)^2} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{C}{a^2} \,,$$

und mit Weglassung aller Glieder, welche mit e^2 multiplicirt sind,

$$(1-2\cos\omega)\frac{d\omega}{dt} = \frac{C}{a^2} \,;$$

setzt man dann $C = \frac{kl^2}{\beta}$, $a = \frac{kl^2}{\alpha^2}$, und beachtet, daß für unsere Annäherung:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{1-e^2} = 1$$

ist, so folgt aus dem vorhergehenden Ausdrucke

$$\frac{\alpha}{a} \cdot \frac{dt}{d\omega} = n\frac{dt}{d\omega} = 1 - 2e\cos\omega \,,$$

und das Integral:

$$nt = \omega - 2e\sin\omega \,,$$

wenn ω mit t Null wird, also auch umgekehrt für denselben Grad der Annäherung wie vorher

$$\omega = nt + 2e\sin nt \,. \qquad (c'.$$

Für die Zwecke der Astronomie hat man die Größe u, welche dort den Namen: excentrische Anomalie führt, in eine nach den Potenzen von e aufsteigende Reihe in Function von nt entwickelt, und damit den Fahrstrahl r und die wahre Anomalie ω ebenfalls als Functionen von nt in ähnlichen Reihen dargestellt, von denen die eben gefundenen Werthe (a'), (b'), (c') der genannten Größen jedesmal die beiden ersten Glieder sind, mit deren Entwickelung wir uns indessen hier nicht befassen könnten, ohne die vorgesteckten Grenzen zu überschreiten.

§. 88.

Bei den frühern Untersuchungen über den freien Fall eines schweren materiellen Punktes gegen die Oberfläche der Erde, haben wir diese als unbewegt angenommen, und dadurch eine geradlinige Bewegung erhalten; in der Wirklichkeit ist dies aber nicht der Fall; wir wollen daher jetzt als engere Anwendung des Vorhergehenden die wahre Bewegung eines

schweren materiellen Punktes betrachten, indem wir dabei nicht nur die Veränderlichkeit der Schwere, sondern auch die Umdrehung der Erde, an welcher der Bewegte vor dem Anfang seiner Bewegung Theil genommen hat, berücksichtigen, und insbesondere den Ort bestimmen, wo er an der Erdoberfläche ankommt.

Sind demnach C, Fig. 79, der Mittelpunkt, NS die Achse, AB die Projection des Aequators der Erde, welche wir als vollkommene und unveränderliche Kugel annehmen; D sei die Lage des Bewegten in dem Augenblicke, wo er sich selbst oder der Wirkung seines Gewichtes überlassen wird, und den wir als Anfang der Zeit nehmen; DE sei die Richtung der Schwere und die Verlängerung ECF die Projection des durch den Fußpunkt E der Lothlinie DE gelegten größten Kreises, welcher auf der durch die Ebene der Figur vorgestellten Meridian-Ebene desselben Punktes senkrecht steht und mit der Ebene des Aequators den Winkel β einschließt, wonach dieser Winkel auch die geographische Breite des Fußpunktes E sein wird. Die Figur 80 zeigt die Projection dieses Kreises in der Geraden OW auf der Ebene des Horizontes GH, während die Ebene der Figur 81 die Ebene desselben Kreises selbst ist.

Bezeichnen wir nun die Winkelgeschwindigkeit der Erde bei ihrer täglichen Umdrehung, welche auch die des materiellen Punktes ist in dem Augenblicke, wo er sich selbst überlassen wird, mit φ, die Höhe der Vertikalen DE mit h, den Halbmesser der Erde mit R, und das Gewicht des Bewegten an der Oberfläche derselben, wenn sie unbeweglich wäre, mit p_1, so haben wir für den Bewegten die anfängliche Entfernung $r_0 = R + h$, und die anfängliche Geschwindigkeit $v_0 = (R+h)\varphi\cos\beta$, deren Richtung offenbar senkrecht ist zur Ebene des Meridiankreises NES, also auch senkrecht zu dem Halbmesser CD, Fig. 81, woraus $\alpha_0 = \frac{1}{2}\pi$ folgt. Ferner wird die bewegende Kraft gleich $p_1 = mg_1$, wenn $r = R$ ist; man hat also $k = g_1$, $l = R$, und damit

$$C = (R+h)^2\varphi\cos\beta,\quad \beta C = g_1 R^2,\quad \alpha^2 = (R+h)^2\varphi^2\cos^2\beta - \frac{2g_1R^2}{R+h};$$

die Gestalt der Curve, welche der materielle Punkt beschreibt, wird daher von diesem letzten Ausdrucke abhängen, und zwar wird sie eine Ellipse, wenn

$$3g_1\frac{R^2}{(R+h)^3} - \varphi^2\cos^2\beta > 0$$

ist. Die Umdrehungszeit T der Erde ist nun 86164 Sekunden, also die Winkelgeschwindigkeit:

$$\varphi = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86164},$$

und demnach selbst im Aequator, wo $\cos\beta$ den größten Werth hat, und wenn wir selbst 2R für R + h setzen,

$$\varphi^2 < \frac{g_1}{4R},$$

da g_1 nahezu $= 10^m$, $R = 6366000$, $\frac{g_1}{4R} = 0{,}000000385$ ist, während φ^2 nur einen Werth gleich 0,0000000053 erhält; die Curve ist also auf der Erde selbst für eine dem Halbmesser gleiche Fallhöhe eine Ellipse.

Für die große Achse und die Excentricität dieser Curve finden wir dann nach den Gleichungen (a) in §. 86 die Werthe:

$$a = \frac{1}{2}(R+h)\frac{g_1 R^2}{g_1 R^2 - \frac{1}{2}(R+h)^3 \varphi^2 \cos^2\beta},$$

$$e^2 = 1 - \frac{(R+h)^4 \varphi^2 \cos^2\beta}{a \,.\, g_1 R^2},$$

oder wenn man den Bruch $\frac{R\varphi^2\cos^2\beta}{g_1}$, dessen Werth für $\beta = 0$ ohngefähr $\frac{1}{289}$ ist, mit δ^2 bezeichnet,

$$a = \frac{1}{2}(R+h)\frac{1}{1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{h}{R}\right)^3\delta^2},$$

$$e^2 = \left[1 - \delta^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^3\right]^2,$$

woraus man leicht schließt, daß die Ellipse eine sehr excentrische ist.

Die Ebene, in welcher die Bewegung stattfindet, ist offenbar die des größten Kreises ECF, Fig. 79, oder die Ebene der Fig. 81, und die Lothlinie DC die Richtung der großen Achse Dd der Ellipse, da man sich leicht überzeugen wird, daß für $\alpha_0 = \frac{1}{2}\pi$, $\sin\alpha_0 = 1$, der Ausdruck für $\cos\varepsilon_0$ in §. 85 gleich 1, ε_0 also Null wird, und daß

demnach in diesem Falle die anfängliche Lage des Bewegten immer ein Scheitel der großen Achse ist; ferner zeigen die vorhergehenden Werthe von a und e, daß man hat

$$R + h = a(1 + e);$$

daß der Punkt D folglich der vom Brennpunkt C entferntere Scheitel der großen Achse ist. Werden demnach die Winkel ω von der Lothlinie CD an nach Osten genommen, so wird die Gleichung der Ellipse

$$r = a\,\frac{1 - e^2}{1 - e\cos\omega},$$

und in dem Punkte J, wo der Bewegte an der Oberfläche der Erde ankommt, wird $r = R$, also

$$\cos\omega_{,} = \frac{1}{e} - \frac{a(1 - e^2)}{Re}$$

die Gleichung zur Bestimmung des Winkels $\omega_{,} = ECJ$.

Mit den obigen Werthen hat man aber

$$1 - e^2 = 2\delta^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^3\left[1-\frac{1}{2}\delta^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^3\right]$$

und damit folgt einfach:

$$\frac{a(1 - e^2)}{R} = \delta^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^4$$

also auch noch mit vollkommener Genauigkeit:

$$\cos\omega_{,} = \frac{1}{e}\left[1 - \delta^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^4\right] = \frac{1-\delta^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^4}{1-\delta^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^3}.$$

Wenn wir nun, wie dies für alle ähnliche Versuche auf der Erde der Fall ist, h gegen R sehr klein annehmen, so können wir mit hinreichender Annäherung die höhern Potenzen als die zweite von $\frac{h}{R}$ und δ^2 vernachlässigen, sowie die Producte aus δ^4 und $\frac{h^2}{R^2}$, und damit dem vorstehenden Ausdrucke die Form geben:

$$\cos\omega_{,} = 1 - \delta^2\frac{h}{R}\left(1+\frac{h}{R}\right)^3(1+\delta^2),$$

woraus man dann zieht:

$$\sin \frac{1}{2} \omega_{,} = \sqrt{\frac{1-\cos \omega_{,}}{2}} = \delta \sqrt{\frac{h}{2R}\left(1+\frac{h}{R}\right)^3 (1+\delta^2)} .$$

Man sieht daraus, daß der Winkel $\frac{1}{2}\omega_{,}$ sehr klein ist, und hat deßhalb, wenn für δ sein Werth: $\varphi \sqrt{\frac{R}{g_1}} \cos \beta$ gesetzt wird,

$$\omega_{,} = \varphi \cos \beta \sqrt{\frac{2h}{g_1}\left(1+\frac{h}{R}\right)^3 (1+\delta^2)} ,$$

oder wenn man noch $\frac{g_1}{1+\delta^2} = g_1(1-\delta^2)$ durch g ersetzt, wo dann mg das wirkliche Gewicht des Bewegten an der Oberfläche der Erde vorstellt *), so hat man einfach

$$\omega_{,} = \varphi \sqrt{\frac{2h}{g}\left(1+\frac{h}{R}\right)^3} \cos \beta .$$

Bezeichnen wir dann die geographische Länge und Breite des Punktes J, die erstere in Bezug auf die feste Meridian-Ebene NES, Fig. 80, genommen, mit $\lambda_{,}$ und $\beta_{,}$, so gibt uns das rechtwinklige sphärische Dreieck EJN, Fig. 79 und 80,

$$\tang \lambda_{,} = \frac{\tang \omega_{,}}{\cos \beta} , \qquad \sin \beta_{,} = \sin \beta \cos \omega_{,}$$

und mit der Beachtung, daß auch der Winkel $\lambda_{,}$ sehr klein ist, daß also $\lambda_{,} = \frac{\omega_{,}}{\cos \beta}$ gesetzt werden kann, schließt man aus den vorhergehenden Werthen

$$\lambda_{,} = \varphi \sqrt{\frac{2h}{g}\left(1+\frac{h}{R}\right)^3} ,$$

und

$$\sin \beta_{,} = \sin \beta \left\{1 - \delta^2 \frac{h}{R}\left(1+\frac{h}{R}\right)^3 (1+\delta^2)\right\} .$$

---

*) Vergl. §. 97 im folgenden Kapitel.

Die Differenz $\Delta\beta$ zwischen β und $\beta_,$ wird ferner ebenfalls nur sehr klein sein, man kann also

$$\sin\beta_, = \sin(\beta - \Delta\beta) = \sin\beta - \Delta\beta\cos\beta$$

setzen, und zieht daraus den Ausdruck:

$$\Delta\beta = \frac{\sin\beta - \sin\beta_,}{\cos\beta}$$

oder mit den obigen Werthen und Substitutionen:

$$\Delta\beta = \varphi^2 \frac{h}{g}\left(1+\frac{h}{R}\right)^3 \sin\beta\cos\beta \;,$$

woraus hervorgeht, daß diese Abweichung des fallenden Atoms von seinem Parallelkreise unter einer Breite von 45° ihren größten Werth hat und sowohl am Aequator als an den Polen Null ist.

Während nun der materielle Punkt von der Höhe herabfällt, wird sich auch der Fußpunkt E der Lothlinie DE in Folge der Umdrehung der Erde aus der festen Ebene NES entfernen, und dabei immer in seinem Parallelkreise EeE', Fig. 79 und 80, bleiben; während also seine geographische Breite immer gleich β ist, hängt seine Länge λ in Bezug auf die feste Ebene NES von der Zeit t des Falles ab, und man hat einfach

$$\lambda = \varphi t \;.$$

Nach den in §. 86 abgeleiteten Ausdrücken haben wir zur Bestimmung dieser Zeit einmal

$$\tan\frac{1}{2}u_, = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{1}{2}\omega_, \;,$$

wo $u_,$ den dem Bogen DJ entsprechenden Winkel $\pi - u$ bezeichnet, weil D der vom Brennpunkt entferntere Scheitel der großen Achse ist, und mit dem obigen Werthe von $\cos\omega_,$, woraus sich $\tan\frac{1}{2}\omega_,$ nach der bekannten Beziehung:

$$\tan\frac{1}{2}\omega_, = \sqrt{\frac{1-\cos\omega_,}{1+\cos\omega_,}}$$

ergibt, und dem Werthe von e findet man

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}u_{,}=\sqrt{\frac{2-\delta^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^3}{\delta^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^3}}\cdot\sqrt{\frac{\delta^2\frac{h}{R}\left(1+\frac{h}{R}\right)^3(1+\delta^2)}{2-\delta^2\frac{h}{R}\left(1+\frac{h}{R}\right)^3(1+\delta^2)}},$$

und demnach innerhalb unserer früheren Annäherung:

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}u_{,}=\sqrt{\frac{h}{R}(1+\delta^2)\left\{1-\frac{1}{2}\delta^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^3\right\}}$$

daraus folgt dann nach der Beziehung:

$$\sin u_{,}=\frac{2\,\text{tang}\,\frac{1}{2}u_{,}}{1+\text{tang}^2\frac{1}{2}u_{,}}\,.$$

und mit Berücksichtigung des Werthes von a:

$$\sin u_{,}=\frac{2R}{R+h}\sqrt{\frac{h}{2a}\left(1+\frac{h}{R}\right)(1+\delta^2)}\,.$$

Beachtet man endlich, daß der in §. 86 gefundene Ausdruck

$$nt=u-e\sin u$$

für die Zeit der Bewegung von δ bis J, Fig. 81 gilt, und für die Zeit der Bewegung von D bis J den Werth:

$$nt=\pi-(\pi-u_{,})+e\sin(\pi-u_{,})=u_{,}+e\sin u_{,}$$

gibt, und daß man wegen der Kleinheit des Winkels $u_{,}$ einfach

$$nt=(1+e)\sin u_{,}$$

setzen kann, so findet man

$$nt=\frac{2R(1+e)}{R+h}\sqrt{\frac{h}{2a}\left(1+\frac{h}{R}\right)(1+\delta^2)}\,,$$

oder mit dem Werthe von $n=\sqrt{\frac{g_1 R^2}{a^3}}$, und weil $\frac{1+e}{R+h}=a$ ist,

$$t = 2\sqrt{\frac{h}{2g_1}\left(1+\frac{h}{R}\right)(1+\delta^2)} = \sqrt{\frac{2h}{g}\left(1+\frac{h}{R}\right)}\ ^{*)}.$$

Wir erhalten also weiter

$$\lambda = \varphi t = \varphi\sqrt{\frac{2h}{g}\left(1+\frac{h}{R}\right)}$$

und als Differenz $\Delta\lambda$ zwischen der Länge des Fußpunktes E oder e am Ende des Falles und der des Punktes J, in welchem das fallende Atom an der Oberfläche der Erde ankommt:

$$\Delta\lambda = \lambda_{,} - \lambda = \varphi\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\sqrt{\left(1+\frac{h}{R}\right)^3} - \sqrt{1+\frac{h}{R}}\right),$$

$$\Delta\lambda = \varphi\frac{h}{R}\sqrt{\frac{2h}{g}\left(1+\frac{h}{R}\right)},$$

woraus man sieht, daß dieser Unterschied in der Länge oder die östliche Winkel-Abweichung des fallenden Atoms von der Lothlinie DE bis auf sehr kleine Größen von der geographischen Breite unabhängig ist.

Will man endlich die beiden Abweichungen in absolutem Längenmaaße ausdrücken, so muß man die erste $\Delta\beta$, welche auf dem Meridiankreise gemessen wird, mit R, die zweite $\Delta\lambda$ dagegen, welche auf dem Parallelkreise zu nehmen ist, mit $R\cos\beta$ multipliciren, bezeichnen wir sie dann mit Δb und Δl, und vernachlässigen den Bruch $\frac{h}{R}$ gegen 1, so wird:

$$\Delta b = \frac{1}{2}R\varphi^2\frac{h}{g}\sin 2\beta\ , \qquad \Delta l = \varphi h\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\beta\ .$$

*) Setzt man die Erde unbewegt voraus, so wird φ und δ Null, $a = \frac{1}{2}(R+h)$, $e = 1$, und man hat:

$$\tang\frac{1}{2}u_{,} = \sqrt{\frac{h}{R}},\ \sin u_{,} = \frac{2\sqrt{Rh}}{R+h},\ \cos u_{,} = \frac{1-\tang^2\frac{1}{2}u_{,}}{1+\tang^2\frac{1}{2}u_{,}} = \frac{R-h}{R+h}$$

also auch wie in §. 53:

$$nt = u_{,} + \sin u_{,} = \arccos\frac{R-h}{R+h} + \frac{2\sqrt{Rh}}{R+h}\ .$$

Nehmen wir z. B. $h = 80^m$, und $\beta = 45^q$, so finden wir

$$\Delta b = 0^m,1380 \quad , \quad \Delta l = 0^m,0165 \;;$$

wenn also ein kleiner sehr dichter Körper von einer solchen Höhe frei niederfällt, ohne dem Einfluß eines Luftzuges ausgesetzt zu sein, so muß er, wenn die Erde eine drehende Bewegung von Westen nach Osten hat, bei seiner Ankunft an der Oberfläche der Erde nach Süden und Osten von dem Fußpunkte der Normalen, in welcher er zu fallen angefangen hat, abweichen, und zwar $0^m,138$ nach Süden und $0^m,0165$ nach Osten. Die letztere östliche Abweichung ist denn auch wirklich durch den Versuch nachgewiesen, und dadurch ein directer Beweis für die Umdrehung der Erde geliefert worden; die südliche Abweichung dagegen, welche, wie man sieht, viel größer sein soll, könnte demohngeachtet selbst in dem Falle, daß die Erde eine unveränderliche Kugel wäre, nicht durch den Versuch gefunden werden, weil wir kein Mittel hätten, um den Fußpunkt E der Normalen DE zu bestimmen, da sowohl das Bleiloth, wie die Libelle, wegen des durch die Umdrehung der Erde erzeugten und theilweise nach Süden gerichteten dynamischen Druckes, nicht die Richtung der eigentlichen Schwere angeben, sondern die Richtung der Resultirenden von dem Gewichte eines materiellen Punktes und jenem dynamischen Drucke, wie im folgenden Kapitel näher gezeigt werden soll.

§. 89.

Bis jetzt ist uns in der Natur keine Kraft bekannt, welche von einem festen Punkte ausgehend, auf einen beweglichen materiellen Punkt eine nach andern Gesetzen veränderliche Wirkung hervorbrächte, als nach denen, die wir bisher vorausgesetzt haben, wonach diese Wirkung entweder unverändert bleibt, oder sich in demselben Verhältnisse, wie die Entfernung ändert, oder im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung steht. Wenn demnach auch der Fall, wo die Wirkung der Kraft sich umgekehrt, wie die dritte Potenz der Entfernung verhält, keine Anwendung finden kann, so bietet er doch so viele einfache und beachtenswerthe Ergebnisse, daß seine nähere Untersuchung in vielen Beziehungen lehrreich ist.

Sei daher die bewegende Kraft für die Entfernung r durch

$$R = -P\frac{l^3}{r^3} = -mk\frac{l^3}{r^3}$$

ausgedrückt, indem $P = mk$ wieder ihre Intensität in der Entfernung 1 bezeichnet.

Für die Geschwindigkeit hat man damit sogleich den Ausdruck:

$$v^2 = v_0^2 - \frac{kl^3}{r_0^2} + \frac{kl^3}{r^2},$$

worin v_0 und r_0 wieder die anfängliche Geschwindigkeit und Entfernung bezeichnen.

Die Gleichung (86) wird

$$\omega - \omega_0 = \mp \int_{r_0}^{r} dr \,.\, \frac{C \frac{d.\frac{1}{r}}{dr}}{\sqrt{v_0^2 - \frac{kl^3}{r_0^2} + (kl^3 - C^2)\frac{1}{r^2}}},$$

oder wenn man

$$\frac{kl^3}{C^2} = \frac{kl^3}{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha_0} \text{ durch } \beta^2, \quad v_0^2 - \frac{kl^3}{r_0^2} \text{ durch } v_0^2(1 - \beta^2 \sin^2\alpha_0),$$

$$\frac{C}{r} \text{ durch } z$$

ersetzt, den Winkel ω_0 gleich Null annimmt, und das obere Zeichen beibehält, so daß r mit ω wächst, und α_0 ein spitzer Winkel ist,

$$\text{A.)} \quad \omega = -\int_{z_0}^{z} dz \,.\, \frac{1}{\sqrt{v_0^2(1 - \beta^2 \sin^2\alpha_0) + (\beta^2 - 1)z^2}}.$$

Nach diesem Ausdrucke wird man dann drei Hauptfälle unterscheiden, je nachdem man hat:

$$\beta^2 > 1, \quad \beta^2 = 1, \quad \beta^2 < 1.$$

Nehmen wir den zweiten dieser Fälle als den einfachsten zuerst vor, so ergibt sich $1 - \beta^2 \sin^2\alpha_0 = \cos^2\alpha_0$, und man erhält sogleich

$$\omega = \frac{C}{v_0 \cos\alpha_0}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) = r_0 \operatorname{tang}\alpha_0 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right),$$

also in Bezug auf r aufgelöset,

$$r = \frac{r_0}{1 - \omega \cot\alpha_0},$$

als Gleichung der Bahn des Bewegten. Diese Bahn ist demnach eine hyperbolische Spirale, Fig. 82, deren Pol der feste Richtungspunkt C der Kraft ist, und deren Asymptote BD mit dem anfänglichen Fahrstrahl CA einen Winkel $\omega_{,}$ bildet, welcher durch die Gleichungen:

$$r = \infty \qquad\qquad \omega_{,} = \tang \alpha_0$$

bestimmt wird. Um den senkrechten Abstand derselben vom Pol zu erhalten, hat man allgemein

$$MP = CM \sin(\omega_{,} - \omega)$$

oder mit dem obigen Werthe von $CM = r$:

$$MP = \frac{r_0 \sin(\omega_{,} - \omega)}{1 - \omega \cot \alpha_0},$$

und dieser Werth geht in den von CD über, wenn $\omega = \omega_{,}$ wird. In diesem Falle erscheint aber der vorstehende Werth unter der Form $\frac{0}{0}$; nimmt man daher die abgeleiteten Functionen von Zähler und Nenner, so hat man

$$CB = r_0 \frac{\cos 0}{\cot \alpha_0} = r_0 \tang \alpha_0 .$$

Verlängert man demnach die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit rückwärts von A nach E, und zieht die Senkrechte CE zu CA, so wird diese den verlangten Abstand BC angeben.

Ist nun α_0 ein spitzer Winkel und $\cot \alpha_0$ positiv, so wird r fortwährend wachsen, der Bewegte sich immer mehr in der Richtung AM von C entfernen, und nach einiger Zeit sehr nahe eine gleichförmige geradlinige Bewegung annehmen. Denn die Gleichung (89), welche für unsern Fall und mit den vorhergehenden Annahmen, die Form erhält:

$$t = \pm \int_{r_0}^{r} dr \, . \, \frac{1}{v_0 \cos \alpha_0} = \pm \frac{r - r_0}{v_0 \cos \alpha_0},$$

zeigt, daß wenn α_0 ein spitzer Winkel ist und r im Anfang mit t wächst,

$$r = r_0 + v_0 t \cos \alpha_0$$

wird, daß also die Entfernung r des Bewegten von C gerade wie bei einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung wächst, daß dieses demnach auch mit dem einer Geraden sehr nahe kommenden Bogen AM der Fall sein wird. Wenn dagegen α_0 ein stumpfer Winkel ist, so wird

$$r = \frac{r_0}{1 + \omega \cot(\pi - \alpha_0)}$$

und die Bewegung dieselbe, als wenn man bei der vorhergehenden ω negativ nimmt, oder man kann die anfängliche Geschwindigkeit nun von A gegen E gerichtet annehmen, und die Winkel ω von CA gegen CM' messen. Der Bewegte nähert sich also dem Pol, beschreibt aber eine unendliche Anzahl von Windungen um ihn, da r nur Null werden kann, wenn ω unendlich groß ist. Demohngeachtet erreicht der Bewegte den Pol in einer bestimmten, begrenzten Zeit, was sich leicht daraus erklärt, daß die Geschwindigkeit sehr groß wird, und wenn r sehr klein geworden ist, verkehrt proportional zu der Entfernung r wächst, während jede Windung in demselben Verhältnisse kleiner wird, so daß zuletzt kaum denkbar kleine Umgänge mit unendlich großer Geschwindigkeit zurückzulegen sind. In der That gibt der obige Ausdruck für t nun den Werth:

$$t = \frac{r_0 - r}{v_0 \cos(\pi - \alpha_0)}\,.$$

und für $r = 0$,

$$t = \frac{r_0}{v_0 \cos(\pi - \alpha_0)}\,,$$

so daß der Pol in der Einheit der Zeit erreicht wird, wenn man

$$r_0 = v_0 \cos(\pi - \alpha_0)$$

hat, d. h. wenn die anfängliche Geschwindigkeit durch die Gerade AE vorgestellt wird.

Hat man endlich $\alpha_0 = \frac{1}{2}\pi$, $\cot\alpha = 0$, so wird

$$r = r_0\quad,\qquad v = v_0\,,$$

die Bahn also ein Kreis, in dem sich der materielle Punkt gleichförmig bewegt; dies ist daher, wenn man die vorhergehenden Untersuchungen vergleicht, immer der Fall, *so oft die Kraft eine anziehende, gegen einen festen Punkt gerichtete, die anfängliche Geschwindigkeit senkrecht zu dem ersten Fahrstrahl, und ihr Quadrat dem Product aus der anfänglichen Entfernung in die anfängliche Beschleunigung gleich ist.*

§. 84.

Als zweiter Hauptfall sei $\beta^2 - 1 = n^2$; damit nimmt die Gleichung (A) die Form:

$$\omega = \int_{z_0}^{z} dz \,.\, \frac{1}{\sqrt{v_0{}^2(\cos^2\alpha_0 - n^2\sin^2\alpha_0) + n^2 z^2}}$$

an, und gibt nach den Gleichungen (B) in §. 83 als unbestimmtes Integral die Gleichung:

$$\frac{C}{r} = A e^{n\omega} + B e^{-n\omega},$$

aus der man wieder:

$$\frac{d.\frac{C}{r}}{d\omega} = n A e^{n\omega} - n B e^{-n\omega}$$

als Aenderungsgesetz in Bezug auf ω zieht. Zur Bestimmung von A und B hat man dann mit der Beachtung, daß (§. 73) $\frac{dr}{dt} = v\cos\vartheta$, $\frac{dr_0}{dt} = v_0\cos\alpha_0$, daß also auch der anfängliche Werth von

$$\frac{d.\frac{C}{r}}{d\omega} = -\frac{C\frac{dr}{dt}}{r^2\frac{d\omega}{dt}} = -\frac{dr}{dt}$$

$-v_0\cos\alpha_0$ ist, die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{C}{r_0} &= v_0\sin\alpha_0 = A + B \\ -v_0\cos\alpha_0 &= nA - nB \end{aligned}\right\}$$

und es folgt daraus die Gleichung:

$$\frac{2r_0}{r} = \left(1 - \frac{\cot\alpha_0}{n}\right)e^{n\omega} + \left(1 + \frac{\cot\alpha_0}{n}\right)e^{-n\omega}$$

für die Bahn des Bewegten.

Man kann hier wieder drei Nebenfälle unterscheiden, je nachdem

$$1 - \frac{\cot\alpha_0}{n} > 0 \quad , \quad = 0 \quad , \quad \text{oder} \quad < 0$$

ist. Für den ersten Fall, welcher offenbar nicht blos für Werthe von α_0, die größer sind als $\frac{1}{2}\pi$, stattfindet, sondern auch noch für kleinere, zeigt die vorstehende Gleichung, daß r um so kleiner wird, je mehr ω wächst, daß der Bewegte also wieder eine unendliche Anzahl von Windungen um den Pol macht. Man sieht ferner, daß nach einigen Umläufen (n als ganze Zahl vorausgesetzt), $e^{-n\omega}$ sehr klein wird, und die Spirale sich derjenigen nähert, deren Gleichung

$$n\omega = \log n \frac{r_0}{\left(1 - \frac{\cot\alpha_0}{n}\right) r}$$

ist. Hat man dagegen $\cot\alpha_0 > n$, so wird sich der Bewegte von dem Pol entfernen, bis man

$$\left(\frac{\cot\alpha_0}{n} - 1\right) e^{n\omega} - \left(\frac{\cot\alpha_0}{n} + 1\right) e^{-n\omega} = 0$$

oder

$$2n\omega_{,} = \log n \frac{\cot\alpha_0 + n}{\cot\alpha_0 - n}$$

hat, und dieser Werth von $\omega_{,}$ wird dann zugleich die Richtung der Asymptote angeben.

Die Grenze zwischen beiden Fällen bildet derjenige, für welchen

$$\cot\alpha_0 = n$$

stattfindet, wodurch die Gleichung der Spirale auf

$$r_0 e^{n\omega} = r \quad \text{oder} \quad n\omega = \log n \frac{r}{r_0}$$

zurückkommt, diese also in die sogenannte logarithmische Spirale übergeht, in welcher sich der Bewegte fortwährend von dem Pole entfernt.

Als Ausdruck für die Zeit der Bewegung erhält man

$$t = \pm \int_{r_0}^{r} dr . \frac{r}{\sqrt{n^2 C^2 + v_0^2 (\cos^2\alpha_0 - n^2 \sin^2\alpha_0) r^2}},$$

oder mit dem Werthe von C

$$n v_0 \sin\alpha_0\, t = \pm \int_{r_0}^{r} dr . \frac{r}{\sqrt{r_0^2 - \left(1 - \frac{\cot^2\alpha_0}{n^2}\right) r^2}},$$

und damit folgt

$$n v_0 \left(1 - \frac{\cot^2\alpha_0}{n^2}\right) \sin\alpha_0 . t = \pm \left(r_0 \frac{\cot\alpha_0}{n} - \sqrt{r_0^2 - \left(1 - \frac{\cot^2\alpha_0}{n^2}\right) r^2} \right).$$

Für den ersten Nebenfall, wo $n > \cot\alpha_0$ ist, und r mit zunehmender Zeit abnimmt, muß das untere Zeichen genommen werden, und es ergibt sich dann für $r = 0$,

$$t = \frac{r_0}{n v_0 \left(1 + \frac{\cot\alpha_0}{n}\right) \sin\alpha_0}$$

also wieder ein begrenzter Werth von t für eine unendliche Anzahl von Umläufen. In dem besondern Falle, wo $\alpha_0 = \frac{1}{2}\pi$ ist, hat man noch einfacher als allgemeinen Werth von t

$$t = \frac{r_0}{n v_0} \sqrt{1 - \frac{r^2}{r_0^2}}$$

und demnach wird für $r = 0$

$$t = \frac{r_0}{n v_0}$$

der Ausdruck für die Zeit, welche der Bewegte in diesem Falle zur Erreichung des Poles braucht, und nach welcher die Bewegung endigt.

Man kann übrigens die Zeit auch einfach und rational durch den Winkel ω ausdrücken, nur ist es dann schwieriger die verschiedenen Fälle zu unterscheiden. Die Gleichung

$$r^2 \frac{d\omega}{dt} = r_0 v_0 \sin\alpha_0$$

gibt nämlich durch Einführung des Werthes von r^2

$$v_0 \sin\alpha_0 . t = \int_0^{\omega} d\omega . \frac{4 r_0}{\left(A e^{n\omega} + B e^{-n\omega}\right)^2} = \int_0^{\omega} d\omega . \frac{4 r_0 e^{-2n\omega}}{\left(A + B e^{-2n\omega}\right)^2},$$

und daraus zieht man leicht das Integral:

$$n v_0 B \sin\alpha_0 . t = 2 r_0 \left(\frac{1}{A + B e^{-2n\omega}} - \frac{1}{A+B} \right),$$

worin A und B für $1 - \frac{\cot\alpha_0}{n}$ und $1 + \frac{\cot\alpha_0}{n}$ beibehalten ist. Mit diesen Werthen ergibt sich aber $A + B = 2$, und es wird dadurch

$$n v_0 B \sin\alpha_0 . t = r_0 \left(\frac{2}{A + B e^{-2n\omega}} - 1 \right).$$

Wenn $\alpha_0 = \frac{1}{2}\pi$, so wird $A = B = 1$ und

$$t = \frac{r_0}{n v_0} \left(\frac{2}{1 + e^{-2n\omega}} - 1 \right);$$

wenn nun ω einen sehr großen positiven Werth erhält, so nähert sich das erste Glied der rechten Seite der Grenze 2, für einen sehr großen negativen Werth dagegen der Grenze Null, die Zeit also dem Werthe

$$t = \pm \frac{r_0}{n v_0},$$

da es hier offenbar einerlei ist, ob man die Bewegung vor- oder rückwärts betrachtet. In der allgemeinen Gleichung dagegen kann ω nur den Werth:

$$\omega = \frac{1}{2n} \log n . - \frac{B}{A} = \frac{1}{2n} \log n . \frac{\cot\alpha_0 - n}{\cot\alpha_0 + n}$$

als größten positiven erhalten, durch welchen t und r unendlich werden, da er nur für die Voraussetzung $\cot\alpha > n$ möglich ist. In dem ersten Falle, wo $n > \cot\alpha_0$ ist, und sich der Bewegte dem Pole nähert, muß man ω negativ unendlich setzen, um dadurch mit der Beachtung, daß nun die Zeit mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen ist, wie oben

$$t = \frac{r_0}{n v_0 B \sin\alpha_0}$$

für die Zeit zur Erreichung des Poles zu erhalten.

Für die Bewegung in der logarithmischen Spirale, für welche $A = 0$, $B = 2$ ist, hat man unmittelbar, wenn r mit t zunimmt,

$$t = \int_{r_0}^{r} dr \, . \, \frac{r}{nC} \quad \text{oder} \quad Ct = \int_{0}^{\omega} d\omega \, . \, r_0^2 e^{2n\omega} ,$$

woraus immer

$$t = \frac{r^2 - r_0^2}{2 r_0 v_0 \cos \alpha_0}$$

folgt, und sich

$$t = \infty \quad \text{für} \quad r = \infty \quad , \quad t = - \frac{r_0}{2 v_0 \cos \alpha_0} \quad \text{für} \quad r = 0$$

ergibt, so daß auch hier die Zeit zur Erreichung des Poles eine endliche, und zwar der halben Zeiteinheit gleich ist, wenn man $v_0 \cos \alpha_0 = r_0$ hat.

§. 91.

Um den dritten Hauptfall zu untersuchen, setze ich

$$\beta^2 - 1 = - n^2 ,$$

wodurch die Gleichung (A) in

$$\omega = - \int_{z_0}^{z} dz \, . \, \frac{1}{\sqrt{v_0^2 (\cos^2 \alpha_0 + n^2 \sin^2 \alpha_0) - n^2 z^2}}$$

übergeht, und nach den Gleichungen (A) in §. 83 folgt daraus das unbestimmte Integral:

$$\frac{1}{r} = A \cos n \omega + B \sin n \omega ,$$

dessen Aenderungsgesetz in Bezug auf ω:

$$\frac{d . \frac{1}{r}}{d\omega} = - n A \sin n \omega + n B \cos n \omega$$

durch den anfänglichen Werth von $\frac{d . \frac{1}{r}}{d\omega} = - \frac{1}{C} \cdot \frac{dr}{dt}$ wieder zur Bestimmung von A und B mithelfen wird; man hat demnach zu dieser Bestimmung die Bedingungen:

$$\frac{1}{r_0} = A \quad , \quad - \frac{v_0 \cos \alpha_0}{r_0 v_0 \sin \alpha_0} = - \frac{\cot \alpha_0}{r_0} = n B ,$$

und erhält dadurch die Gleichung der Bahncurve:

$$\frac{r_0}{r} = \cos n\omega - \frac{\cot \alpha_0}{n} \sin n\omega \ ,$$

oder wenn man $\frac{\cot \alpha_0}{n}$ durch $\cot \varepsilon$ bezeichnet,

$$\frac{r_0}{r} = \frac{\sin(\varepsilon - n\omega)}{\sin \varepsilon} \ ,$$

woraus man sieht, daß die Werthe von r leicht durch Dreiecke construirt werden können.

Ist hier α_0 kleiner als $\frac{1}{2}\pi$, also $\frac{\cot \alpha_0}{n}$ positiv, so entfernt sich der Bewegte fortwährend von dem Pole, und erreicht eine unendliche Entfernung, wenn $\omega = \frac{\varepsilon}{n}$ geworden ist, so daß die durch den Pol unter einem Winkel $\omega, = \frac{\varepsilon}{n}$ gegen den Fahrstrahl r_0 gezogene Gerade die Asymptote der Curve bildet. Wird α_0 größer als $\frac{1}{2}\pi$ oder nimmt man ω negativ, verfolgt also den Lauf der Curve rückwärts, so wird r immer kleiner bis $\varepsilon + n\omega = \frac{1}{2}\pi$ ist; von da fängt es wieder an zu wachsen, und wird unendlich, sobald $\varepsilon + n\omega$ den Werth π erreicht. Die Curve ist demnach zu beiden Seiten der kleinsten Entfernung (des kleinsten Fahrstrahls) ganz symmetrisch, und zwar ist die unter dem Winkel ε durch den Endpunkt des Fahrstrahles r_0 gezogene Gerade die Tangente am Scheitel der Curve, und die vom Pole darauf gefällte Senkrechte der kleinste Fahrstrahl.

Für den besondern Werth: $n = 1$, geht die Curve in eine Gerade über, deren Polar-Gleichung:

$$r = r_0 \frac{\sin \alpha_0}{\sin(\alpha_0 - \omega)}$$

ist, welche also den Winkel α_0 mit dem Fahrstrahl r_0 bildet, wie sich von selbst versteht; auch ist leicht zu sehen, daß man als Ausdruck für den in dieser Geraden zurückgelegten Weg

$$s = r_0 \frac{\sin \omega}{\sin(\alpha_0 - \omega)}$$

findet.

Als Ausdruck für die Zeit haben wir im Allgemeinen unmittelbar

$$Ct = \int_0^\omega d\omega \, . \, \frac{\sin^2 \varepsilon}{\sin^2 (\varepsilon - n\omega)}$$

und daraus wie leicht abzuleiten ist

$$n v_0 \sin \alpha_0 \, . \, t = r_0 \sin^2 \varepsilon \cot (\varepsilon - n\omega) - r_0 \sin \varepsilon \cos \varepsilon \; .$$

Um die kürzeste Entfernung zu erreichen, braucht der Bewegte demnach die Zeit:

$$t = \frac{r_0 \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{n v_0 \sin \alpha_0} = \frac{r_0 \cos^2 \varepsilon}{v_0 \cos \alpha_0} \; .$$

Wenn $n = 1$ ist, wird

$$t = \frac{r_0}{v_0} (\sin \alpha_0 \cot (\alpha_0 - \omega) - \cos \alpha_0)$$

und wenn man für r_0 seinen Werth in s, nämlich:

$$r_0 = s \frac{\sin (\alpha_0 - \omega)}{\sin \omega}$$

einführt, so folgt

$$t = \frac{s}{v_0} \quad , \qquad s = v_0 t \; ;$$

die Bewegung ist also eine gleichförmige geradlinige, wie es nicht anders sein kann, da die Bedingung $\beta^2 - 1 = - n^2$ für den angenommenen Werth $n = 1$,

$$\beta^2 = \frac{k l^3}{C^2} = 0 \quad , \qquad k = 0$$

gibt, und folglich keine Kraft mehr thätig ist.

§. 92.

Um das gegenwärtige Kapitel zu beschließen, wollen wir noch einen Augenblick bei der Bewegung eines materiellen Punktes verweilen, welcher der Wirkung zweier Kräfte unterliegt, die fortwährend gegen zwei feste Punkte gerichtet, und deren Intensitäten Functionen der Entfernungen des Bewegten von diesen festen Punkten sind.

Sei A der erste feste Punkt und R_1 die Intensität der Kraft, deren Richtung immer durch diesen Punkt geht; B sei der zweite feste Punkt und R_2 die Intensität der entsprechenden Kraft. Der Punkt A

sei der Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems, auf welches die Lage des Bewegten am Ende der Zeit t durch die Coordinaten x, y, z bezogen ist; die Achse der z sei durch den Punkt B gelegt, und die Ebene der xz durch den Punkt, wo sich der Bewegte am Anfang der Zeit befindet, und dessen Coordinaten dem entsprechend durch x_0, z_0 bezeichnet seien. Sind ferner r_1 und r_2 die Abstände des Bewegten am Ende der Zeit t von den Punkten A und B, und c die Entfernung dieser Punkte selbst, so hat man

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad , \qquad r_2^2 = x^2 + y^2 + (z - c)^2 \, ,$$

und die zu den Achsen parallelen Componenten der Kräfte R_1 und R_2 sind darnach:

$$R_1 \frac{x}{r_1} \; , \quad R_1 \frac{y}{r_1} \; , \quad R_1 \frac{z}{r_1} \; ,$$

$$R_2 \frac{x}{r_2} \; , \quad R_2 \frac{y}{r_2} \; , \quad R_2 \frac{z - c}{r_2} \; ;$$

die Gleichungen (68) nehmen damit die Form an:

$$\text{G.)} \quad \begin{cases} m \dfrac{d^2 x}{dt^2} = \left(\dfrac{R_1}{r_1} + \dfrac{R_2}{r_2} \right) x \; , \\ m \dfrac{d^2 y}{dt^2} = \left(\dfrac{R_1}{r_1} + \dfrac{R_2}{r_2} \right) y \; , \\ m \dfrac{d^2 z}{dt^2} = \left(\dfrac{R_1}{r_1} + \dfrac{R_2}{r_2} \right) z - \dfrac{R_2}{r_2} c \; , \end{cases}$$

und man schließt daraus sogleich, daß die beiden ersten Gleichungen ganz so behandelt werden können, wie bei der vorhergehenden Untersuchung, wo an dem Bewegten nur eine gegen einen festen Punkt gerichtete Kraft thätig war; wenn daher r die Projection des Fahrstrahles r_1 in der Ebene der xy, und ω den Winkel zwischen dieser Projection und der Achse der x bezeichnet, v_0 die anfängliche Geschwindigkeit ist, und α_0, β_0, γ_0 oder γ_0 und ε_0 die Winkel sind, welche ihre Richtung bestimmen, und von denen die ersten von dieser Richtung mit den drei Achsen der x, y, z eingeschlossen werden, der letzte von ihrer Projection in der Ebene der xy mit der Achse der x gebildet wird, so hat man einmal

$$\text{H.)} \quad r^2 \frac{d\omega}{dt} = C = x_0 \, v_0 \sin \gamma_0 \sin \varepsilon_0 = x_0 \, v_0 \cos \beta_0 \; ;$$

das Princip von der Einhaltung der Oberflächen findet also noch statt in einer Ebene, welche zur Verbindunglinie der beiden festen Punkte senkrecht ist.

Ferner nimmt der Ausdruck für die lebendige Kraft des Bewegten die Form an:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v_0^2 + 2\int_{r_0'}^{r_1} dr_1 . \frac{R_1}{m} + 2\int_{r_0''}^{r_2} dr_2 . \frac{R_2}{m}, \quad (J.$$

wenn r_0' für $\sqrt{x_0^2 + z_0^2}$ und r_0'' für $\sqrt{x_0^2 + (z_0 - c)^2}$ gesetzt wird, und dadurch kann die Geschwindigkeit des Bewegten für jede gegebene Lage desselben bestimmt werden. Im Allgemeinen aber dürfte es die Kräfte unserer jetzigen Analysis übersteigen, die Differential-Gleichungen der Bahn des Bewegten darzustellen, und damit die Coordinaten in Function der Zeit zu erhalten.

Nur in dem besondern Falle, wo die Kräfte R_1 und R_2 den Entfernungen r_1 und r_2 proportional sind, kann die Untersuchung durchgeführt werden, da in diesem Falle, wie schon früher erwähnt, jede der Gleichungen (G) für sich allein integrirbar ist. Nehmen wir dazu diese Kräfte als anziehende, und bezeichnen ihre Intensitäten für die Einheit der Entfernung mit

$$-mk_1 \quad \text{und} \quad -mk_2 ,$$

und ersetzen $k_1 + k_2$ durch k, so werden die Gleichungen (G) einfach:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -ky , \quad \frac{d^2z}{dt^2} = k_2c - kz , \quad (K.$$

und man erhält durch die beiden ersten für die Bewegungen parallel zu den Achsen der x und der y, wie in §. 84 die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 \cos t\sqrt{k} + \frac{v_0 \cos\alpha_0}{\sqrt{k}} \sin t\sqrt{k} \\ y &= \frac{v_0 \cos\beta_0}{\sqrt{k}} \sin t\sqrt{k} \end{aligned}\right\}$$

und damit als Gleichung der Projection der Bahn des Bewegten in der Ebene der xy ebenso wie dort:

$$k x_0^2 y^2 + v_0^2 (x \cos\beta_0 - y \cos\alpha_0)^2 = x_0^2 v_0^2 \cos^2\beta_0 . \quad (a.$$

Diese Projection ist also wieder eine Ellipse, deren Mittelpunkt im Anfangspunkt liegt, und es gelten darnach für die Bewegung parallel zur Ebene der xy oder senkrecht zur Verbindungslinie AB der beiden festen Punkte alle Gesetze, welche in §. 84 gefunden wurden.

Die dritte der Gleichungen (K) auf dieselbe Weise behandelt, wie es in §. 83 geschehen ist, gibt zuerst

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = C - 2k_2 hz - kz^2$$

wo C für $v_0^2 \cos^2\gamma_0 - 2k_2 hz_0 + kz_0^2$ steht, und dann unter der Voraussetzung, daß am Anfang z mit t wächst

$$t\sqrt{k} = \text{arc} \cos \frac{k_2 h - kz}{\sqrt{Ck - k_2^2 c^2}} - C' .$$

Faßt man daher wieder die constanten Factoren von $\cos t\sqrt{k}$ und $\sin t\sqrt{k}$ in A und B zusammen, so wird

$$kz = k_2 c - A \cos t\sqrt{k} + B \sin t\sqrt{k} ,$$

und gibt mit dem Aenderungsgesetze von z in Bezug auf t:

$$k\frac{dz}{dt} = A\sqrt{k} \sin t\sqrt{k} + B\sqrt{k} \cos t\sqrt{k} ,$$

und durch Einführung der anfänglichen Werthe von z und $\frac{dz}{dt}$

$$A = k_2 c - kz_0 \quad , \qquad B = v_0\sqrt{k} \cos\gamma_0 ,$$

wodurch die Gleichung für die zur Achse der z parallele Bewegung die Form annimmt:

$$k_2 c - kz = (k_2 c - kz_0) \cos t\sqrt{k} - v_0\sqrt{k} \cos\gamma_0 \sin t\sqrt{k} .$$

Verbindet man endlich diese Gleichung mit einer der frühern, z. B. derjenigen, welche die Bewegung parallel zur Achse der y darstellt, um damit t zu eliminiren, so findet man

b.) $kh^2 y^2 + [(h + z_0 - z) \cos\beta_0 - y \cos\gamma_0]^2 v_0^2 = h^2 v_0^2 \cos^2\beta_0$

als Gleichung der Projection der Bahn in der Ebene der yz, worin h für $\frac{k_2}{k} c - z_0$ gesetzt ist. Diese Projection ist demnach ebenfalls eine

Ellipse, deren Mittelpunkt $h + z_0$ oder $\frac{k_2}{k}c$ Längeneinheiten über der Ebene der xy liegt.

Die beiden Gleichungen (a) und (b) sind aber auch einzeln die Gleichungen elliptischer Cylinder, deren Erzeugende zu den Achsen der z und x parallel sind, und zusammen die Gleichungen der Durchschnittscurve dieser Cylinder oder der Bahn des Bewegten, welche, wie man sich leicht überzeugen wird, immer noch eine ebene Curve ist. Denn bringt man die genannten Gleichungen auf die Formen:

$$\frac{k y^2}{v_0^2 \cos^2\beta_0} + \frac{(x \cos\beta_0 - y \cos\alpha_0)^2}{x_0^2 \cos^2\beta_0} = 1$$

$$\frac{k y^2}{v_0^2 \cos^2\beta_0} + \frac{(z' \cos\beta_0 - y \cos\gamma_0)^2}{h^2 \cos^2\beta_0} = 1$$

so zieht man daraus die Gleichung:

$$\frac{z' \cos\beta_0 - y \cos\gamma_0}{h} = \pm \frac{x \cos\beta_0 - y \cos\alpha_0}{x_0}$$

also die Gleichung einer durch den Anfangspunkt der z' gehenden Ebene.

In dem besondern Falle, wo die anfängliche Geschwindigkeit zur Ebene der xz senkrecht gerichtet ist, wo also $\cos\alpha_0 = \cos\gamma_0 = 0$, $\cos\beta_0 = 1$ ist, werden die beiden obigen Gleichungen der Bahn einfacher

$$k\frac{y_2}{v_0^2} + \frac{x^2}{x_0^2} = 1 \quad , \quad k\frac{y^2}{v_0^2} + \frac{z'^2}{h^2} = 1$$

und man zieht daraus als dritte Gleichung oder als Gleichung ihrer Projection in der Ebene der xz:

$$\frac{z'}{h} = \pm \frac{x}{x_0},$$

d. i. die Gleichung einer zur Achse der y parallelen Ebene, welche durch den Mittelpunkt der zweiten, in der Ebene der yz liegenden Ellipse und durch den anfänglichen Ort des Bewegten gelegt ist, und deren Normale mit der Achse der z einen Winkel ϑ bildet, für welchen man hat:

$$\tang \vartheta = \pm \frac{h}{x_0} = \pm \frac{k_2 c - k z_0}{k x_0}.$$

Aus den Gleichungen der Bewegungen parallel zu den Coordinaten-Achsen folgen wie früher die Ausdrücke der rechtwinkligen Componenten

der Geschwindigkeit des Bewegten und mit ihnen der Werth dieser Geschwindigkeit selbst in Funktion der Zeit, während der obige allgemeine Ausdruck (J) von v^2 die Form erhält:

$$v^2 = v_0{}^2 + k_1 (r_0'^2 - r_1{}^2) + k_2 (r_0''^2 - r_2{}^2) \ ,$$

oder

$$v^2 = v_0{}^2 + k (x_0{}^2 + z_0{}^2) + 2 k_2 c (z - z_0) - k (x^2 + y^2 + z^2) \ ,$$

und dadurch die Geschwindigkeit in Function der Entfernungen oder der Coordinaten gibt.

Mit $k_2 = 0$ oder $c = 0$ kommt man wieder auf den in §. 84 behandelten Fall zurück; die dadurch sich ergebenden Gleichungen unterscheiden sich indessen von den dort gefundenen noch durch die allgemeinere anfängliche Lage und die allgemeinere Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit.

Drittes Kapitel.

Gezwungene Bewegung des materiellen Punktes.

I. Bewegung in vorgeschriebener Bahn.

§. 93.

Unter gezwungener Bewegung versteht man diejenige Bewegung eines materiellen Punktes, welche derselbe annimmt, wenn er durch entgegenstehende Hindernisse gezwungen wird, einen andern Weg zu beschreiben, als den, welchen er vermöge der bewegenden Kräfte, die auf ihn wirken, ungehindert verfolgen würde. — Die hieher gehörenden Fälle lassen sich zuerst darnach unterscheiden, ob das Hinderniß unverrückbar, oder ob es beweglich ist, und dann, ob durch dasselbe die Bahn des Bewegten bestimmt vorgezeichnet, oder ob ihm durch dasselbe noch in einer oder der andern Richtung einige Freiheit in der Bewegung gestattet wird, und es ist einleuchtend, daß diese beiden Hauptfälle, in der einfachsten Weise betrachtet, wie bei der Lehre vom Gleichgewichte, durch die Bewegung eines materiellen Punktes in einer bestimmten Curve, und durch die Bewegung auf einer gegebenen Fläche dargestellt werden können. Beginnen wir also mit dem bestimmtesten Falle, mit der Bewegung des materiellen Punktes in vorgeschriebener Bahn, d. h. in einer unverrückbaren und der Form nach unveränderlichen Curve.

Seien $f_1(x, y) = 0$ und $f_2(x, z) = 0$ die Gleichungen der gegebenen Curve auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, R die Intensität der bewegenden Kraft, wenn der Bewegte in einem Punkte M jener Curve angekommen ist, dessen Coordinaten x, y, z sind und ϑ der Winkel, welchen die Richtung der Kraft R mit der Tangente in diesem Punkte bildet, und dessen Cosinus durch die Gleichung:

$$\cos\vartheta = \frac{X}{R}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{R}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{R}\cdot\frac{dz}{ds}$$

ausgedrückt wird, worin X, Y, Z wie immer die zu den Achsen parallelen Componenten von R vorstellen; endlich seien λ, μ, ν die Winkel zwischen denselben Achsen und dem Krümmungshalbmesser oder der Haupt-Normalen im Punkte xyz, und λ', μ', ν' diejenigen, welche irgend eine noch unbestimmte Normale mit ihnen bildet.

Da vorausgesetzt wird, daß der materielle Punkt vermöge der Kraft R eine andere Bahn beschreiben würde, als er jetzt wegen des festen Hindernisses zurücklegt, so wird er in Folge des Bestrebens, die vorgezeichnete feste Curve zu verlassen, auf diese einen Druck ausüben, dessen Größe in dem Punkte xyz mit N' bezeichnet werde, und dessen Richtung mit den Achsen die unbestimmten oder richtiger nicht ganz bestimmten Winkel λ', μ', ν' bilden wird. Diese Winkel sind nämlich nicht nur durch die Bedingungsgleichung:

$$\cos^2 \lambda' + \cos^2 \mu' + \cos^2 \nu' = 1$$

unter sich verbunden, sondern auch der weitern Bedingung unterworfen, daß sie einer Normalen zur Curve angehören, d. i. einer Geraden, welche auf der Tangente senkrecht steht, eine Bedingung, die bekanntlich durch die Gleichung:

$$\frac{dx}{ds} \cos \lambda' + \frac{dy}{ds} \cos \mu' + \frac{dz}{ds} \cos \nu' = 0$$

ausgedrückt wird.

Denken wir uns nun, wie bei der Untersuchung der Gesetze des Gleichgewichtes mit der Kraft R eine dem noch unbekannten Drucke N' gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Kraft verbunden, so wird diese letztere die Wirkung der feste Curve ersetzen, da diese keinen größern Widerstand zu leisten braucht, als der auf sie ausgeübte Druck ist, und wir werden den Bewegten dann als ganz frei betrachten können. Die Gleichungen seiner Bewegung werden dadurch

$$\text{a.)} \quad \left\{ \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X - N' \cos \lambda' \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y - N' \cos \mu' \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z - N' \cos \nu' ; \end{aligned} \right.$$

sie geben, wie bei der Lehre vom Gleichgewichte, einerseits durch Elimination der unbekannten Größen N', λ', μ', ν' die Gesetze der Bewegung

in der Curve, und dienen anderseits mit diesen wieder zur Bestimmung jener Unbekannten.

Die Elimination wird einfach dadurch ausgeführt, daß man die obigen Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ multiplicirt und dann ihre Summe nimmt; denn man findet mit der Beachtung der letzten Bedingungsgleichung und der analytischen Formen:

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}}$$

$$=\frac{1}{\frac{ds}{dt}}\cdot\frac{\frac{1}{2}d.\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}}{dt}=\frac{1}{\frac{ds}{dt}}\cdot\frac{\frac{1}{2}d.\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{dt}$$

$$=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt},$$

welche aus den Gleichungen (66) und (67) in §. 59 folgen, das Gesetz:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=m\frac{dv}{dt}=X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}=R\cos\vartheta\,, \quad (90.$$

welches mit der Gleichung (69) gleichbedeutend ist und zeigt, daß auch bei der Bewegung in einer festen stetigen Curve die Aenderung der Geschwindigkeit allein durch die nach der Tangente gerichtete Componente T der bewegenden Kraft R bewirkt wird.

Ebenso findet man das Aenderungsgesetz der lebendigen Kraft in Bezug auf den zurückgelegten Weg wieder, wenn man für $\frac{d^2s}{dt^2}$ den oben voranstehenden Werth:

$$\frac{\frac{1}{2}d.\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{ds}=\frac{\frac{1}{2}d.v^2}{ds}$$

einführt, indem dadurch wie in §. 66 die Gleichung:

$$\frac{1}{2}\frac{d.mv^2}{ds}=X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}=R\frac{dr}{ds},$$

und als deren allgemeines Integral

$$91.)\quad \begin{cases} mv^2 - mv_0^2 = 2\int_{s_0}^{s} ds\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right) \\ \qquad = 2\int_{s_0}^{s} ds \,.\, R\frac{dr}{ds} \end{cases}$$

hervorgeht. Es gelten also auch in dieser Beziehung alle Folgerungen, welche wir aus der vorstehenden Gleichung für die freie Bewegung eines materiellen Punktes in den §§. 66 bis 70 abgeleitet haben. Die lebendige Kraft des Bewegten wächst auch hier wie die Arbeit der bewegenden Kraft; sie bleibt unverändert und die Bewegung wird eine gleichförmige, wenn diese Arbeit fortwährend Null ist, d. h. wenn entweder R selbst Null, oder in allen Punkten senkrecht zur Tangente oder normal zur Curve gerichtet ist. Findet dieses letztere nur in einzelnen Punkten der Curve statt, so hat dort die Geschwindigkeit einen größten oder kleinsten Werth. Ist ferner die Function $X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}$ eine vollständige Abgeleitete einer Function $F(x, y, z)$ der drei Veränderlichen x, y und z, so wird die Geschwindigkeit des Bewegten immer denselben Werth wieder erhalten, wenn jene Function denselben Werth bekommt, u. s. f.

§. 94.

Um nun den Druck N′, welchen die Curve erleidet, und seine Richtung zu bestimmen, bringe ich die Gleichungen (a) unter die Form:

$$\begin{cases} N' \cos\lambda' = X - m\frac{d^2x}{dt^2} \\ N' \cos\mu' = Y - m\frac{d^2y}{dt^2} \\ N' \cos\nu' = Z - m\frac{d^2z}{dt^2}, \end{cases}$$

unter welcher sie aussprechen, daß die drei Componenten des Druckes N′ den Unterschieden gleich sind zwischen den Componenten X, Y, Z der bewegenden Kraft und den drei Componenten $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$ oder den Componenten einer Kraft F, welche dieselbe Bewegung, wie sie

der materielle Punkt durch die Kraft R und die feste Curve erhält, allein hervorbringen würde, wenn derselbe ganz frei wäre, daß also der Druck N' die Resultirende ist aus der bewegenden Kraft R und einer der F gleichen und entgegengesetzten Kraft. Zerlegt man also sowohl die Kraft R, als die — F in ihre tangentiale und normale Componente, so werden sich die beiden tangentialen Componenten als gleiche und entgegengesetzte aufheben, die normalen dagegen, welche wir mit N_1 und — N_2 bezeichnen wollen und deren Resultirende den Druck N' vorstellt, fallen zwar beide in die Normal-Ebene, aber im Allgemeinen nicht in dieselbe Richtung und wirken auch nicht immer in demselben Sinne, da die — N_2 immer nach dem vom Krümmungsmittelpunkte abgewendeten Theile der Haupt-Normalen gerichtet ist, während die N_1 irgend eine Richtung in der Normal-Ebene haben kann. Bezeichnet also ψ den Winkel, welchen die Richtung der N_1 mit dem genannten Theile der Haupt-Normalen bildet, so hat man

$$N'^2 = N_1^2 + N_2^2 + 2 N_1 N_2 \cos\psi .$$

Dasselbe ergibt sich durch die weitere analytische Ausführung. Setzt man nämlich für die drei Componenten der Kraft F die in §. 64 abgeleiteten Werthe:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d.u_x}{dt} = m\frac{d.v\frac{dx}{ds}}{dt} = m\frac{dv}{dt}\cdot\frac{dx}{ds} + m v^2\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{d.u_y}{dt} = m\frac{d.v\frac{dy}{ds}}{dt} = m\frac{dv}{dt}\cdot\frac{dy}{ds} + m v^2\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{d.u_z}{dt} = m\frac{d.v\frac{dz}{ds}}{dt} = m\frac{dv}{dt}\cdot\frac{dz}{ds} + m v^2\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds}$$

und bezeichnet wie dort die nach der Tangente gerichtete Componente $m\frac{dv}{dt}$ der Kraft F, welche, wie aus Gleichung (90) folgt, der nach derselben Geraden gerichteten Componenten R cos ϑ der Kraft R gleich ist, mit T, die nach der Haupt-Normale oder gegen den Krümmungsmittelpunkt der Curve gerichtete Componente: $m\frac{v^2}{\varrho}$ der Kraft F wie vorher mit N_2, so wird zuerst wieder

$$\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= T\frac{dx}{ds} + N_2\cos\lambda \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= T\frac{dy}{ds} + N_2\cos\mu \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= T\frac{dz}{ds} + N_2\cos\nu \end{aligned}\right.$$

und damit folgt dann:

$$\left\{\begin{aligned} N'\cos\lambda' &= X - T\frac{dx}{ds} - N_2\cos\lambda \\ N'\cos\mu' &= Y - T\frac{dy}{ds} - N_2\cos\mu \\ N'\cos\nu' &= Z - T\frac{dz}{ds} - N_2\cos\nu\,. \end{aligned}\right.$$

Nun sind offenbar $X - T\frac{dx}{ds}$, $Y - T\frac{dy}{ds}$, $Z - T\frac{dz}{ds}$ die rechtwinkligen Componenten der in die Normal-Ebene fallenden Seitenkraft $N_1 = \sqrt{R^2 - T^2} = R\sin\vartheta$ der bewegenden Kraft R, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man jene Componenten zum Quadrat erhebt und ihre Summe nimmt. Die Richtung dieser Kraft N_1 in der Normal-Ebene ist durch den Durchschnitt dieser letztern mit derjenigen Ebene bestimmt, welche die Tangente und die Richtung der Kraft R enthält. Bezeichnen wir demnach die Winkel, welche die genannte Durchschnittslinie mit den drei Achsen einschließt, mit $\lambda_{,}$, $\mu_{,}$, $\nu_{,}$, so hat man

$$\left\{\begin{aligned} N'\cos\lambda' &= N_1\cos\lambda_{,} - N_2\cos\lambda \\ N'\cos\mu' &= N_1\cos\mu_{,} - N_2\cos\mu \\ N'\cos\nu' &= N_1\cos\nu_{,} - N_2\cos\nu\,, \end{aligned}\right.$$

und es geht aus diesen Gleichungen hervor, daß der Druck N′, welchen die Curve zu erleiden hat, die Resultirende ist von der normalen Seitenkraft N_1 der bewegenden Kraft R und von einer der normalen Componenten $N_2 = m\frac{v^2}{\varrho}$, welche für sich allein die Aenderung in der Richtung der Bewegung bewirken würde (§. 62 — 64), gleichen und entgegengesetzten Kraft; denn nennt man den Winkel zwischen der Richtung des Druckes N_1 und demjenigen Theile der Hauptnormalen

der Curve, welcher sich vom Krümmungsmittelpunkt entfernt, ψ, so hat man

$$\cos\lambda \cos\lambda_{,} + \cos\mu \cos\mu_{,} + \cos\nu \cos\nu_{,} = -\cos\psi$$

und demnach auch, indem man die vorhergehenden Gleichungen zum Quadrat erhebt und addirt:

$$N'^2 = N_1^2 + N_2^2 + 2 N_1 N_2 \cos\psi \,. \qquad (92.$$

Die Curve hat also nicht nur dem Drucke N_1 der Kraft R zu widerstehen, welcher derselbe ist, als wenn der materielle Punkt durch eine nach der Tangente gerichtete Kraft P im ruhenden Gleichgewicht erhalten würde, und welchen wir deßhalb den statischen oder Gleichgewichts-Druck nennen wollen, sondern auch dem Drucke N_2 oder $m \frac{v^2}{\varrho}$, welcher durch die Bewegung oder vielmehr durch die von der festen Curve bewirkte Aenderung in der Richtung der Bewegung erzeugt wird, welcher der lebendigen Kraft des Bewegten und der Curve proportional, und nach dem vom Krümmungsmittelpunkte abgewendeten Theile der Hauptnormalen gerichtet ist. Nennen wir deßhalb diesen letztern Druck den dynamischen oder Bewegungsdruck, so können wir die obige Gleichung einfach so aussprechen: Der Druck, welchen die feste Curve zu erleiden hat, ist die Resultirende aus dem Gleichgewichts- und dem Bewegungsdrucke.

Wenn die Bewegung eine gleichförmige wird, so ist der dynamische Druck nur mit der Krümmung der Curve veränderlich, und wenn die gleichförmige Bewegung dadurch entsteht, daß $R = 0$ ist, so ist auch der statische Druck Null, und die Curve hat nur den dynamischen zu erleiden, was leicht daraus geschlossen werden kann, daß die Curve in diesem Falle nur die Aenderung in der Richtung der Bewegung zu bewirken hat. Ist ferner die gegebene Curve eine ebene, und liegt die Richtung der bewegenden Kraft auch in der Ebene dieser Curve, so fällt die Richtung des statischen Druckes mit der des Bewegungs-Druckes zusammen, und man hat einfach:

$$N' = N_1 + N_2 \,,$$

oder auch

$$N' = R \sin\vartheta + m \frac{v^2}{\varrho} \,; \qquad (93.$$

d. h. der Druck, welchen eine ebene Curve zu erleiden hat, in deren Ebene die Richtung der bewegenden Kraft liegt,

ist gleich der algebraischen Summe des statischen und dynamischen Druckes.

Endlich ist noch zu bemerken, daß man wie beim Gleichgewichte immer zwei verschiedene Lagen des Bewegten auf der Curve zu unterscheiden hat; er kann sich nämlich entweder auf der converen Seite, oder auf der concaven Seite derselben bewegen, und die Forderung, daß sich der materielle Punkt nach einer gegebenen Curve bewege, wird im ersten Falle, wo er sich auf der gewölbten Seite befindet, nur erfüllt werden können, wenn der resultirende Druck N' einen größeren Winkel, als $\frac{1}{2}\pi$ mit der Richtung des dynamischen Druckes einschließt, während im zweiten Falle, wo er sich auf der hohlen Seite bewegt, dieser Winkel kleiner sein muß, als $\frac{1}{2}\pi$, wenn jener Forderung soll entsprochen werden. Für den einfachern Fall der Bewegung in einer ebenen Curve, in deren Ebene auch die Richtung der bewegenden Kraft liegt, muß daher der Winkel zwischen dieser letztern Richtung und der des dynamischen Druckes Null, also der resultirende Druck N' im Sinne des Bewegungsdruckes gerichtet sein, wenn der Bewegte auf der concaven Seite bleiben soll; im entgegengesetzten Falle dagegen, wenn er auf der gewölbten Seite sich bewegen soll, muß sich auch ein im entgegengesetzten Sinne, also gegen den Krümmungsmittelpunkt gerichteter Druck auf die Curve ergeben, was nur möglich ist, wenn der statische Druck in diesem Sinne wirkt und größer ist, als der dynamische Druck.

§. 95.

Der dynamische oder Bewegungsdruck wird häufiger mit dem Namen: Centrifugalkraft bezeichnet, weil der materielle Punkt, so lange die Bewegung in der Curve dauert, ein Bestreben zeigt, sich von dem Krümmungsmittelpunkte der Curve, in welcher er sich bewegt, zu entfernen, und weil man dieses Bestreben zuerst bei der Bewegung im Kreise, wo der Krümmungsmittelpunkt unveränderlich ist, wahrgenommen und untersucht hat. Dieser Name veranlaßt jedoch häufig die falsche Vorstellung, als sei die Centrifugalkraft eine von Außen auf den Bewegten wirkende unabhängige Kraft, welche ihn in der Richtung des Halbmessers fortzutreiben strebe und wirklich forttreibe, während es nur ein Druck ist, welcher von dem Bewegten selbst ausgeht, und die Größe des Widerstandes bedingt, den die Curve dem Bewegten entgegensetzen muß, um ihn in der vorgeschriebenen Bahn zu erhalten.

Die mit dem Begriffe: Centrifugalkraft so häufig verbundene Vorstellung einer Bewegung oder Geschwindigkeit erzeugenden Kraft rührt offenbar von der einseitigen Betrachtung der Bewegung eines Körpers oder materiellen Punktes her, welcher gezwungen ist, auf einer festen Geraden zu bleiben, während diese um einen festen Punkt gedreht wird, weil man dabei immer nur die relative Bewegung jenes Körpers oder Punktes in Bezug auf diese Gerade und deren Drehungspunkt berücksichtigt. Untersuchen wir daher diese Bewegung etwas näher, indem wir dieselbe als absolute betrachten, dabei aber von der Reibung noch Umgang nehmen.

Sei M, Fig. 83, ein materieller Punkt, welcher sich längs der unbiegsamen Geraden CM ohne Reibung bewegen kann. Wird nun diese Gerade mit einer constanten Geschwindigkeit in der Ebene der Figur um den festen Punkt C gedreht, so wird sich der Punkt M allerdings von diesem letztern entfernen, und scheinbar auch in der Richtung des Fahrstrahles oder Halbmessers CM, in der That aber wird er sich in dem ersten kleinen Zeittheilchen τ sehr nahe in der Geraden MN bewegen, welche zur anfänglichen Lage des Halbmessers CM senkrecht ist, d. h. in der Tangente an dem Kreise, den ein gleichweit von C entfernter mit CM fest verbundener Punkt m beschreibt; er wird also, wenn die Gerade CM in die Lage CN gekommen ist, in N sein und sich um mN weiter von C entfernt haben, als er in M war, und er verläßt die Richtung MN nur darum, weil der Druck, den die Gerade CN auf ihn ausübt, nach und nach ebenfalls eine andere Richtung erhält. Betrachten wir also die Bewegung zuerst nur im ersten Zeittheilchen τ, so werden die Gleichungen dieser Bewegung in Bezug auf die festen Achsen CX und CY nahezu mit den folgenden übereinstimmen:

$$\omega = \varphi t \quad , \qquad x = r_0 \quad , \qquad y = r_0 \tang \omega = r_0 \tang \varphi t \ .$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{r_0 \varphi}{\cos^2 \varphi t} = \frac{r_0 \varphi}{\cos^2 \omega} \ ,$$

worin r_0 die anfängliche Entfernung CM von C bezeichnet, und $r_0 \varphi$, wie leicht zu sehen, die anfängliche Geschwindigkeit ausdrückt. In Bezug auf die bewegliche Gerade CM dagegen wird die Bewegung des Punktes M annähernd durch die Gleichungen:

$$r = r_0 \sec \omega = r_0 \sec \varphi t \quad , \qquad v = r_0 \varphi \tang \omega \sec \omega$$

vorgestellt, und ist demnach sehr nahe eine gleichförmig beschleunigte. Denn da der Winkel ω ebenso wie t nur sehr klein vorausgesetzt wird, so hat man mit hinreichender Genauigkeit

$$\cos\omega = 1 - \frac{1}{2}\omega^2 \quad , \qquad \sec\omega = 1 + \frac{1}{2}\omega^2$$

und damit

$$r = r_0 + \frac{1}{2} r_0 \varphi^2 t^2 \quad , \qquad v = r_0 \varphi \omega = r_0 \varphi^2 t \; .$$

Ist also m die Masse des Bewegten, so kann man sich diese relative Bewegung längs der Geraden CM, oder in der Richtung des Halbmessers im Anfang durch eine Kraft:

$$F = m r_0 \varphi^2 = m \frac{v_0^2}{r_0}$$

erzeugt denken, indem man die fördernde Geschwindigkeit $r_0 \varphi$ des Punktes m mit v_0 bezeichnet. Soll nun der Punkt M fortwährend dieselbe Entfernung von C behalten, so muß eine der F gleiche aber entgegengesetzte, gegen C gerichtete Kraft angewendet werden; wenn man daher den Bewegten durch eine von C aus beschriebene Kreislinie umschränkt, so hat diese die Function der genannten Kraft zu erfüllen, sie hat in jedem Augenblicke einen ihr gleichen Widerstand zu leisten, und wird demnach auch in jedem Augenblicke einen ebenso großen Druck erleiden. Dasselbe wird der Fall sein, wenn man den Punkt M durch eine unausdehnbare Gerade, einen nicht dehnbaren Faden, mit dem festen Punkte C verbindet; dieser Faden wird mit einer Kraft $F = m r_0 \varphi^2$ gespannt werden, und zerreißen, wenn seine Festigkeit dieser Spannung nicht gewachsen ist, d. h. wenn er ein an ihm befestigtes Gewicht F in lothrechter Richtung auf die Dauer nicht zu tragen vermag. Würde diese Abreißen in m erfolgen, oder wäre dort die Kreislinie unterbrochen, so würde der Bewegte einfach wieder längs der Tangente mT in diesem Punkte, und zwar mit der constanten Geschwindigkeit $v_0 = r_0 \varphi$ fortgehen, und nicht in der Richtung des Halbmessers Cm; denn der dynamische Druck kann nur so lange dauern, als die gezwungene Bewegung dauert, er hört in demselben Augenblicke auf, wo der materielle Punkt frei wird.

Um nun aber die Bewegung unseres Punktes M allgemeiner zu untersuchen, seien x und y seine Coordinaten am Ende der Zeit t in Bezug auf zwei feste Achsen in der Ebene der Bewegung, welche sich im Punkte C schneiden und von denen die der x mit der anfänglichen Lage der beweglichen Geraden zusammenfällt, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ seine Entfernung vom Drehungspunkte C, ω der Winkel, welchen die bewegliche

Gerade mit der Achse der x bildet und φ die constante Winkelgeschwindigkeit derselben; endlich sei N die Intensität des von dieser Geraden auf den materiellen Punkt ausgeübten Druckes, dessen Richtung senkrecht zu ihr ist und demnach den Winkel $\frac{1}{2}\pi + \omega$ mit der Achse der x einschließt. Dieser Druck wird die einzige Kraft sein, welche auf den Bewegten wirkt; ihre zu den Achsen der x und y parallelen Componenten: $-N \sin\omega$ und $N \cos\omega$ geben daher die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -N\sin\omega \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \quad N\cos\omega \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(a.}$$

durch welche die Gesetze der Bewegung bestimmt sind.

Diese Gleichungen geben nämlich einerseits, indem man die erste mit $\cos\omega$, die zweite mit $\sin\omega$ multiplicirt und ihre Summe nimmt, den Ausdruck:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos\omega + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\omega = 0\ ,$$

und auf der andern Seite, wenn man die erste mit $\sin\omega$, die zweite mit $\cos\omega$ multiplicirt, durch ihre Differenz den Werth von N, nämlich:

$$N = m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\cos\omega - \frac{d^2x}{dt^2}\sin\omega\right).$$

Ersetzt man dann in diesen Ausdrücken die Coordinaten x und y durch ihre Werthe in r und ω:

$$x = r\cos\omega\ , \qquad y = r\sin\omega\ ,$$

aus welchen man mit der Beachtung, daß die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\omega}{dt} = \varphi \qquad \text{(b.}$$

unveränderlich ist, die Aenderungsgesetze:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2}\cos\omega - 2\varphi\frac{dr}{dt}\sin\omega - r\varphi^2\cos\omega \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2}\sin\omega + 2\varphi\frac{dr}{dt}\cos\omega - r\varphi^2\sin\omega \end{aligned}\right\}.$$

zieht, so nehmen dieselben die Form an:

c.) $$\frac{d^2 r}{d t^2} = r \varphi^2 \quad , \qquad N = 2 m \varphi \frac{dr}{dt} \; .$$

Die erste dieser Gleichungen, welche in Verbindung mit der Gleichung (b) die vollständige Lösung unserer Aufgabe bieten, zeigt, daß die Aenderung der Geschwindigkeit des materiellen Punktes längs der beweglichen Geraden allerdings einer veränderlichen Kraft $m r \varphi^2$ zugeschrieben werden kann, welche in jedem Augenblicke oder für jede Lage des Bewegten auch den dynamischen Druck desselben vorstellt, wenn er sich von C nicht weiter entfernen kann. Man wird aber nur eine sehr unvollkommene Kenntniß von unserer Bewegung erhalten, wenn man jene Gleichung unter der Voraussetzung ableitet, daß die Centrifugalkraft $m r \varphi^2$ die auf den Bewegten wirkende Kraft sei; denn man erhält auf diese Weise durchaus keine Kenntniß von der Kraft N, welche auf die bewegliche Gerade in der Entfernung r von C, oder was dasselbe ist, welche senkrecht zu dieser Geraden auf den Bewegten selbst ausgeübt werden muß, um die gleichförmige Bewegung der Geraden, oder die constante Winkelgeschwindigkeit des Bewegten zu erhalten, und man würde sehr irren, wenn man für eine begrenzte Länge der beweglichen Geraden die Größe und Richtung der Geschwindigkeit des Bewegten in dem Augenblicke, wo er diese Gerade verläßt, nach der Größe und Richtung der Centrifugalkraft in diesem Augenblicke beurtheilen wollte *).

Es ist also für die richtige Erkenntniß unserer Bewegung und aller ähnlichen unumgänglich nothwendig, sie in der oben angegebenen Weise zu betrachten, und demnach die sogenannte Centrifugalkraft, welche immer nur eine Folge der eigentlichen bewegenden Kraft ist, als bewegende Kraft aus den Untersuchungen der Bewegung ganz und gar zu verbannen, und sie immer nur da selbstständig einzuführen, wo sie als dynamischer Druck wirkt, wo sie also entweder einer andern Kraft das Gleichgewicht hält oder durch die Reibung einen Widerstand erzeugt.

§. 96.

Durch die vorhergehende Betrachtung haben wir übereinstimmend mit dem allgemeinen Werthe von N′, wenn man darin R Null setzt

*) Die weitere Untersuchung der Bewegung behalten wir dem folgenden Kapitel (§§. 124 und 125) vor; dort wird dieselbe als eine relative betrachtet, und dann auch auf die Reibung Rücksicht genommen werden.

und v und ϱ als unveränderlich nimmt, für die gleichförmige Bewegung im Kreise den Bewegungsdruck N_2 gleich $m\frac{v_0^2}{r} = mr\varphi^2$ gefunden, und wir schließen daraus, daß dieser Druck bei gleicher Entfernung vom Mittelpunkte dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit, bei gleicher Winkelgeschwindigkeit dem Halbmesser r oder der Entfernung vom Mittelpunkte des beschriebenen Kreises proportional ist, und in allen Fällen wie die Masse des Bewegten zunimmt. Will man dann die Winkelgeschwindigkeit durch die Umdrehungszeit T ersetzen, so darf man nur statt φ seinen Werth $\frac{2\pi}{T}$ in den obigen Ausdruck einführen, um dadurch

$$N = mr\varphi^2 = mr\frac{4\pi^2}{T^2}$$

zu erhalten, und daraus zu folgern, daß der dynamische Druck bei gleicher Entfernung r im umgekehrten Verhältnisse zu dem Quadrate der Umdrehungszeit stehet.

In dem vorhergehenden §. haben wir diesen Druck für den Fall betrachtet, wo der materielle Punkt von einem festen Kreise umgeben oder durch einen unausdehnbaren Faden an einen festen Punkt geheftet ist und sich gleichförmig bewegt, also ohne eine bewegende Kraft. Nehmen wir daher, um unsere Vorstellung zu erweitern, noch einige Fälle, in denen eine Kraft auf den Bewegten wirkt, und zwar eine solche, welche immer normal zu der Kreislinie oder gegen deren Mittelpunkt gerichtet ist, damit die Bewegung eine gleichförmige bleibt, und untersuchen wir, welchen Einfluß der dynamische Druck auf die Größe des beschriebenen Kreises hat.

Sei zuerst ein materieller Punkt mittels eines dehnbaren elastischen Fadens ohne Masse an dem Mittelpunkt C befestigt, d. h. mittels eines Fadens, der sich durch eine in der Richtung seiner Länge wirkende Kraft ausdehnen läßt, der aber seine frühere Länge wieder annimmt, wenn die Kraft zu wirken aufhört, und setzen wir voraus, daß die Längeneinheit dieses Fadens durch die Gewichtseinheit um λ verlängert werde, daß demnach seine ursprüngliche Länge l_0, wenn man ihn durch ein Gewicht P in lothrechter Lage spannt, um $\lambda l_0 P$ größer, oder gleich $l_0(1+\lambda P)$ werde. Es wird unter dieser Voraussetzung und unter der weiteren, daß keine Schwere vorhanden sei, einleuchten, daß der materielle Punkt im Anfang der Bewegung den Faden spannen, und während derselben auf gleicher Länge erhalten wird, nämlich auf

derjenigen, für welche die Spannkraft dem dynamischen Drucke gleich ist. Bezeichnen wir diese Länge mit x, so ist

$$x = l_0(1 + \lambda P) \quad , \quad P = m x \varphi^2 \; ,$$

und demnach:

$$x = l_0(1 + \lambda m x \varphi^2) = \frac{l_0}{1 - m \lambda l_0 \varphi^2} \; ,$$

oder wenn man die Masse m des Bewegten durch das Gewicht p desselben ersetzt:

$$x = l_0 \frac{g}{g - \lambda l_0 p \varphi^2} \; .$$

Soll der Faden geradeso gespannt werden, als wenn der Bewegte unter dem Einfluß der Schwere in lothrechter Richtung an demselben in Ruhe bleibt, so muß

$$l_0(1 + \lambda p)\varphi^2 = g \quad , \quad \varphi = \sqrt{\frac{g}{l_0} \cdot \frac{1}{1 + \lambda p}} = \sqrt{\frac{g}{l_1}}$$

werden, wo l_1 die durch das Gewicht p erzeugte Länge des Fadens vorstellt.

Ein ähnlicher Apparat, bei welchem der Faden durch eine cylindrische Spiralfeder ersetzt und die Einrichtung getroffen ist, daß die durch die bewirkte Ausdehnung oder Verlängerung der Feder gemessen werden kann, könnte sowohl dazu dienen, die Wirkung und Größe des dynamischen Druckes mit der eines Gewichtes zu vergleichen, und so die Angabe der Theorie durch den Versuch zu bestätigen, wobei natürlich die Winkelgeschwindigkeit der Bewegung bekannt sein muß, als auch in Fällen, wo diese Winkelgeschwindigkeit sehr groß ist, und nicht unmittelbar beobachtet werden kann, sie nach der Verlängerung der Feder zu berechnen. Dazu müßte aber der materielle Punkt in eine schwere Kugel verwandelt werden, gegen deren Gewicht das der Feder sehr gering wäre, und dann müßte man für genauere Resultate auch die Reibung und den diese Reibung vermehrenden Luftwiderstand in Rechnung bringen, worauf hier nicht weiter eingegangen werden kann.

Sei noch ein schwerer materieller Punkt M, Fig. 84, mittels eines unausdehnbaren Fadens CM mit einer lothrechten Achse CA verbunden und werde mit dieser in eine gleichförmige drehende Bewegung versetzt, deren Winkelgeschwindigkeit wieder φ sei.

Im Anfang der Bewegung wird sich der Bewegte rasch von der Achse entfernen und eine solche Lage annehmen, daß der senkrecht zur

Achse wirkende dynamische Druck N der Wirkung der Schwere das Gleichgewicht hält, oder was auf dasselbe hinauskommt, bis die Resultirende aus diesem Drucke und dem Gewichte p des Bewegten nach der Verlängerung des Fadens gerichtet ist. Bezeichnen wir also den Winkel, welchen der Faden in dieser Lage mit der Achse bildet, mit ϑ, die Länge des Fadens mit l, so ist die Entfernung des Bewegten von der Achse oder von dem Mittelpunkte des Kreises, den er beschreibt, $l \sin \vartheta$, die Intensität des Bewegungsdruckes also

$$N = m l \varphi^2 \sin \vartheta \ ,$$

und da dieser zur Richtung der Schwere senkrecht ist, so wird die Resultirende von N und p mit der letztern einen Winkel ϑ bilden, für welchen (§. 5)

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{N}{p}$$

ist, man hat daher auch

$$p = m l \varphi^2 \cos \vartheta \ ,$$

und je nachdem φ oder ϑ gegeben ist,

$$\cos \vartheta = \frac{g}{l \varphi^2} \quad , \quad \varphi = \sqrt{\frac{g}{l \cos \vartheta}} \ .$$

Es kann daher ϑ nur durch einen unendlich großen Werth von φ oder mit andern Worten, nie ein rechter Winkel werden, der Faden also auch nie eine wagrechte Lage annehmen.

§. 97.

Im Allgemeinen wird der ganze Druck N′ unter der Voraussetzung einer fortwährend normalen Kraft R und einer gleichförmigen Bewegung im Kreise, den Werth

$$N' = \pm R + m r \varphi^2$$

annehmen, je nachdem R den Bewegten vom Mittelpunkt entfernen, oder diesem nähern will. Im ersten Falle wird deßhalb die Bewegung im Kreise nur dann stattfinden, wenn sich der materielle Punkt auf der innern oder hohlen Seite des Kreises befindet, oder wenn er mittels eines nicht dehnbaren Fadens mit dem Mittelpunkte verbunden ist. Im zweiten Falle dagegen, wo R gegen den Mittelpunkt gerichtet ist, wird die Bewegung sowohl auf der äußern als auf der innern Seite stattfinden können, auf der letztern aber nur so lange, als N′ negativ oder

$m r \varphi^2 > R$ ist, während für die Bewegung auf der äußern Seite $R > m r \varphi^2$ sein muß. Der Druck auf die Curve ist in diesem Falle dem Unterschiede zwischen dem statischen und dynamischen Drucke gleich, oder anders betrachtet, der von dem materiellen Punkte in Folge der Einwirkung der Kraft R im Zustande des ruhenden Gleichgewichtes auf die Curve ausgeübte Druck wird umsoviel vermindert, als die auf die Richtungsänderung seiner Bewegung verwendete Kraft beträgt.

Dieser Fall findet namentlich bei der Erde statt, auf welcher der Druck, den die Körper auf ihre Unterlagen ausüben, durch die tägliche Achsendrehung derselben vermindert wird, so daß sie weniger schwer sind, als wenn die Erde unbeweglich wäre. Diese Verminderung ist offenbar der Entfernung r eines Körpers von der Drehungsachse proportional, da alle Punkte der Erde dieselbe Winkelgeschwindigkeit haben, und demnach am Aequator, wo diese Entfernung von der Drehungsachse den größten Werth hat, am größten. Bezeichnet man also die Winkelgeschwindigkeit der Erde mit φ, den Halbmesser des Aequators mit R_0, so wird die dynamische Verminderung des Gewichtes eines materiellen Punktes, dessen Masse $= m$ ist, durch $m R_0 \varphi^2$ ausgedrückt, und wenn g_0 die wirkliche Beschleunigung beim freien Falle, G diese Beschleunigung für die ruhende Erde am Aequator vorstellt, so hat man dort

$$m g_0 = m G - m R_0 \varphi^2$$

und demnach

$$g_0 = G\left(1 - \frac{R_0 \varphi^2}{G}\right),$$

also auch mit hinlänglicher Genauigkeit, da G nur sehr wenig von g_0 verschieden ist, oder wenn man, was auf dasselbe hinaus kommt, in dem Ausdrucke:

$$g_0 = G\left[1 - \frac{R_0 \varphi^2}{g_0}\left(1 - \frac{R_0 \varphi^2}{G}\right)\right]$$

die zweite Potenz der kleinen Größe $R \varphi^2$ vernachlässigt,

$$g_0 = G\left(1 - \frac{R_0 \varphi^2}{g_0}\right).$$

Mit dem früher schon (§. 88) angewendeten Werthe von φ^2, und wenn $R_0 = 6376000^m$, $g_0 = 9^m,78$ genommen wird, findet man:

$$\delta_0{}^2 = \frac{R_0 \varphi^2}{g_0} = 0,003467 = \frac{1}{288,5},$$

und damit

$$g_0 = G\left(1 - \frac{1}{288,5}\right) \quad , \qquad G = g_0\left(1 + \frac{1}{288,5}\right) .$$

Wenn demnach die Erde unbeweglich wäre, so würden die Körper am Aequator nahe um $\frac{1}{289}$ ihres Gewichtes schwerer sein, und es bedürfte, da $289 = 17^2$ ist, einer 17 mal größern Winkelgeschwindigkeit oder einer 17 mal kleinern Umdrehungszeit, um die Wirkung der Schwere daselbst ganz aufzuheben.

Nördlich und südlich vom Aequator nimmt der dynamische Druck ab, und seine Richtung bildet mit der Richtung der Schwere einen Winkel $\pi - \beta$; denn in einem Punkte M, Fig. 85, dessen geographische Breite $ACM = \beta$ ist, wird jener senkrecht zur Achse, also nach MF gerichtet sein, während die Schwere, wenn man von der Abplattung Umgang nimmt, immer gegen den Mittelpunkt C gerichtet ist. Die Intensität F des dynamischen Druckes in dem Punkte M ist dann $m r_, \varphi^2$, wenn $r_,$ den Abstand MO bezeichnet, oder wenn man den mittleren Halbmesser der Erde durch R vorstellt, $r_,$ also $R \cos\beta$ wird,

$$F = m R \varphi^2 \cos\beta .$$

Die als Gewicht sich kundgebende Wirkung $P = mg$ ist aber, wie leicht zu sehen, die Resultirende von der wahren Intensität $P_, = mg_,$ der Wirkung der Schwere und dem dynamischen Drucke F; man hat daher nach §. 5(2):

$$mg = \sqrt{m^2 g_,^2 + F^2 - 2 m g_, F \cos\beta}$$

oder wenn für F der obige Werth eingeführt wird,

$$g = \sqrt{g_,^2 + R^2 \varphi^4 \cos^2\beta - 2 g_, R \varphi^2 \cos^2\beta} ,$$

$$= (g_, - R\varphi^2 \cos^2\beta)\sqrt{1 + \frac{R^2 \varphi^4 \cos^2\beta \sin^2\beta}{(g_, - R\varphi^2 \cos^2\beta)^2}} ;$$

annähernd hat man demnach

$$g = g_,\left(1 - \frac{R\varphi^2 \cos^2\beta}{g_,} + \frac{1}{2}\,\frac{R^2 \varphi^4 \cos^2\beta \sin^2\beta}{g_,(g_, - R\varphi^2 \cos^2\beta)}\right)$$

und wenn noch das sehr kleine dritte Glied vernachlässigt wird,

$$g = g_,\left(1 - \frac{R\varphi^2 \cos^2\beta}{g_,}\right) = g_,(1 - \delta^2) .$$

Die Verminderung der Schwere durch den dynamischen Druck ist also bis auf sehr kleine Größen dieselbe, als wenn nur die zur Erdoberfläche senkrechte Componente $F \cos\beta = R\varphi^2 \cos^2\beta$ dieser Kraft vorhanden wäre, und wie man sieht, proportional dem Quadrat des Cosinus der Breite. Die gegen den Aequator gerichtete tangentiale Componente $F \sin\beta = R\varphi^2 \cos\beta \sin\beta$ hat demnach einen sehr unbedeutenden Einfluß auf die Größe der Resultirenden, aber einen nicht ebenso unmerkbaren auf die Richtung derselben; denn wenn man die Abweichung dieser Richtung, d. i. der Richtung der Lothlinie von der Normalen zur kugelförmigen Erdoberfläche mit $\Delta\beta$ bezeichnet, so hat man nach §. 6 (3):

$$g_{,} \sin\Delta\beta = R\varphi^2 \cos\beta \sin(\pi - \beta - \Delta\beta)$$
$$= R\varphi^2 \cos\beta \sin(\beta + \Delta\beta)\;;$$

wenn man also die Function $\sin(\beta + \Delta\beta)$ entwickelt und beachtet, daß $\Delta\beta$ ein ziemlich kleiner Winkel ist, daß also 1 für $\cos\Delta\beta$, $\Delta\beta$ für $\sin\Delta\beta$ gesetzt werden darf, so wird:

$$(g_{,} - R\varphi^2 \cos^2\beta)\,\Delta\beta = R\varphi^2 \cos\beta \sin\beta$$

und man zieht daraus:

$$\Delta\beta = \frac{R\varphi^2 \cos\beta \sin\beta}{g_{,}(1 - \delta^2)} = \frac{R}{g}\,\varphi^2 \cos\beta \sin\beta\;.$$

Hängt demnach ein Bleiloth von einer Höhe h herab, so wird die Richtung des Fadens mit der Richtung der Resultirenden $P = mg$ zusammenfallen, folglich das untere Ende desselben von der Normalen zur kugelförmigen Oberfläche der Erde nach Süden abweichen, und zwar um

$$h\Delta\beta = \frac{1}{2} R \frac{h}{g} \varphi^2 \sin 2\beta$$

Längeneinheiten, mithin ebensoviel als auf der, ihrer Gestalt nach unveränderlichen Erdkugel die südliche Abweichung eines von der Höhe h herabfallenden Atoms betragen würde (§. 88), und es wird nun einleuchten, warum die Beobachtung keine solche südliche Abweichung nachweisen könnte, auch wenn die Erde wirklich eine vollkommene und unveränderliche Kugelgestalt hätte.

In Wirklichkeit ist aber die Erde keine unveränderliche Kugel; ihre Gestalt ist vielmehr durch die Oberfläche einer Flüssigkeit, durch

die Meeresfläche bedingt, welche wie im vierten Buche gezeigt werden soll, sich in jedem Punkte normal zu der Resultirenden aller auf die Flüssigkeitstheilchen wirkenden Kräfte richtet, welche also in jedem Punkte normal zur Richtung des Bleilothes ist, und deßwegen in ihren Hauptumrissen die Gestalt eines Umdrehungs-Ellipsoids angenommen hat, dessen große Achse, der Durchmesser des Aequators, sowohl durch die Gradmessungen, als durch die Pendelbeobachtungen an verschiedenen Orten der Erde nahezu um $\frac{1}{300}$ größer gefunden wird, als die kleine Achse, welche zugleich die Umdrehungsachse der Erde ist. Eben diese Gradmessungen und Pendelbeobachtungen zeigen aber auch, daß die verlängerte Meeresfläche bei genauerer Untersuchung vielfältige Abweichungen von der Gestalt eines geometrischen Ellipsoids besitzt, welche offenbar von örtlichen Beschaffenheiten des Erdkörpers herrühren, durch die sowohl die Größe als die Richtung der anziehenden Wirkung dieses Körpers auf einen materiellen Punkt seiner Oberfläche größere oder kleinere Aenderungen erleidet in Bezug auf das allgemeine Gesetz dieser Anziehung, insoweit man nämlich den Erdkörper als aus homogenen concentrischen Schichten gebildet, voraussetzen kann. Man vergleiche hierüber die Lehre von der Anziehung im folgenden Buche.

§. 98.

Kehren wir nun wieder zur Untersuchung der Bewegung eines materiellen Punktes in einer gegebenen Curve zurück. — Da hier die Gestalt der beschriebenen Bahn bekannt ist, so wird eine der Gleichungen (90) und (91) genügen, um die Gesetze der Bewegung abzuleiten, und zwar wird man sich der erstern bedienen, wenn die Intensität der bewegenden Kraft als Function der Zeit gegeben ist, der letztern dagegen, wenn die Kraft von der Lage oder von der Geschwindigkeit oder von diesen beiden Zuständen des Bewegten zugleich abhängt.

Im ersten Falle muß man die Function $\cos\vartheta$ durch den Bogen s der gegebenen Curve ausdrücken, und hat dann einen Ausdruck von der Form:

$$m\frac{d^2 s}{d t^2} = F(t)\, f(s)$$

zu integriren, worin $F(t)$ die Kraft R und $f(s)$ die Function $\cos\vartheta$ vorstellt.

Ist dagegen die Kraft als Function der Coordinaten x, y, z

gegeben, so wird man die Gleichung (91), und eine dieser Veränderlichen als unabhängige nehmen, wodurch dieselbe die Form annimmt:

$$m v^2 - m v_0^2 = 2 \int_{x_0}^{x} dx \cdot \left(X + Y \frac{dy}{dx} + Z \frac{dz}{dx} \right) ,$$

in welcher dann X, Y, Z nur noch Functionen der unabhängigen Veränderlichen x vorstellen, wenn man die Veränderlichen y und z mittels der beiden Gleichungen der Curve eliminirt hat.

Die Kraft wird eine Function von der Lage und der Geschwindigkeit des Bewegten, wenn sich derselbe auf einer festen Curve mit Reibung bewegt, weil diese mit dem Drucke N′ auf die Curve von der Geschwindigkeit des Bewegten abhängt. Bezeichnet dann f wieder den Reibungscoeffizienten, so hat man

$$m \frac{d \cdot v^2}{ds} = 2 \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) - 2 f N' ,$$

da die Reibung immer nach der Tangente und der vorhandenen Geschwindigkeit entgegen gerichtet ist. Mit dem Werthe von N′ aus (92) folgt dann der Ausdruck:

$$94.) \; m \frac{d \cdot v^2}{ds} = 2 R \cos\vartheta - 2 f \sqrt{R^2 \sin^2\vartheta + \left(m \frac{v^2}{\varrho} \right)^2 + 2 m \frac{v^2}{\varrho} R \sin\vartheta \cos\psi} ,$$

aus welchem man mit Hülfe der Gleichungen der Curve und des Werthes von ϱ alle Veränderlichen bis auf r und s eliminiren kann, dessen Integration aber nur für sehr einfache Fälle in geschlossenen Ausdrücken möglich sein wird.

Wenn R = 0 ist, hat man einfach:

$$\frac{d \cdot v^2}{ds} = - 2 f \frac{v^2}{\varrho} ,$$

oder wenn man für $\frac{1}{\varrho}$ nach §. 31 der Einleitung den Werth $\frac{d\tau}{ds}$ setzt und τ als unabhängige Veränderliche nimmt, also v als eine Function derselben betrachtet,

$$\frac{d \cdot v^2}{d\tau} = - 2 f v^2 .$$

Bezeichnet man demnach den anfänglichen Werth von τ, d. i. den

Winkel, welche die durch die anfängliche Lage des Bewegten gezogene Tangente mit einer festen Geraden bildet, mit τ_0, so wird

$$2f(\tau - \tau_0) = \log n \frac{v_0^2}{v^2}$$

und wenn die Zahlen statt der Logarithmen genommen werden:

$$v = v_0 e^{-f(\tau - \tau_0)};$$

die Bewegung ist also keine gleichförmig verzögerte, und die Geschwindigkeit nimmt weder mit der Zeit, noch mit dem Wege ab, sondern blos mit dem Winkel τ, so daß es z. B. gleichgültig ist, ob sich der materielle Punkt in einem Kreise oder in einer Ellipse, oder in einer andern geschlossenen oder spiralförmig gewundenen, ebenen oder doppeltgekrümmten Curve bewegt; die Geschwindigkeit ist nach einem Umlauf, d. h. wenn die Richtung der Bewegung den Winkel 2π beschrieben hat, in demselben Verhältnisse kleiner geworden, nämlich im Verhältnisse:

$$e^{2f\pi} : 1;$$

die Bewegung wird daher nach jedem Umlauf in demselben Verhältnisse langsamer; sie endigt aber erst nach einer unendlichen Anzahl von Umläufen oder nie. Für die gerade Linie ist τ constant, also $\tau - \tau_0 = 0$, und $v = v_0$, weil hier ohne eine bewegende, Druck erzeugende Kraft auch keine Reibung vorhanden ist.

Für die ebnen Curven wird der obige allgemeine Ausdruck etwas einfacher; wird nämlich für diese $\cos\psi = 1$, so erhält man

$$m \frac{d \,.\, v^2}{ds} = 2R \cos\vartheta - 2f\left(R \sin\vartheta + m\frac{v^2}{\varrho}\right) \qquad (95.$$

als Gleichung der Bewegung zwischen den Veränderlichen s und v.

§. 99.

Die einfachste Anwendung bietet die Bewegung eines schweren Punktes in einer gegebenen Curve. Sei m die Masse dieses Punktes und g die für die Ausdehnung der Bewegung als unveränderlich angenommene Beschleunigung der Schwere, deren Richtung in jeder Lage des Bewegten parallel zu derselben Geraden bleibe, die wir als Achse der z annehmen, und zwar so, daß die positiven z von unten nach oben genommen werden; es wird dann mg das Gewicht des Bewegten und $-mg$ die

parallel zur Achse der z gerichtete Componente Z der bewegenden Kraft. Die Gleichung der Bewegung nimmt daher, wenn keine Reibung vorhanden ist, und z als unabhängige Veränderliche eingeführt wird, die Form an:

$$mv^2 - mv_0^2 = -2\int_{z_0}^{z} dz \, . \, mg$$

oder wenn die angedeutete Integration ausgeführt wird:

96.) $$v^2 = v_0^2 + 2g(z_0 - z) \, .$$

Die Geschwindigkeit ist demnach unabhängig von dem zurückgelegten Wege, sie wächst nur mit dem vertikalen Höhenunterschiede gerade so, als wenn der Bewegte durch die Höhe $z_0 - z$ lothrecht herabgefallen wäre; sie hat einen größten Werth, wo z einen kleinsten hat und umgekehrt; so oft $z = z_0$ wird, ist auch v gleich v_0, und in einem Punkte, wo man

$$z = z_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

hat, wird $v = 0$ sein. Fällt z. B. ein materieller Punkt in der Curve ABCD...FGH, Fig. 86, von A aus mit einer anfänglichen Geschwindigkeit v_0, so erhält seine Geschwindigkeit in den tiefsten Punkten B, D, F einen größten, und in den höchsten Punkten C, E einen kleinsten Werth; in allen Punkten a. b, c, d, etc., welche auf derselben wagrechten Geraden liegen, hat er dieselbe Geschwindigkeit; ebenso wird sie in G dieselbe sein, wie in A, wenn die AG parallel zur Ebene der xy ist, und wenn $Hg = \frac{v_0^2}{g}$ oder gleich der Fallhöhe für die Geschwindigkeit v_0 ist, so kommt der Bewegte in H mit der Geschwindigkeit Null an und ändert von da an die Richtung oder vielmehr den Sinn seiner Bewegung, indem er nun die Curve rückwärts von H gegen F, C und A mit denselben Geschwindigkeiten durchläuft, wie er sie bei der ersten Bewegung besaß. Dieselbe Bewegung wird der materielle Punkt behalten, wenn die Curve ABC...GH um irgend einen vertikalen Cylinder geschlagen wird, da hiebei alle Punkte dieselben Höhenunterschiede unter sich behalten.

Um nun auch die Zeit zu bestimmen, welche der Bewegte braucht, um von einem Punkte A zu einem Punkte M auf der gegebenen Curve zu gelangen, wird man v^2 durch seinen Werth:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]$$

ersetzen, und dann statt $\frac{dx}{dz}$ und $\frac{dy}{dz}$ die Aenderungsgesetze für x und y aus den Gleichungen der gegebenen Curve in Bezug auf z einführen. Diese letztern werden die Form:

$$x = f_1(z) \quad , \quad y = f_2(z)$$

annehmen, und jene Aenderungsgesetze demnach durch

$$\frac{dx}{dz} = f_1'(z) \quad , \quad \frac{dy}{dz} = f_2'(z)$$

bezeichnet werden. Dadurch ergibt sich dann der Ausdruck:

$$t = \pm \int_{z_0}^{z} dz \,. \frac{\sqrt{1 + [f_1'(z)]^2 + [f_2'(z)]^2}}{\sqrt{v_0^2 + 2g(z_0 - z)}} \,, \qquad (97.$$

in welchem das obere Zeichen genommen wird, wenn z am Anfang mit t wächst und das untere, wenn das Gegentheil stattfindet. Man kann aber auch bisweilen ebenso leicht v durch seinen Werth $\frac{ds}{dt}$ ersetzen und die Coordinaten in Function von s ausdrücken; man hat dann einfacher, indem $z = F(s)$ gedacht wird.

$$t = \pm \int_{s_0}^{s} ds \,. \frac{1}{\sqrt{v_0^2 + 2g(z_0 - z)}} \qquad (98.$$

je nachdem s mit t wächst oder nicht. Jedenfalls wird der letztere Ausdruck nicht derselben Zweideutigkeit unterworfen sein, wie der vorhergehende, da derselbe Bogen s nur einem einzigen Punkte der Curve entsprechen kann, während dieselbe Ordinate z mehreren angehört.

Wenn sich ferner der materielle Punkt mit Reibung in seiner Curve bewegt, so wird man den Ausdruck (94) anwenden, indem man darin $-mg$ für R setzt, wodurch er übrigens im Allgemeinen nicht viel einfacher wird. Ist die gegebene Curve aber eine ebene, und ihre Ebene parallel zur Richtung der Schwere, so kann man diese Ebene als die der xz annehmen, und hat dann

$$\cos\vartheta = \frac{dz}{ds} \quad , \quad \sin\vartheta = \frac{dx}{ds} \quad , \quad \cos\psi = 1 \; ;$$

es wird daher, alles in Function von s ausgedrückt vorausgesetzt,

99.) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 s}{dt^2} = g\left(\frac{dz}{ds} - f\frac{dx}{ds}\right) - \frac{f}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \\ &\text{oder nach (95) mit den Veränderlichen v und s} \\ &\frac{d\,.\,v^2}{ds} = 2g\left(\frac{dz}{ds} - f\frac{dx}{ds}\right) - \frac{2f}{\varrho}v^2 \end{aligned}\right.$$

die Gleichung der Bewegung. Wird diese sodann integrirt, in Bezug auf v aufgelöset, und für v einer oder der andere seiner Werthe: $\frac{ds}{dt}$ oder $\frac{dz}{dt}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$ eingeführt, so kann man wie im vorhergehenden Falle, in welchem keine Reibung berücksichtigt ist, die Zeitdauer der Bewegung in Function von s oder z bestimmen.

§. 100.

Die gegebene Curve sei zuerst eine Gerade, welche den Winkel γ mit der Richtung der Schwere bildet, deren Gleichung daher

$$x = z \tang \gamma$$

ist, wenn man die durch dieselbe gelegte lothrechte Ebene als Ebene der xz nimmt. Daraus folgt

$$\frac{dx}{ds} = \sin\gamma \quad , \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma \quad , \quad \varrho = \infty \ ;$$

und die Differentialgleichung der Bewegung wird mit Berücksichtigung der Reibung:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g(\cos\gamma - f\sin\gamma) \ ;$$

sie gibt durch Integration die Gleichungen einer gleichförmig beschleunigten Bewegung:

$$\frac{ds}{dt} - v_0 = gt(\cos\gamma - f\sin\gamma)$$

$$s - s_0 = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 (\cos\gamma - f\sin\gamma)$$

übereinstimmend mit §. 51.

Man hat auch

$$\frac{d \cdot v^2}{dz} = -2g(1 - f \tang \gamma)$$

und daraus einmal

$$v^2 - v_0^2 = 2g(z_0 - z)(1 - f \tang \gamma)$$

und dann nach (97)

$$t = -\int_{z_0}^{z} dz \cdot \frac{1}{\sqrt{v_0^2 + 2g(z_0 - z)(1 - f \tang \gamma)}} \cdot \frac{1}{\cos \gamma},$$

woraus weiter das allgemeine Integral:

$$g(\cos \gamma - f \sin \gamma) t = \sqrt{v_0^2 + 2g(z_0 - z)(1 - f \tang \gamma)} - v_0$$

zur Bestimmung der Zeit in Function von z folgt. Es ist übrigens leicht nachzuweisen, daß die letzten Ausdrücke dasselbe geben, was man durch die ersten findet, wenn man beachtet, daß $z_0 - z = (s - s_0) \cos \gamma$ ist, daß also der Werth von t durch

$$g(\cos \gamma - f \sin \gamma) t = \sqrt{v_0^2 + 2g(\cos \gamma - f \sin \gamma)(s - s_0)} - v_0$$

ausgedrückt werden kann.

Ohne Reibung, also wenn $f = 0$ wird, hat man einfacher:

$$v = v_0 + g t \cos \gamma \quad , \quad s - s_0 = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \cos \gamma$$

und

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z_0 - z) \quad , \quad g t \cos \gamma = \sqrt{v_0^2 + 2g(z_0 - z)} - v_0 ;$$

die Geschwindigkeit ist dann unabhängig von dem Winkel γ, die Zeit dagegen wächst für dieselbe vertikale Fallhöhe wie die Sekante dieses Winkels.

§. 101.

Als zweite Anwendung unserer allgemeinen Betrachtungen sei die Bewegung eines schweren materiellen Punktes in einem Kreise, dessen Ebene lothrecht sein soll, zu untersuchen, und zwar ohne Berücksichtigung der Reibung, da diese Bewegung auch ohne feste Curve dadurch hervorgebracht wird, daß man den Bewegten durch einen unausdehnbaren, gewichtlosen und vollkommen biegsamen Faden mit einem festen Punkte verbindet, um welchen er sich ohne Hinderniß bewegen kann.

Sei C, Fig. 87, der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, dessen Ebene wieder die der xz, und dessen vertikaler Durchmesser $AD = 2r$ die Achse der z sein soll, während ihn die Achse der x im tiefsten Punkte A berührt; seine Gleichung ist dann

$$x^2 = 2rz - z^2$$

und gibt:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{r - z}{x} \quad , \quad \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} = \frac{r}{x} = \frac{r}{\sqrt{2rz - z^2}} \, .$$

Ist ferner B die anfängliche Lage des Bewegten und v_0 seine Geschwindigkeit in diesem Punkte, und setzen wir voraus, daß diese der Fallgeschwindigkeit für die Höhe $HB = h$ gleich, d. h. dieselbe sei, als wenn der Bewegte auf der Tangente $h_0 B$ im Punkte B von h_0 aus ohne anfängliche Geschwindigkeit zu fallen angefangen hätte, und bei B in den Kreis eingetreten wäre, so wird diese Geschwindigkeit nach der Gleichung (96)

$$v^2 = v_0{}^2 + 2g(z_0 - z) \, ,$$

welche unverändert auch für unsern besondern Fall gilt, längs des Bogens BA noch ferner zu nehmen, und im Scheitel A ihren größten Werth erreichen, nämlich:

$$v = \sqrt{v_0{}^2 + 2gz_0}$$

d. h. wieder denselben, als wenn der Bewegte durch die Lothlinie Ba oder bA gefallen wäre. Mit dieser Geschwindigkeit geht der Bewegte durch den Scheitel hindurch, und erhebt sich auf der rechten Seite von AD mit verzögerter Bewegung, so daß in B′, welches mit B auf derselben Wagrechten liegt, die Geschwindigkeit wieder gleich v_0, und in H′ Null wird. Von da kehrt der Bewegte längs des Bogens H′B′A wieder zurück, erhält in B′ und A wieder dieselbe Geschwindigkeit wie vorher, und steigt längs des Bogens AB bis H, wo er den Sinn seiner Bewegung zum zweitenmal ändert, um wieder nach H′ zurückzugehen, u. s. f. und der Bewegte wird auf solche Weise längs des Bogens HAH′ eine unbeschränkte Anzahl wiederkehrender Bewegungen oder Schwingungen von gleicher Zeitdauer machen.

Entspricht aber die anfängliche Geschwindigkeit v_0 einer größeren Höhe als Db, oder ist sie so, als wenn der Bewegte in einem über der Wagrechten Dd liegenden Punkte h′ auf der Tangente zu fallen angefangen hätte, so wird seine Geschwindigkeit nie Null werden; er

erreicht von A aufsteigend den höchsten Punkt D mit der kleinsten Geschwindigkeit, setzt seine Bewegung in demselben Sinne gegen H und B fort, wo er genau mit derselben Geschwindigkeit wieder ankommt, und beschreibt demnach eine unbeschränkte Anzahl von ganzen Kreisumfängen mit ab- und zunehmender Geschwindigkeit *).

Wäre endlich die anfängliche Geschwindigkeit v_0 gerade der Fallgeschwindigkeit für die Höhe Db gleich, als wenn der materielle Punkt in d auf der Tangente seine Bewegung begonnen hätte, so würde er von A aufsteigend mit der Geschwindigkeit Null in D ankommen, oder richtiger nie ankommen, da er eine unendlich große Zeit dazu braucht; denn man sieht leicht, daß von J aus die Geschwindigkeit viel rascher abnimmt, als der noch übrige Weg, daß das Verhältniß $\frac{\Delta s}{v}$ also immer größer wird und nach und nach einen unbegrenzt großen Werth erreicht.

Die vorhergehenden Betrachtungen werden auf analytischem Wege am besten, nämlich ohne Zweideutigkeit, dadurch unterstützt, daß man die Lage des Bewegten am Ende der Zeit t durch den Bogen AM = s, oder durch den Winkel ACM ausdrückt. Bezeichnet man diesen letztern mit ϑ, seinen anfänglichen Werth ACB mit α, so hat man

$$z = r\left(1 - \cos\frac{s}{r}\right) = r(1 - \cos\vartheta),$$

$$z_0 = r\left(1 - \cos\frac{s_0}{r}\right) = r(1 - \cos\alpha),$$

und die Gleichung (98) wird damit, indem man beachtet, daß der Bogen AM kleiner wird, wenn t wächst,

$$t = -\int_{s_0}^{s} ds.\frac{1}{\sqrt{v_0^2 + 2gr\left(\cos\frac{s}{r} - \cos\frac{s_0}{r}\right)}},$$

*) Wenn man sich die Bewegung in einem festen Kreise stattfindend vorstellt, so muß man annehmen, daß der materielle Punkt bei seinem Durchgange durch die Endpunkte des horizontalen Durchmessers von der hohlen auf die gewölbte Seite des Kreises, oder umgekehrt, übergehe, wenn die anfängliche Geschwindigkeit nicht so groß ist, daß der dynamische Druck größer wird, als das Gewicht des materiellen Punktes.

oder wenn man ϑ als unabhängige Veränderliche einführt

$$\text{a.)}\qquad t = -\int_{\alpha}^{\vartheta} d\vartheta \, . \, \frac{r}{\sqrt{v_0^2 + 2gr(\cos\vartheta - \cos\alpha)}} \, .$$

Dieser Ausdruck kann unter endlicher Form nur in dem Falle integrirt werden, wo die anfängliche Geschwindigkeit v_0 der Höhe DB entspricht; man kann dann v_0^2 durch $2g(2r - z_0)$ oder durch $2gr(1 + \cos\alpha)$ ersetzen, und die Gleichung (a) nimmt die Form an:

$$t = -\int_{\alpha}^{\vartheta} d\vartheta \, . \, \frac{r}{\sqrt{2gr(1 + \cos\vartheta)}} \, .$$

Führt man dann für $1 + \cos\vartheta$ den Werth $2\cos^2\frac{1}{2}\vartheta$ ein, und setzt $\frac{1}{2}\vartheta = \vartheta'$, so ergibt sich

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\frac{1}{2}\alpha}^{\frac{1}{2}\vartheta} d\vartheta' \, . \, -\frac{1}{\cos\vartheta'} = \sqrt{\frac{r}{g}} \operatorname{logn} . \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\alpha\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\vartheta\right)}$$

oder in anderer Form

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \operatorname{logn} . \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\alpha\right)}{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\vartheta\right)} \, .$$

Man hat aber auch:

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi = \frac{1 - \cos\frac{1}{2}\varphi}{1 + \cos\frac{1}{2}\varphi} \, ,$$

und der vorstehende Werth kann damit die Form erhalten:

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \operatorname{logn} . \frac{\left(1 + \sin\frac{1}{2}\alpha\right)\left(1 - \sin\frac{1}{2}\vartheta\right)}{\left(1 - \sin\frac{1}{2}\alpha\right)\left(1 + \sin\frac{1}{2}\vartheta\right)} \, .$$

Im Scheitel A ist $\vartheta = 0$, und demnach

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \log n \tan g \frac{1}{4}(\pi + \alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \log n . \frac{1 + \sin\frac{1}{2}\alpha}{1 - \sin\frac{1}{2}\alpha};$$

die Zeit, welche der Bewegte braucht, um von B nach A zu gelangen, hängt also in diesem Falle wesentlich von der Größe des Bogens AB ab. Um die Zeit zu finden, nach welcher der Bewegte den Punkt B′ erreicht, hat man $-\alpha$ für ϑ zu setzen, und findet, wie sich von selbst versteht,

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \log n . \left\{ \frac{1 + \sin\frac{1}{2}\alpha}{1 - \sin\frac{1}{2}\alpha} \right\}^2,$$

d. h. das Doppelte des vorhergehenden Werthes. Ebenso wird man $\vartheta = -\pi$ einführen, um die Zeit zu berechnen, nach welcher der Bewegte in D ankommt, und man wird damit $t = \infty$ finden, wie oben behauptet wurde. Man findet aber auch $t = \infty$, wenn $\alpha = \pi$ ist, d. h. wenn der materielle Punkt seine Bewegung in D anfangen soll, und in der That kann er mit der anfänglichen Geschwindigkeit Null, welche ihm in diesem Falle zukäme, den Punkt D, wo die Richtung der Kraft normal zur Curve ist, nicht verlassen.

§. 102.

In jedem andern, als dem ebenbetrachteten Falle kann der Werth von A durch eine Reihe ausgedrückt werden; wir wollen aber diese Reihe blos unter der Voraussetzung, daß v_0 kleiner ist, als die der Fallhöhe Db entsprechende, daß also der Bewegte fortwährend wiederkehrende Schwingungen um den tiefsten Punkt A macht, und auch nur für die ganze Dauer T einer solchen Schwingung entwickeln d. h. für die Zeit der Bewegung von B nach B′ oder von B′ nach B. Unter dieser Voraussetzung kann man v_0 gleich Null annehmen, indem man die Bewegung mit dem Anfange einer Schwingung oder in dem Punkt, wo die Geschwindigkeit des Bewegten Null ist, beginnen läßt. Es ist dann nach der Formel (97), in welche man den obenangegebenen Werth von $\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$ einführt, zuerst allgemein:

$$t = -\int_{z_0}^{z} dz \,.\, \frac{r}{\sqrt{(2rz - z^2)\, 2g(z_0 - z)}}$$

da z im Anfang der Bewegung abnimmt. Für die halbe Schwingungsdauer oder für die Zeit der Bewegung von B bis A, und mit einer leichten Umwandlung hat man daraus

$$\frac{1}{2} T = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{z_0}^{0} dz \,.\, \frac{-1}{\sqrt{z_0 z - z^2} \,.\, \sqrt{1 - \frac{z}{2r}}} \,.$$

Ferner findet man durch Entwickelung:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z}{2r}}} = \left(1 - \frac{z}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{z}{2r} + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{z}{2r}\right)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{z}{2r}\right)^3 + \text{etc.}$$

und damit erhält der vorhergehende Werth die Form:

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{z_0}^{0} dz. \frac{-1}{\sqrt{z_0 z - z^2}} \left\{1 + \frac{1}{2}\frac{z}{2r} + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{z}{2r}\right)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{z}{2r}\right)^3 + \text{etc.}\right\}.$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist offenbar:

$$\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots\ldots 2n} \cdot \frac{1}{(2r)^n} \int_{z}^{0} dz \,.\, \frac{-z^n}{\sqrt{z_0 z - z^2}} \,,$$

und der Werth von T hängt demnach von dem unbestimmten Integral:

$$\int dz \,.\, \frac{-z^n}{\sqrt{z_0 z - z^2}}$$

ab, für welches man leicht eine Reductionsformel erhält, wenn man es unter die Form:

$$\int dz \,.\, \frac{z^{n-1}\left(\frac{1}{2} z_0 - z\right)}{\sqrt{z_0 z - z^2}} - \frac{1}{2} z_0 \int dz \,.\, \frac{z^{n-1}}{\sqrt{z_0 z - z^2}}$$

bringt, und das erste Glied theilweise integrirt; man erhält dadurch

$$\int dz.\frac{-z^n}{\sqrt{z_0 z - z^2}} = \Delta . z^{n-1}\sqrt{z_0 z - z^2} - (n-1)\int dz . z^{n-2}\sqrt{z_0 z - z^2}$$
$$- \frac{1}{2} z_0 \int dz . \frac{z^{n-1}}{\sqrt{z_0 z - z^2}} .$$

und wenn man dann das mittlere Glied im Zähler und Nenner mit der Wurzelgröße $\sqrt{z_0 z - z^2}$ multiplicirt, und die nöthigen Reductionen vornimmt:

$$\int dz . \frac{-z^n}{\sqrt{z_0 z - z^2}} = \Delta . \frac{1}{2} z^{n-1}\sqrt{z_0 z - z^2} + \frac{2n-1}{2n} z_0 \int dz . \frac{-z^{n-1}}{\sqrt{z_0 z - z^2}} .$$

Zwischen den Grenzen 0 und z_0 hat man demnach die bestimmten Integrale:

$$\int_{z_0}^{0} dz . \frac{-z^n}{\sqrt{z_0 z - z^2}} = \frac{2n-1}{2n} z_0 \int_{z_0}^{0} dz . \frac{-z^{n-1}}{\sqrt{z_0 z - z^2}} ,$$
$$= \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)} z_0^2 \int_{z_0}^{0} dz . \frac{-z^{n-2}}{\sqrt{z_0 z - z^2}} ,$$
$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots\ldots 3.1}{2n(2n-2)\ldots\ldots 4.2} z_0^n \int_{z_0}^{0} dz . \frac{-1}{\sqrt{z_0 z - z^2}} ;$$

und nach früheren Entwickelungen wird man leicht

$$\int_{z_0}^{0} dz . \frac{-1}{\sqrt{z_0 z - z^2}} = \overset{0}{\underset{z_0}{\Delta}} . \text{arc cos} \frac{2z - z_0}{z_0} = \pi .$$

ableiten, dadurch also als allgemeines Glied

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n} . \frac{1}{(2r)^n} \int_{z_0}^{0} dz . \frac{-z^n}{\sqrt{z_0 z - z^2}} = \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}\right)^2 \pi \left(\frac{z_0}{2r}\right)^n$$

finden. Setzt man nun für n die Werthe 0, 1, 2, u. s. f. so ergibt sich

$$T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{z_0}{2r} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{z_0}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(\frac{z_0}{2r}\right)^3 + \text{etc.} \right\} \quad \text{(b.}$$

als die Zeit einer Schwingung oder als Schwingungsdauer.

Will man diese Zeit dann wieder durch die Ausweichung α ausdrücken, so hat man

$$\frac{z_0}{2r} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \sin^2\frac{1}{2}\alpha$$

und demnach wird

$$c.)\ T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{1}{2}\alpha+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{1}{2}\alpha+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\sin^6\frac{1}{2}\alpha+\text{etc.}\right\}.$$

Was nun noch den Druck betrifft, welcher auf die Curve ausgeübt, oder mit welchem der Faden gespannt wird, so findet man leicht für den statischen Druck

$$N_1 = R\sin\vartheta = mg\frac{r-z}{r},$$

für den dynamischen

$$N_2 = m\frac{v^2}{r} = mg\frac{2(z_0-z)}{r};$$

der ganze Druck ist sonach

$$N' = mg\frac{r+2z_0-3z}{r},$$

und für seine beiden Grenzwerthe findet man

$$mg\frac{r-z_0}{r}, \quad mg\frac{r+2z_0}{r};$$

sie geben daher den Werth:

$$3mg\frac{z_0}{r}$$

als größten Unterschied in demselben.

§. 103.

Ein materieller Punkt, welcher mittels eines unbehnbaren Fadens mit einem festen Punkte verbunden ist, und zu beiden Seiten seiner Gleichgewichtslage kleine Schwingungen macht, wird ein einfaches oder mathematisches Pendel genannt, im Gegensatze zu einem festen Körper, der um eine horizontale Achse schwingt und welcher ein zusammengesetztes oder physisches Pendel darstellt. Die in den vorhergehenden §.§. entwickelten Gesetze drücken also auch die Bewegungs-Gesetze eines einfachen Pendels aus, wenn man z_0 gegen r,

oder wenn man den Winkel α, welcher nun die Ausweichung des Pendels genannt wird, ziemlich klein annimmt. Man findet unter dieser Voraussetzung, und wenn die Länge des Pendels, d. i. die Länge des Fadens oder der Halbmesser des beschriebenen Kreisbogens nun mit l bezeichnet wird, für die Geschwindigkeit der Bewegung

$$v = \sqrt{2g(z_0 - z)} = \sqrt{2gl(\cos\vartheta - \cos\alpha)} ,$$

und im tiefsten Punkte, wo das Pendel durch seine Gleichgewichtslage geht und $\vartheta = 0$ ist,

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} .$$

Setzt man dann für $\cos\alpha$ seinen Werth: $1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \text{etc.}$, und vernachlässigt die vierte Potenz von α, so wird

$$v = \alpha\sqrt{gl} ;$$

die Geschwindigkeit im tiefsten Punkte ist folglich bei sehr kleinen Schwingungen sehr nahe der Ausweichung proportional, und verhält sich bei verschiedenen Pendeln und gleicher Ausweichung wie die Quadratwurzel aus ihrer Länge.

Für die Schwingungsdauer T oder für die Zeit eines Hin- oder Herganges folgt dann aus den Werthen (b) und (c), wenn darin $\frac{z_0}{2r}$ oder $\frac{z_0}{2l} = \sin^2\frac{1}{2}\alpha$ als sehr klein angenommen und vernachlässigt wird,

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} ,$$

und wenn man blos die höhern Potenzen, als die erste, desselben Bruches wegläßt,

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{z}{8l}\right) = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{2}\alpha\right) .$$

Um aber diese Werthe durch den Winkel α auszudrücken und den Grad der Annäherung in Bezug auf diesen ersichtlicher zu machen, will ich sie unmittelbar aus der Gleichung (a) ableiten. Ich setze dazu in dieser $v_0 = 0$, l für r, und erhalte zwischen den Grenzen $-\alpha$ und $+\alpha$ für ϑ das bestimmte Integral:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{+\alpha}^{-\alpha} d\vartheta . \frac{-1}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\alpha)}}$$

als Ausdruck für die Schwingungsdauer. Beschränkt man sich nun zuerst für $\cos\vartheta$ und $\cos\alpha$ auf die Werthe:

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{1}{2}\vartheta^2 \quad , \qquad \cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 ,$$

so wird

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{+\alpha}^{-\alpha} d\vartheta . \frac{-1}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} ,$$

wie vorher. Behält man dagegen noch die vierten Potenzen der Winkel α und ϑ bei, so ergibt sich das Integral:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{+\alpha}^{-\alpha} d\vartheta . \frac{-1}{\sqrt{(\alpha^2 - \vartheta^2)\left(1 - \frac{1}{12}(\alpha^2 + \vartheta^2)\right)}} ,$$

und mit den beiden ersten Gliedern der Entwickelung von

$$\left(1 - \frac{1}{12}(\alpha^2 + \vartheta^2)\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{24}(\alpha^2 + \vartheta^2) + \text{etc.}$$

wird dasselbe

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ \left(1 + \frac{1}{24}\alpha^2\right) \int_{+\alpha}^{-\alpha} d\vartheta . \frac{-1}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}} + \frac{1}{24} \int_{+\alpha}^{-\alpha} d\vartheta . \frac{-\vartheta^2}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}} \right\} .$$

Es ist aber nach frühern Ausdrücken leicht zu sehen, daß man hat:

$$\int d\vartheta . \frac{-\vartheta^2}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}} = \Delta . \frac{1}{2}\vartheta\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2} + \frac{1}{2}\alpha^2 \int d\vartheta . \frac{-1}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}} ,$$

und darnach wird zwischen unsern Grenzen

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{+\alpha}^{-\alpha} d\vartheta . \frac{-1}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}} \left(1 + \frac{1}{16}\alpha^2\right) = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16}\alpha^2\right)$$

was mit dem letztern der beiden vorhergehenden Werthe von T übereinstimmt.

Aus diesen Werthen folgt, daß für sehr kleine Ausweichungen die Schwingungsdauer als unabhängig von der Größe der Ausweichung angenommen werden darf, daß sie aber, mit weitergehender Annäherung berechnet, mit der Ausweichung etwas zunimmt. Werden z. B. um die Größe dieser Zunahme fühlbar zu machen, für die Ausweichung die Werthe: 1°, 5°, 10° gesetzt, so hat man in unserm Winkelmaaße

$$\alpha = \frac{1}{57,3} \quad , \quad = \frac{5}{57,3} \quad , \quad = \frac{10}{57,3} \,,$$

und damit wird:

$$\frac{1}{16}\alpha^2 = 0,000019 \,, \quad = 0,000476 \quad , \quad = 0,001904 \,.$$

Wäre also $\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 1$ Sekunde, wonach das entsprechende Pendel bei kaum merklicher Ausweichung 86400 Schwingungen in einem Tage machen würde, so würde es bei 1°, 5° und 10° Ausweichung der Reihe nach nur

$$\frac{86400}{1,000019} \quad , \quad \frac{86400}{1,000476} \quad , \quad \frac{86400}{1,001934} \,,$$

oder

$$86398,3 \quad , \quad 86358,7 \quad , \quad 86235,8$$

Schwingungen in 24 Stunden machen.

Aus dem Werthe von T folgt ferner, daß für gleiche Ausweichungen die Schwingungszeiten zweier Pendel von ungleicher Länge sich wie die Quadratwurzeln aus diesen Längen verhalten, daß also erst ein Pendel von der vierfachen Länge die doppelte Zeit zu einer Schwingung braucht oder halbsoviele Schwingungen in derselben Zeit macht, als das von einfacher Länge.

§. 104.

Zuletzt schließen wir aus den obigen Werthen von T, daß bei gleicher Ausweichung und gleicher Schwingungsdauer die Pendellängen an verschiedenen Orten der Erde sich wie die Beschleunigungen der Schwere an diesen Orten verhalten, und dadurch wird uns das Pendel das einfachste und genaueste Mittel, um die Intensität der Schwere an den verschiedenen Punkten der Erdoberfläche zu vergleichen, und das Gesetz ihrer Aenderung auszudrücken. Denn es ist einleuchtend, daß die Schwingungsdauer eines

Pendels durch die Beobachtung während einiger Stunden schon sehr genau erhalten werden kann, und daß es nur darauf ankommt, die Länge desselben genau zu bestimmen. Diese Bestimmung der Länge ist indessen nicht ebenso einfach, wie die der Zeit, weil wir sie nicht an mathematischen oder einfachen Pendeln beobachten, sondern an zusammengesetzten, selbst wenn man sich ein solches aus einer kleinen möglichst dichten Kugel an einem möglichst leichten und biegsamen Faden bildet, eine Construction, welche übrigens ihre Nachtheile hat wegen der Dehnbarkeit des Fadens und der Veränderlichkeit des statischen und dynamischen Druckes, und weil diese Pendel alle in der Luft schwingen, welche nicht nur einen Widerstand verursacht, sondern auch das Gewicht, also die bewegende Kraft des Pendels vermindert, abgesehen noch von einigen andern Schwierigkeiten, auf welche wir bei der Untersuchung der Bewegung eines physischen Pendels zurückkommen werden.

Durch die bisherigen schon ziemlich zahlreichen Versuche hat sich ergeben, daß übereinstimmend mit dem, was in §. 97 bei der Betrachtung des durch die Achsendrehung der Erde hervorgerufenen dynamischen Druckes gesagt wurde, die Länge des einfachen Sekundenpendels, für die Meeresfläche und den leeren Raum berechnet, am Aequator am kürzesten ist und gegen die Pole hin zunimmt, und daß der Unterschied in dieser Länge an den genannten Orten ohngefähr $\frac{1}{200}$ derselben beträgt, woraus denn nach dem oben ausgesprochenen Schlusse folgt, daß auch der Unterschied in der Intensität der Schwere oder in dem Gewichte eines Körpers $\frac{1}{200}$ sein muß.

In §. 97 haben wir gefunden, daß die Verminderung der Schwere durch den dynamischen Druck dem Quadrat des Cosinus der Breite proportional ist, daß an einem Orte, dessen geographische Breite β ist, die Beschleunigung der Körper beim freien Falle um

$$R\varphi^2 \cos^2\beta$$

kleiner ist, als wenn die Erde keine Drehung um ihre Achse besäße, so daß wenn diese Beschleunigung im letztern Falle mit $g_{,}$ bezeichnet wird, die wirkliche Beschleunigung g durch

$$g = g_{,}\left(1 - \frac{R\varphi^2}{g_{,}} \cos^2\beta\right),$$

oder wenn man den Sinus der Breite statt des Cosinus einführt, durch

$$g = g_{,}\left(1 - \frac{R\varphi^2}{g_{,}} + \frac{R\varphi^2}{g_{,}}\sin^2\beta\right)$$

ausgedrückt wird. Wäre nun die Erde eine vollkommene Kugel und die Intensität der Schwere ohne den dynamischen Druck an allen Orten ihrer Oberfläche (der verlängerten Meeresfläche) dieselbe, so wäre offenbar

$$g_{,}\left(1 - \frac{R\varphi^2}{g_{,}}\right) = g_0$$

die wirkliche Beschleunigung derselben am Aequator, und man hätte allgemein:

$$g = g_0\left(1 + \frac{R\varphi^2}{g_0}\sin^2\beta\right) = g_0(1 + \delta_0^2\sin^2\beta),$$

indem man bei dem kleinen Bruche $\frac{R\varphi^2}{g_0}$ den kleinen Unterschied zwischen $g_{,}$ und g_0 vernachlässigt; es würde also die Beschleunigung der Schwere vom Aequator gegen die Pole hin proportional dem Quadrat des Breite-Sinus zunehmen.

Es wird aber im nächsten Buche bei der Lehre von der gegenseitigen Anziehung der Massen gezeigt werden, daß auch die von der Abplattung herrührende Aenderung in der Intensität der Schwere vom Aequator gegen die Pole positiv und dem Quadrat des Breite-Sinus proportional ist, so daß wenn G_0 diese Kraft für die unbewegliche Erde am Aequator G für einen Parallelkreis, dessen Breite $= \beta$ ist, und λ einen kleinen constanten Factor bezeichnet, man hat

$$G = G_0(1 + \lambda\sin^2\beta) = g_{,};$$

damit folgt sodann

$$g = G_0(1 + \lambda\sin^2\beta)\left(1 - \frac{R\varphi^2}{G_0} + \frac{R\varphi^2}{G_0}\sin^2\beta\right)$$

oder wenn man entwickelt, g_0 für $G_0\left(1 - \frac{R\varphi^2}{g_0}\right)$ setzt, und das sehr kleine Glied:

$$\frac{R\varphi^2}{G_0}\lambda\sin^4\beta \text{ gegen } \left(\lambda + \frac{R\varphi^2}{g_0}\right)\sin^2\beta = \omega\sin^2\beta$$

vernachlässigt, einfach

$$g = g_0(1 + \omega\sin^2\beta),$$

wonach also die wirklich stattfindende Aenderung der Intensität der Schwere bis auf sehr kleine Größen noch dem Quadrat des Breite-Sinus proportional ist. Der Ausdruck:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

gibt dann für $T = 1$, $g = \pi^2 l$, $g_0 = \pi^2 l_0$, und damit nimmt der vorhergehende auch die Form an:

$$l = l_0 (1 + \omega \sin^2 \beta) ,$$

worin l_0 die Länge des Sekundenpendels am Aequator, und l die eines Sekundenpendels unter der Breite β, aber immer an der Meeresfläche genommen, vorstellt.

Aus einer großen Anzahl der verläßigsten und soviel möglich in gleichen Breiteunterschieden genommenen Pendelbeobachtungen erhält man nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$l_0 = 0^m,991013 \quad , \qquad \omega = 0,005188 ,$$

und demnach für irgend einen Ort, dessen Breite β ist,

$$l = 0^m,991013 (1 + 0,005188 \sin^2 \beta)$$

und ebenso mittels der Gleichung: $g_0 = \pi^2 l_0$,

$$g = 9^m,78091 (1 + 0,005188 \sin^2 \beta) .$$

An den Polen ist $\sin^2 \beta = 1$, und demnach

$$l = 0^m,996154 \quad , \qquad g = 9^m,83165 ;$$

der Unterschied beträgt daher in der Pendellänge $0^m,00514$, in der Beschleunigung der Schwere $0^m,05074$, bei jedem also etwas mehr als $\frac{1}{200}$ des mittleren Werthes.

Den vorhergehenden Ausdrücken gibt man gewöhnlich noch eine andere Form, indem man statt des Quadrates des Breite-Sinus den Cosinus der doppelten Breite einführt; man hat nämlich

$$\sin^2 \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\beta ,$$

und erhält damit

$$g = g_0 (1 + \frac{1}{2} \omega - \frac{1}{2} \omega \cos 2\beta) = g' (1 - \omega' \cos 2\beta) ,$$

wo nun $g' = g_0 \left(1 + \frac{1}{2}\omega\right)$ die Intensität der Schwere unter einer Breite von 45°, und ω' den Bruch $\frac{\omega}{2+\omega}$ ausdrückt. Mit den vorhergehenden Werthen wird $g' = 9{,}80627$, $\omega' = 0{,}002587$,

$$g = 9{,}80627\,(1 - 0{,}002587 \cos 2\beta) ,$$

und ebenso findet man

$$l = 0^{m}{,}993584\,(1 - 0{,}002587 \cos 2\beta) .$$

Versetzt man ferner ein Pendel von der Länge l von einem Orte, dessen Breite β ist, an einen andern unter der Breite β', so wird es langsamer gehen, wenn $\beta' < \beta$, und schneller, wenn $\beta' > \beta$ ist; denn an dem ersten Orte hat man

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g_0\,(1 + \omega \sin^2 \beta)}} ,$$

an dem zweiten ebenso

$$T' = \pi \sqrt{\frac{l}{g_0\,(1 + \omega \sin^2 \beta')}} ,$$

und daraus, indem man den letztern Werth durch den erstern dividirt:

$$T' = T \sqrt{\frac{1 + \omega \sin^2 \beta}{1 + \omega \sin^2 \beta'}} .$$

Will man diesen Unterschied durch die Zahl der Schwingungen ausdrücken, welche in 1 Minute gemacht werden, so hat man

$$\frac{1}{T} = n \quad , \quad \frac{1}{T'} = n' ,$$

und demnach auch

$$n' = n \sqrt{\frac{1 + \omega \sin^2 \beta'}{1 + \omega \sin^2 \beta}} ;$$

die Zahl der Schwingungen wird folglich größer oder kleiner mit der geographischen Breite des Beobachtungsortes. Ein Pendel z. B. das unter der Breite von 45° gerade Sekunden schwingt, würde an die Pole versetzt

$$n' = 60 \sqrt{\frac{1{,}005188}{1{,}002594}} = 60{,}0776$$

am Aequator dagegen nur

$$n'' = 60 \sqrt{\frac{1}{1,002594}} = 59,9223$$

Schwingungen in einer Minute machen, an dem ersten Orte also in einem Tage nahe um 112 Sekunden voreilen, an dem Aequator dagegen um ebensoviel zurückbleiben oder nachgehen.

Die Intensität der Schwere nimmt aber auch, wie wir wissen, ab mit wachsender Entfernung von der Meeresfläche; es wird also für dieselbe Pendellänge die Schwingungsdauer mit dieser Entfernung zunehmen, oder für gleiche Schwingungsdauer die Länge des Pendels kleiner werden müssen, und zwar wird man für eine Höhe h über der Meeresfläche, nach §. 53

$$T' = \pi \sqrt{\frac{l}{g} \frac{R+h}{R}} = T\left(1+\frac{h}{R}\right)$$

als Ausdruck für die Schwingungsdauer bei unveränderter Länge und umgekehrt

$$l' = g\frac{T^2}{\pi^2} \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2} = l\frac{R}{R+2h}$$

als die erforderliche Länge finden, damit die Schwingungsdauer dieselbe bleibt. Aus dem Werthe von T' ergibt sich, daß es für ein Sekundenpendel nur einer Erhöhung von 74^m bedarf, um in einem Tage eine Verzögerung von 1 Sekunde zu erhalten.

Der Werth von l' wird gewöhnlich angewendet, um die Länge eines beobachteten Pendels auf die Meeresfläche zu reduziren, d. h. die Länge l eines Pendels zu berechnen, welches an demselben Orte, aber an die unter das Land verlängerte Meeresfläche versetzt, Schwingungen von derselben Dauer machen würde wie das beobachtete von der Länge l'. Man hat dazu die Formeln:

$$l = l'\left(1+\frac{2h}{R}\right) \quad , \qquad \Delta l' = \frac{2h}{R} l' ,$$

worin $\Delta l'$ die der beobachteten Länge l' beizufügende Reduction ist.

Wenn der Beobachtungsort unter der Meeresfläche liegt, so hat man nach §. 52

$$g' = g\frac{R-h}{R} = g\left(1-\frac{h}{R}\right)$$

und demnach auch für gleiche Schwingungsdauer

$$l' = l\left(1 - \frac{h}{R}\right),$$

also umgekehrt die Beziehungen:

$$l = l'\left(1 + \frac{h}{R}\right) \quad , \qquad \Delta l' = \frac{h}{R}\, l' \; ,$$

um die beobachtete Pendellänge l' auf die Meeresfläche zu reduziren.

§. 105.

Die Cycloide bietet ein anderes und sehr einfaches Beispiel für den Fall eines schweren Atoms auf einer gegebenen Curve dar. Nehmen wir dazu wieder den Scheitel A, Fig. 88, als Anfangspunkt, die Tangente daselbst als Achse der x, und die Normale in demselben Punkte, welche der Richtung der Schwere parallel vorausgesetzt wird, als Achse der z, und zwar so, daß der Krümmungsmittelpunkt C nach oben auf die positive Hälfte dieser Achse zu liegen kommt, und bezeichnen wir den Durchmesser des erzeugenden Kreises mit 2a, so haben wir als Aenderungsgesetz der Coordinaten (vergl. §. 32 des 2ten Buches)

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{\frac{2a - z}{z}},$$

und ziehen daraus als Aenderungsgesetz des Bogens

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{\frac{2a}{z}}.$$

Die Gleichung (96) für die Geschwindigkeit bleibt wieder unverändert, und ebenso die daraus für die Bewegung im Kreise gezogenen Folgerungen für den Fall, daß die anfängliche Geschwindigkeit v_0 nicht größer ist, als $\sqrt{2g(2a - z_0)}$, was denn auch für das Folgende vorausgesetzt werden soll. Der Bewegte wird demnach zu beiden Seiten seiner Gleichgewichtslage A wieder eine unbeschränkte Anzahl von Schwingungen machen, und die Dauer einer solchen kann durch

$$T = 2\int_0^{z_0} dz \,.\, \frac{\frac{ds}{dz}}{\sqrt{v_0^2 + 2g(z_0 - z)}}$$

oder wenn wir v_0 gleich Null und dafür z_0 um soviel größer nehmen, und den obigen Werth für $\frac{ds}{dz}$ einführen, durch

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{z_0} dz . \frac{1}{\sqrt{z_0 z - z^2}}$$

ausgedrückt werden; dabei kann die Bewegung auch vom tiefsten Punkte anfangend vorausgesetzt werden, und z_0 den Werth von z am Ende der Zeit T vorstellen. Man hat dann noch

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z_0 z - z^2}} = \varDelta . \operatorname{arc} \cos \frac{z_0 - 2z}{z_0}$$

und damit

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} = \pi \sqrt{\frac{4a}{g}} .$$

Bei der Cycloide ist daher die Schwingungsdauer gänzlich unabhängig von der anfänglichen Lage des Bewegten, also auch von der Größe des beschriebenen Bogens oder von der Ausweichung, und der Bewegte braucht dieselbe Zeit $\frac{1}{2} T = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{4a}{g}}$ um mit der anfänglichen Geschwindigkeit Null von M nach A zu gelangen, wie von B nach A, und von A nach B'. Wegen dieser Eigenschaft wird die Cycloide auch Tautochrone genannt.

Diese Schwingungsdauer ist ferner, wie man durch Vergleichung des zuletzt erhaltenen Werthes von T mit dem in §. 103 gefundenen sehen wird, dieselbe wie die eines mit sehr kleinen Ausweichungen im Kreise schwingenden Pendels, dessen Länge l dem doppelten Durchmesser $AC = 2AD$ des erzeugenden Kreises der Cycloide gleich ist, und man wird mittels der in §. 30 der Einleitung für den Krümmungshalbmesser einer ebenen Curve abgeleiteten Formel sich leicht überzeugen, daß dieses auch die Länge des Krümmungshalbmessers in dem Scheitelpunkte, daß daher C der Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel ist; denn man findet nach der genannten Formel für die Cycloide allgemein

$$\varrho = 2\sqrt{2a(2a - z)} .$$

Wir schließen daraus, daß der Werth $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ für die Schwingungsdauer des Kreispendels nur für solche Ausweichungen, und insoweit richtig ist, als der Kreisbogen mit dem Bogen der Cycloide, für welche $a = \frac{1}{2} l$ ist, zusammenfallend angenommen werden kann, und daß für sehr kleine Schwingungen um den tiefsten Punkt irgend einer Curve die Schwingungsdauer denselben Werth erhalten wird, als wenn die Bewegung im Krümmungskreise dieses tiefsten Punktes statt hätte.

Die Bewegung eines materiellen Punktes in irgend einer ebenen Curve kann man immer dadurch erzeugt denken, daß derselbe an einem vollkommen biegsamen, aber unausdehnbaren Faden befestigt werde, welcher sich bei der Bewegung an die Evolute der zu beschreibenden Curve anlegt. Bei der Cycloide ist diese Evolute eine der gegebenen ganz congruente Cycloide, welche die Bahn des erzeugenden Kreises der gegebenen zur Tangente im Scheitel und diesen selbst im Anfang B oder B′ der gegebenen Cycloide hat. Sind also CB und CB′ zwei solche halbe Cycloiden oder cycloidische Cylinderflächen, an welche sich der vollkommen biegsame Faden CM anlegen kann, so wird der materielle Endpunkt desselben sich in der Cycloide BAB′ bewegen, und ganz gleichdauernde Schwingungen machen, wie groß auch die Ausweichung sein mag. Die Spannung, welche der Faden bei dieser Bewegung erleidet, wird für irgend eine Lage durch

$$N' = mg \sqrt{\frac{2a - z}{2a}} + m \frac{g(z_0 - z)}{\sqrt{2a(2a - z)}}$$

ausgedrückt. In der größten Ausweichung ist sie daher

$$mg \sqrt{\frac{2a - z_0}{2a}},$$

in der Gleichgewichtslage dagegen

$$mg \left(1 + \frac{z_0}{2a}\right).$$

Für $z_0 = 2a$, d. h. wenn die Bewegung in B anfängt, ist demnach die Spannung in B Null und in A gleich $2mg$; es ist nämlich in diesem Falle der dynamische Druck in A gerade dem Gewichte des Bewegten gleich.

§. 108.

Es dürfte nun von Interesse sein, zu untersuchen, ob die Cycloide die einzige ebene Curve ist, bei welcher die Zeit des Falles von jedem beliebigen Punkte bis zum Scheitel oder tiefsten Punkte dieselbe ist, oder bei welcher die Dauer der Schwingungen um den tiefsten Punkt dieselbe bleibt für große wie für kleine Schwingungsbogen.

Wenn dieses der Fall sein soll, so muß der Werth von t nämlich das bestimmte Integral:

$$t = \int_0^{z_0} dz \, . \frac{\frac{ds}{ds}}{\sqrt{2g\,(z_0 - z)}} = \int_0^{z_0} dz \, . \frac{\sqrt{1 + \frac{dx}{dz}}}{\sqrt{2g\,(z_0 - z)}}$$

zwischen den angezeigten Grenzen z_0 und 0 für die Veränderliche z genommen, von der willkürlichen Größe z_0 unabhängig werden, wobei vorausgesetzt ist, daß die Gleichung der gesuchten Curve in Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Achse der x die Curve im tiefsten Punkt berührt, die Form habe:

$$x = f(z) \; .$$

Diese Bedingung kann aber offenbar nur befriedigt werden, wenn das unbestimmte Integral eine Function von $\frac{z}{z_0}$ wird. Bezeichnet man also mit p die Länge einer Geraden, welche der betreffenden Curve insbesondere angehört, und durch welche allein oder mit andern in der Curve vorkommenden, ihre Gestalt bestimmenden Linien, die absolute Größe und Ausdehnung derselben bedingt ist, so kann und muß die Zeit t gemäß der Gesetze der Homogeneität, da dieselbe immer auf die absolute Einheit bezogen ist (§. 44), durch eine Gleichung von der Form:

$$t = \sqrt{\frac{p}{2g}} \, \overset{z_0}{\underset{0}{\Delta}} . F\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

ausgedrückt werden, in welcher die Größe p unter dem Functionszeichen F nur mit den andern in der Gleichung der Curve enthaltenen constanten Größen in den Formen: $\frac{a}{p}$, $\frac{b}{p}$, etc. vorkommen kann, d. h. in Formen von Brüchen oder Quotienten, deren Werth von der

besondern Einheit unabhängig ist, die also bloße Zahlengrößen vertreten, und es ist leicht zu sehen, daß darunter keiner von der Form:

$$\frac{z_0}{p} \quad \text{oder} \quad \frac{z}{p}$$

erscheinen kann, da diese der Bedingung entgegen sind, daß t zwischen den Grenzen z_0 und 0 für z von z_0 unabhängig wird. Die Function $F\left(\frac{z}{z_0}\right)$ kann folglich außer dem angezeigten veränderlichen Quotienten $\frac{z}{z_0}$ nur noch constante Zahlenwerthe α, β, etc. enthalten, welche entweder Factoren des veränderlichen Quotienten oder von Functionen desselben sind, oder mit diesen durch die Summenzeichen verbunden werden, was man dadurch andeuten kann, daß man

$$F\left(\alpha,\ \beta\frac{z}{z_0}\right) \quad \text{für} \quad F\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

schreibt. Man hat demnach

$$t = \int_0^{z_0} dz . \frac{\frac{ds}{dz}}{\sqrt{2g(z_0 - z)}} = \sqrt{\frac{p}{2g}}\ \overset{z_0}{\underset{0}{\Delta}} . F\left(\alpha, \beta\frac{z}{z_0}\right)$$

und darnach auch

$$\frac{dt}{dz} = \frac{\frac{ds}{dz}}{\sqrt{2g(z_0 - z)}} = \sqrt{\frac{p}{2g}} . \frac{\beta}{z_0} F'\left(\alpha,\ \beta\frac{z}{z_0}\right)$$

worin die erste Abgeleitete der Function F mit F' bezeichnet ist, und woraus man das Aenderungsgesetz:

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{p} . \frac{\beta}{z_0}\sqrt{z_0 - z} . F'\left(\alpha, \beta\frac{z}{z_0}\right)$$

des Bogens s in Bezug auf die Veränderliche z zieht.

Nun folgt aus der Natur der Sache, daß der Werth von $\frac{ds}{dz}$, welcher blos von der Gestalt der Curve abhängen kann, unabhängig sein muß von der willkürlichen Größe z_0, welche erst durch die Betrachtung der Bewegung eingeführt wird; es muß daher der Ausdruck:

$$\sqrt{\frac{\beta^2}{z_0}\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)} F'\left(\alpha,\ \beta\frac{z}{z_0}\right) = f(\alpha, \beta z)$$

werden, d. h. frei von z_0 und nur eine Function von z und den Zahlengrößen α, β, etc., so daß man einfach

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{p}\, f(\alpha, \beta z)$$

erhält. Man sieht aber hier sogleich, daß dieser Werth der von jeder besondern Einheit unabhängigen Größe $\frac{ds}{dz}$, welche mit einer Winkel-Function homogen ist, den Gesetzen der Homogeneität nur durch die einzige Form:

$$f(\alpha, \beta z) = \frac{\gamma}{\sqrt{z}},$$

worin γ einen Zahlencoeffizient, wie α und β vorstellt, Genüge thun kann, weil in diesem Werth nur noch die beiden Größen p und z auf die Einheit der Länge bezogen sind, und daß man demnach

$$\frac{ds}{dz} = \gamma \sqrt{\frac{p}{z}}$$

haben muß. Daraus wird man sogleich

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{\gamma^2 p - z}{z}}$$

ableiten und den Schluß ziehen, daß die Unabhängigkeit der Zeit des Falles von der Größe der anfänglichen Ausweichung aus der Gleichgewichtslage nur bei derjenigen Curve stattfinden kann, deren Gleichung ein Aenderungsgesetz von der Form:

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{\frac{2a - z}{z}}$$

gibt, wenn 2a statt $\gamma^2 p$ gesetzt wird, also nur bei der Cycloide.

§. 107.

Eine andere hieher gehörende beachtenswerthe Untersuchung ist die Beantwortung der Frage, in welcher Curve ein schwerer materieller Punkt herabfallen muß, um ohne anfängliche Geschwindigkeit in der kleinsten Zeit von einem gegebenen Punkte A zu einem gleichfalls gegebenen tiefer liegenden Punkte B zu gelangen.

Es leuchtet bei dieser Untersuchung von selbst ein, daß diese Curve durchaus in der parallel zur Richtung der Schwere durch die beiden gegebenen Punkte gelegten Ebene enthalten sein muß; wir wollen indessen die Verhältnisse ganz allgemein, aber dabei möglichst einfach betrachten.

Dazu nehmen wir den höher gelegenen Punkt A als Anfang der Coordinaten, die Achse der z parallel zur Richtung der Schwere und abwärts positiv, so daß die Fallgeschwindigkeit des Bewegten in einem Punkte, dessen lothrechte Entfernung von der durch den Punkt A wagrecht gelegten Ebene der xy gleich z ist, einfach durch

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gz}$$

ausgedrückt wird. Ferner legen wir die Ebene der xz durch den tiefer liegenden Punkt B, und bezeichnen seine Coordinaten, d. i. seine wagrechte und seine lothrechte Entfernung von A mit $x_,$, $z_,$. Sind dann

$$x = f_1(z) \quad , \quad y = f_2(z)$$

die unbekannten Gleichungen der gesuchten Curve, welche nur der Bedingung zu genügen haben, daß die Curve durch die gegebenen Punkte geht, daß also für $z = 0$ sowohl x als y Null wird, und daß für $z = z_,$ man $x = x_,$ und $y = 0$ erhält, so hat man

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}$$

und für die Zeit t, welche der Bewegte braucht, um von A zu einem um z tiefer gelegenen Punkte M zu gelangen, den Werth:

$$t = \int_0^z dz \, . \, \frac{\frac{ds}{dz}}{\sqrt{2gz}} \, .$$

Das Aenderungsgesetz von t in Bezug auf z hängt also von dem Werthe von $\frac{ds}{dz}$, oder wie dieser von den unter sich ganz unabhängigen Verhältnissen $\frac{dx}{dz}$ und $\frac{dy}{dz}$ ab, die sich für denselben Werth von z von einer Curve zur andern verändern, und wenn man das Verhältniß

§. 106.

Es dürfte nun von Interesse sein, zu untersuchen, ob die Cycloide die einzige ebene Curve ist, bei welcher die Zeit des Falles von jedem beliebigen Punkte bis zum Scheitel oder tiefsten Punkte dieselbe ist, oder bei welcher die Dauer der Schwingungen um den tiefsten Punkt dieselbe bleibt für große wie für kleine Schwingungsbogen.

Wenn dieses der Fall sein soll, so muß der Werth von t nämlich das bestimmte Integral:

$$t = \int_0^{z_0} dz \,.\, \frac{\frac{ds}{ds}}{\sqrt{2g(z_0 - z)}} = \int_0^{z_0} dz \,.\, \frac{\sqrt{1 + \frac{dx}{dz}}}{\sqrt{2g(z_0 - z)}}$$

zwischen den angezeigten Grenzen z_0 und 0 für die Veränderliche z genommen, von der willkürlichen Größe z_0 unabhängig werden, wobei vorausgesetzt ist, daß die Gleichung der gesuchten Curve in Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Achse der x die Curve im tiefsten Punkt berührt, die Form habe:

$$x = f(z) \,.$$

Diese Bedingung kann aber offenbar nur befriedigt werden, wenn das unbestimmte Integral eine Function von $\frac{z}{z_0}$ wird. Bezeichnet man also mit p die Länge einer Geraden, welche der betreffenden Curve insbesondere angehört, und durch welche allein oder mit andern in der Curve vorkommenden, ihre Gestalt bestimmenden Linien, die absolute Größe und Ausdehnung derselben bedingt ist, so kann und muß die Zeit t gemäß der Gesetze der Homogeneität, da dieselbe immer auf die absolute Einheit bezogen ist (§. 44), durch eine Gleichung von der Form:

$$t = \sqrt{\frac{p}{2g}} \, \Delta_0^{z_0} . F\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

ausgedrückt werden, in welcher die Größe p unter dem Functionszeichen F nur mit den andern in der Gleichung der Curve enthaltenen constanten Größen in den Formen: $\frac{a}{p}$, $\frac{b}{p}$, etc. vorkommen kann, d. h. in Formen von Brüchen oder Quotienten, deren Werth von eder

besondern Einheit unabhängig ist, die also bloße Zahlengrößen vertreten, und es ist leicht zu sehen, daß darunter keiner von der Form:

$$\frac{z_0}{p} \quad \text{oder} \quad \frac{z}{p}$$

erscheinen kann, da diese der Bedingung entgegen sind, daß t zwischen den Grenzen z_0 und 0 für z von z_0 unabhängig wird. Die Function $F\left(\frac{z}{z_0}\right)$ kann folglich außer dem angezeigten veränderlichen Quotienten $\frac{z}{z_0}$ nur noch constante Zahlenwerthe α, β, etc. enthalten, welche entweder Factoren des veränderlichen Quotienten oder von Functionen desselben sind, oder mit diesen durch die Summenzeichen verbunden werden, was man dadurch andeuten kann, daß man

$$F\left(\alpha, \beta\frac{z}{z_0}\right) \quad \text{für} \quad F\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

schreibt. Man hat demnach

$$t = \int_0^{z_0} dz . \frac{\frac{ds}{dz}}{\sqrt{2g(z_0 - z)}} = \sqrt{\frac{p}{2g}} \overset{z_0}{\underset{0}{\Delta}} . F\left(\alpha, \beta\frac{z}{z_0}\right)$$

und darnach auch

$$\frac{dt}{dz} = \frac{\frac{ds}{dz}}{\sqrt{2g(z_0 - z)}} = \sqrt{\frac{p}{2g}} . \frac{\beta}{z_0} F'\left(\alpha, \beta\frac{z}{z_0}\right)$$

worin die erste Abgeleitete der Function F mit F′ bezeichnet ist, und woraus man das Aenderungsgesetz:

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{p} . \frac{\beta}{z_0} \sqrt{z_0 - z} . F'\left(\alpha, \beta\frac{z}{z_0}\right)$$

des Bogens s in Bezug auf die Veränderliche z zieht.

Nun folgt aus der Natur der Sache, daß der Werth von $\frac{ds}{dz}$, welcher blos von der Gestalt der Curve abhängen kann, unabhängig sein muß von der willkürlichen Größe z_0, welche erst durch die Betrachtung der Bewegung eingeführt wird; es muß daher der Ausdruck:

$$\sqrt{\frac{\beta^2}{z_0}\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)} F'\left(\alpha, \beta\frac{z}{z_0}\right) = f(\alpha, \beta z)$$

werden, d. h. frei von z_0 und nur eine Function von z und den Zahlengrößen α, β, etc., so daß man einfach

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{p}\, f(\alpha, \beta z)$$

erhält. Man sieht aber hier sogleich, daß dieser Werth der von jeder besondern Einheit unabhängigen Größe $\frac{ds}{dz}$, welche mit einer Winkel-Function homogen ist, den Gesetzen der Homogeneität nur durch die einzige Form:

$$f(\alpha, \beta z) = \frac{\gamma}{\sqrt{z}},$$

worin γ einen Zahlencoeffizient, wie α und β vorstellt, Genüge thun kann, weil in diesem Werth nur noch die beiden Größen p und z auf die Einheit der Länge bezogen sind, und daß man demnach

$$\frac{ds}{dz} = \gamma \sqrt{\frac{p}{z}}$$

haben muß. Daraus wird man sogleich

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{\gamma^2 p - z}{z}}$$

ableiten und den Schluß ziehen, daß die Unabhängigkeit der Zeit des Falles von der Größe der anfänglichen Ausweichung aus der Gleichgewichtslage nur bei derjenigen Curve stattfinden kann, deren Gleichung ein Aenderungsgesetz von der Form:

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{\frac{2a - z}{z}}$$

gibt, wenn 2a statt $\gamma^2 p$ gesetzt wird, also nur bei der Cycloide.

§. 107.

Eine andere hieher gehörende beachtenswerthe Untersuchung ist die Beantwortung der Frage, in welcher Curve ein schwerer materieller Punkt herabfallen muß, um ohne anfängliche Geschwindigkeit in der kleinsten Zeit von einem gegebenen Punkte A zu einem gleichfalls gegebenen tiefer liegenden Punkte B zu gelangen.

Es leuchtet bei dieser Untersuchung von selbst ein, daß diese Curve durchaus in der parallel zur Richtung der Schwere durch die beiden gegebenen Punkte gelegten Ebene enthalten sein muß; wir wollen indessen die Verhältnisse ganz allgemein, aber dabei möglichst einfach betrachten.

Dazu nehmen wir den höher gelegenen Punkt A als Anfang der Coordinaten, die Achse der z parallel zur Richtung der Schwere und abwärts positiv, so daß die Fallgeschwindigkeit des Bewegten in einem Punkte, dessen lothrechte Entfernung von der durch den Punkt A wagrecht gelegten Ebene der xy gleich z ist, einfach durch

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gz}$$

ausgedrückt wird. Ferner legen wir die Ebene der xz durch den tiefer liegenden Punkt B, und bezeichnen seine Coordinaten, d. i. seine wagrechte und seine lothrechte Entfernung von A mit $x_{,}$, $z_{,}$. Sind dann

$$x = f_1(z) \quad , \quad y = f_2(z)$$

die unbekannten Gleichungen der gesuchten Curve, welche nur der Bedingung zu genügen haben, daß die Curve durch die gegebenen Punkte geht, daß also für $z = 0$ sowohl x als y Null wird, und daß für $z = z_{,}$ man $x = x_{,}$ und $y = 0$ erhält, so hat man

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}$$

und für die Zeit t, welche der Bewegte braucht, um von A zu einem um z tiefer gelegenen Punkte M zu gelangen, den Werth:

$$t = \int_0^z dz \, . \, \frac{\frac{ds}{dz}}{\sqrt{2gz}} \, .$$

Das Aenderungsgesetz von t in Bezug auf z hängt also von dem Werthe von $\frac{ds}{dz}$, oder wie dieser von den unter sich ganz unabhängigen Verhältnissen $\frac{dx}{dz}$ und $\frac{dy}{dz}$ ab, die sich für denselben Werth von z von einer Curve zur andern verändern, und wenn man das Verhältniß

$\frac{dt}{dz}$ mit t', $\frac{ds}{dz}$ mit s', und so die beiden letzten mit x' und y' b zeichnet, so hat man einmal

$$s'^2 = 1 + x'^2 + y'^2 \ , \quad \frac{ds'}{dx'} = \frac{x'}{s'} \ , \quad \frac{ds'}{dy'} = \frac{y'}{s'} \ ;$$

der Werth von t' kann dann als eine Function der beiden unabhängig Veränderlichen x' und y' betrachtet werden, und gibt demnach als Aen rungsgesetz dieser Function in Bezug auf eine unbestimmte Größe welche für alle Punkte einer der durch A und B gelegten Curven u veränderlich ist und deren Gestalt und Größenverhältnisse bedingt, u welche sich von einer zur andern stetig ändert, den Ausdruck:

$$\frac{\delta t'}{\delta k} = \frac{dt'}{dx'} \cdot \frac{\delta x'}{\delta k} + \frac{dt'}{dy'} \cdot \frac{\delta y'}{\delta k}$$

oder mit dem aus dem Werthe von t gezogenen Werthe von t':

$$\frac{\delta t'}{\delta k} = \frac{d.\frac{s'}{\sqrt{2gz}}}{dx'} \cdot \frac{\delta x'}{\delta k} + \frac{d.\frac{s'}{\sqrt{2gz}}}{dy'} \cdot \frac{\delta y'}{\delta k} \ .$$

Man zieht daraus für ein von k unabhängiges z, oder für den Uebergang von einer Curve zur andern in einer zur xy parallelen Ebene, das Uebergangsgesetz:

$$\frac{\delta t'}{\delta k} = \frac{1}{\sqrt{2gz}} \left(\frac{x'}{s'} \cdot \frac{\delta x'}{\delta k} + \frac{y'}{s'} \cdot \frac{\delta y'}{\delta k} \right) ,$$

welches mit den Werthen von x', y', s', t', und wenn die Ordnung in den durch die Zeichen d und δ angedeuteten Uebergängen nach §. 43 der Einleitung gewechselt wird, die Form annimmt:

$$\frac{d.\frac{\delta t}{\delta k}}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2gz}} \left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d.\frac{\delta x}{\delta k}}{dz} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d.\frac{\delta y}{\delta k}}{dz} \right) .$$

Integrirt man diesen Ausdruck nun in Bezug auf z zwischen den Grenzen $z_{,}$ und 0, oder zwischen den gegebenen Punkten A und B, so findet man:

$$\frac{\delta t}{\delta k} = \int_0^{z_{,}} dz \,.\, \frac{1}{\sqrt{2gz}} \left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d.\frac{\delta x}{\delta k}}{dz} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d.\frac{\delta y}{\delta k}}{dz} \right)$$

Richtung des Druckes angeben, vollständig durch die Gleichungen (§. 34 der Einleitung):

$$\cos\lambda = V\frac{dF}{dx} \quad , \quad \cos\mu = V\frac{dF}{dy} \quad , \quad \cos\nu = V\frac{dF}{dz}$$

oder durch:

$$\cos\lambda = V'\frac{dz}{dx} \quad , \quad \cos\mu = V'\frac{dz}{dy} \quad , \quad \cos\nu = -V'$$

bestimmt sein, worin zur Abkürzung wieder

$$V \text{ für } \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}},$$

und ebenso

$$V' \text{ für } \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$$

gesetzt ist.

Sind ferner wieder X, Y, Z die rechtwinkligen Componenten der bewegenden Kraft R am Ende der Zeit t, und N' die Intensität des normalen Druckes auf die Fläche oder des von ihr zu leistenden Widerstandes, also

$$N'\cos\lambda \quad , \quad N'\cos\mu \quad , \quad N'\cos\nu$$

die drei zu den Achsen parallen Componenten desselben, so wird man wieder

$$X - N'\cos\lambda \quad , \quad Y - N'\cos\mu \quad , \quad Z - N'\cos\nu$$

als die Seitenkräfte einer Resultirenden finden, welche dem materiellen Punkte dieselbe Bewegung, wie er sie mittels der festen Fläche und der Kraft R erhält, ertheilen würde, wenn er ganz frei wäre. Die Gleichungen seiner Bewegung sind demnach:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X - N'\cos\lambda \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y - N'\cos\mu \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z - N'\cos\nu \end{aligned}\right\} \quad (a.$$

aus denen man durch die erste Integration

$$\frac{1}{\sqrt{2gz}}\frac{dx}{ds}-\alpha=0\quad,\quad\frac{1}{\sqrt{2gz}}\frac{dy}{ds}-\beta=0\;,$$

und durch Elimination von $\sqrt{2gz}$ die Gleichung:

$$\alpha\frac{dy}{ds}=\beta\frac{dx}{ds}\quad\text{oder}\quad\frac{dy}{dx}=\frac{\beta}{\alpha}$$

findet, worin α und β die Werthe von $\frac{1}{\sqrt{2gz}}\frac{dx}{ds}$ und $\frac{1}{\sqrt{2gz}}\frac{dy}{ds}$ für einen der gegebenen Punkte, also entweder für $z_{\prime}=0$, oder für $z=z_{\prime}$ vorstellen. Diese letzte Gleichung ist aber das Aenderungsgesetz der Gleichung einer zur Achse der z parallelen Ebene, die gesuchte Curve muß also eine ebene, und ihre Ebene lothrecht sein. Die Gleichung dieser Ebene ist allgemein

$$y=\frac{\beta}{\alpha}(x-x_{\prime})\;;$$

da aber nach unserer Annahme y Null werden muß, sowohl wenn $x=0$, als wenn $x=x_{\prime}$ ist, so fällt die gesuchte Curve in die Ebene der xz, und man hat überhaupt

$$y=0\quad,\quad\frac{dy}{dx}=0\quad,\quad\frac{dy}{dz}=0\quad,\quad\frac{dy}{ds}=0\;.$$

Die zweite der Gleichungen (d) kann daher nichts weiter mehr geben; die erste dagegen wird nun einfacher, und zwar wenn man $\frac{dx}{dz}$ wieder durch x' ersetzt

$$\frac{d.\frac{1}{\sqrt{2gz}}\cdot\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}}{dz}=0\;,$$

sie gibt durch Ausführung der angedeuteten Ableitung nach einigen Reductionen den Ausdruck:

$$2z\frac{dx'}{dz}-x'(1+x'^2)=0$$

als bezeichnende Gleichung der gesuchten Curve. Wird dieselbe integrirt und der Werth von

$$\frac{z(1+x'^2)}{x'^2}$$

für $z = z_,$, $x = x_,$ mit $2a$ bezeichnet, so findet man

$$z(1+x'^2) = 2ax'^2$$

oder in Bezug auf x' aufgelöset, das Aenderungsgesetz:

$$x' = \frac{dx}{dz} = \pm\sqrt{\frac{z}{2a-z}},$$

und dieses ist wieder die Differentialgleichung einer Cycloide, welche die Achse der x zur Basis hat. Die Gleichung der Curve selbst ist daher das allgemeine Integral:

$$x = \int_0^z dz \,.\, \frac{z}{\sqrt{2az-z}} = a \arccos\frac{a-z}{a} - \sqrt{2az-z^2}$$

da x mit z Null wird; sie gibt für den Punkt B

$$x_, = a \arccos\frac{a-z_,}{a} - \sqrt{2az_, - z_,^2}$$

und es kann dadurch der Werth von a, von welchem die Größe der Cycloide abhängt, gefunden werden.

Will man noch die Zeit des Falles von A bis B ausdrücken, so muß man in den in §. 105 gefundenen Werth von t als Grenzen von z die Werthe $z_0 = 2a$, $z = 2a - z_,$ einführen, und wird dadurch

$$t' = \int_{2a-z_,}^{2a} dz \,.\, \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{1}{\sqrt{z_0 z - z^2}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \arccos\frac{a-z_,}{a}$$

als den Werth der kleinsten Zeit finden, in welcher ein materieller Punkt durch die Wirkung der Schwere von A nach B gelangen kann.

Liegen die beiden Punkte auf derselben lothrechten Geraden, so hat man $x_, = 0$, und damit wird

$$a \arccos\frac{a-z_,}{a} - \sqrt{2az_, - z_,^2} = 0$$

oder wenn man $\arccos\frac{a-z_,}{a} = u$ setzt,

$$u = \sin u\,,$$

was nur möglich ist, wenn $u = \sin u = 0$ wird. Dadurch hat man aber

$$\frac{a - z_{,}}{a} = 1$$

und folglich entweder $z_{,} = 0$, was im Allgemeinen nicht stattfinden soll, oder $a = \infty$, wodurch die Gleichung der Cycloide in $x = 0$ übergeht, während der Werth von t die unbestimmte Form: $0 . \infty$ annimmt; drückt man aber diesen Werth durch den Sinus des Bogens u aus, anstatt durch seinen Cosinus, so ergibt sich

$$t_{,} = \sqrt{\frac{a}{g}} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{2 z_{,}}{a} - \frac{z_{,}^2}{a^2}},$$

und wenn hier der Sinus für den kleinen Bogen gesetzt, reduzirt, und $a = \infty$ genommen wird, so folgt

$$t_{,} = \sqrt{\frac{2 z_{,}}{g}}$$

als die Zeit für den Fall durch die lothrechte Höhe $z_{,}$.

II. Bewegung auf einer festen Fläche.

§. 108.

Wenn ein materieller Punkt bei seiner Bewegung der Bedingung unterworfen ist, auf einer gegebenen Fläche bleiben zu müssen, so ist die Richtung seiner Bewegung oder seiner Geschwindigkeit durch seine Lage auf dieser Fläche nicht mehr vollständig bestimmt, sondern nur insoweit, daß dieselbe mit der an die Fläche gelegten berührenden Ebene zusammenfallen muß. Dagegen ist nun die Richtung des Druckes, welchen der Bewegte auf die Fläche ausübt, oder des Widerstandes, den diese entgegensetzen muß, blos eine Function von der Lage des Bewegten, und unabhängig von der Intensität und Richtung der Kraft. Ist nämlich

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{oder} \quad z = f(x, y)$$

die Gleichung der gegebenen Fläche zwischen rechtwinkligen Coordinaten, und bezeichnen λ, μ, ν die drei Winkel, welche die Richtung der Normalen mit den drei Achsen bildet, so werden diese, welche auch die

Richtung des Druckes angeben, vollständig durch die Gleichungen (§. 34 der Einleitung):

$$\cos\lambda = V\frac{dF}{dx} \quad , \quad \cos\mu = V\frac{dF}{dy} \quad , \quad \cos\nu = V\frac{dF}{dz}$$

oder durch:

$$\cos\lambda = V'\frac{dz}{dx} \quad , \quad \cos\mu = V'\frac{dz}{dy} \quad , \quad \cos\nu = -V'$$

bestimmt sein, worin zur Abkürzung wieder

$$V \text{ für } \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}} ,$$

und ebenso

$$V' \text{ für } \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$$

gesetzt ist.

Sind ferner wieder X, Y, Z die rechtwinkligen Componenten der bewegenden Kraft R am Ende der Zeit t, und N′ die Intensität des normalen Druckes auf die Fläche oder des von ihr zu leistenden Widerstandes, also

$$N'\cos\lambda \quad , \quad N'\cos\mu \quad , \quad N'\cos\nu$$

die drei zu den Achsen parallelen Componenten desselben, so wird man wieder

$$X - N'\cos\lambda \quad , \quad Y - N'\cos\mu \quad , \quad Z - N'\cos\nu$$

als die Seitenkräfte einer Resultirenden finden, welche dem materiellen Punkte dieselbe Bewegung, wie er sie mittels der festen Fläche und der Kraft R erhält, ertheilen würde, wenn er ganz frei wäre. Die Gleichungen seiner Bewegung sind demnach:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X - N'\cos\lambda \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y - N'\cos\mu \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z - N'\cos\nu \end{aligned}\right\} \quad (a.$$

also der Form nach dieselben, wie die Gleichungen (a) in §. 93; sie unterscheiden sich aber von ihnen darin, daß sie nur die einzige Unbekannte N' enthalten, da die Winkel λ, μ, ν, wie schon bemerkt, bestimmte Functionen der Coordinaten x, y, z des Bewegten sind. Man erhält daher durch Elimination dieses unbekannten Druckes wie bei dem Gleichgewichte, zwei Bedingungsgleichungen, und man sieht leicht ein, daß man in die dort (§. 20) abgeleiteten Gleichungen (16) nur die Ausdrücke:

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2}\quad,\qquad Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\quad,\qquad Z - m\frac{d^2z}{dt^2}$$

für X, Y und Z einführen darf, um die Gleichungen für die Bewegung zu erhalten; man findet dadurch

$$100.)\quad \left\{\begin{aligned} m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dF}{dy} - \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dF}{dx}\right) &= X\frac{dF}{dy} - Y\frac{dF}{dx}\,, \\ m\left(\frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{dF}{dx} - \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dF}{dz}\right) &= Z\frac{dF}{dx} - X\frac{dF}{dz}\,. \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen sind indessen nur anwendbar, wenn X, Y, Z constante Größen oder Functionen von t sind; man sucht deßhalb die Unbekannte N' noch auf andere Weise zu eliminiren. Zuerst sieht man, daß auch hier die Bedingung:

$$b.)\qquad \frac{dx}{ds}\cos\lambda + \frac{dy}{ds}\cos\mu + \frac{dz}{ds}\cos\nu = 0$$

in welcher s den Bogen der von dem Bewegten auf der gegebenen Fläche beschriebenen Curve, von einem bestimmten Punkte an gemessen, ausdrückt, stattfinden muß, daß also N' aus den Gleichungen (a) wieder dadurch entfernt werden kann, daß man sie der Reihe nach mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ multiplicirt und ihre Summe nimmt. Dadurch entsteht dann wieder die Gleichung:

$$101.)\quad mv^2 - mv_0^2 = 2\int_{s_0}^{s} ds.\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right),$$

an welche sich denn auch wieder alle schon früher gemachten Folgerungen knüpfen, namentlich die, daß auch hier die Geschwindigkeit unveränderlich und die Bewegung eine gleichförmige wird, wenn man für alle Punkte

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}=0$$

hat, d. h. wenn entweder die bewegende Kraft selbst Null, oder wenn ihre Richtung überall normal zur Fläche ist.

Beachtet man ferner, daß man hat:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d.v\frac{dx}{ds}}{dt}=\frac{v\,d.v\frac{dx}{ds}}{ds}=v^2\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}+\frac{1}{2}\frac{dx}{ds}.\frac{d.v^2}{ds},$$

u. s. f.

so kann man die Gleichungen (100), aus denen noch eine dritte Gleichung entspringt, wenn man die erste mit $\frac{dF}{dz}$, die zweite mit $\frac{dF}{dy}$ multiplicirt, und die Summe der Producte nimmt, unter die Form bringen:

$$\left.\begin{array}{l}
mv^2\left\{\frac{dF}{dy}.\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}-\frac{dF}{dx}.\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds}\right\}+\frac{1}{2}\frac{d.mv^2}{ds}\left\{\frac{dF}{dy}.\frac{dx}{ds}-\frac{dF}{dx}.\frac{dy}{ds}\right\}\\
\qquad\qquad=X\frac{dF}{dy}-Y\frac{dF}{dx}\\
mv^2\left\{\frac{dF}{dx}.\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds}-\frac{dF}{dz}.\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}\right\}+\frac{1}{2}\frac{d.mv^2}{ds}\left\{\frac{dF}{dx}.\frac{dz}{ds}-\frac{dF}{dz}.\frac{dx}{ds}\right\}\\
\qquad\qquad=Z\frac{dF}{dx}-X\frac{dF}{dz}\\
mv^2\left\{\frac{dF}{dz}.\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds}-\frac{dF}{dy}.\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds}\right\}+\frac{1}{2}\frac{d.mv^2}{ds}\left\{\frac{dF}{dz}.\frac{dy}{ds}-\frac{dF}{dy}.\frac{dz}{ds}\right\}\\
\qquad\qquad=Y\frac{dF}{dz}-Z\frac{dF}{dy}
\end{array}\right\}.\ (c.$$

Führt man endlich für $\frac{1}{2}\frac{d.mv^2}{ds}$ seinen Werth:

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}$$

ein und beachtet die Bedingungsgleichung zwischen den Functionen $\frac{dx}{ds}$, etc., und die Gleichung (b), so findet man die neue Form:

$$m v^2 \left\{ \frac{dF}{dy} \cdot \frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} - \frac{dF}{dx} \cdot \frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds} \right\} = \frac{dz}{ds} \left[X \left(\frac{dF}{dy} \cdot \frac{dz}{ds} - \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dy}{ds} \right) \right.$$

$$\left. + Y \left(\frac{dF}{dz} \cdot \frac{dx}{ds} - \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dz}{ds} \right) + Z \left(\frac{dF}{dx} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dx}{ds} \right) \right]$$

oder

$$102.) \quad \left\{ \begin{array}{l} m v^2 \left\{ \frac{dF}{dy} \cdot \frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} - \frac{dF}{dx} \cdot \frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds} \right\} = T, \frac{dz}{ds} \\ m v^2 \left\{ \frac{dF}{dx} \cdot \frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds} - \frac{dF}{dz} \cdot \frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} \right\} = T, \frac{dy}{ds} \\ m v^2 \left\{ \frac{dF}{dz} \cdot \frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds} - \frac{dF}{dy} \cdot \frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds} \right\} = T, \frac{dx}{ds} \end{array} \right.$$

worin der Ausdruck:

$$X \left(\frac{dF}{dy} \cdot \frac{dz}{ds} - \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dy}{ds} \right) + Y \left(\frac{dF}{dz} \cdot \frac{dx}{ds} - \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dz}{ds} \right) + Z \left(\frac{dF}{dx} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dx}{ds} \right)$$

einstweilen zur Abkürzung durch T, ersetzt worden ist.

Will man die Gleichung der Fläche unter der Form:

$$z = f(x, y)$$

anwenden, so darf man nur

$$\frac{dz}{ds} \text{ für } \frac{dF}{dx} \quad , \quad \frac{dz}{dy} \text{ für } \frac{dF}{dy} \quad , \quad -1 \text{ für } \frac{dF}{dz}$$

setzen; die Gleichungen (102) werden dadurch:

$$102^a.) \quad \left\{ \begin{array}{l} m v^2 \left\{ \frac{dz}{dy} \cdot \frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} - \frac{dz}{dx} \cdot \frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds} \right\} = T, \frac{dz}{ds} \\ m v^2 \left\{ \frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds} \right\} = T, \frac{dy}{ds} \\ m v^2 \left\{ - \frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds} - \frac{dz}{dy} \cdot \frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds} \right\} = T, \frac{dx}{ds} \end{array} \right.$$

und der Werth von T, nimmt die Form an:

$$T_{,} = X\left(\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dz}{ds}\right) - Y\left(\frac{dx}{ds} + \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{ds}\right) + Z\left(\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dy}{ds} - \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dx}{ds}\right),$$

worin die Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ die aus der Gleichung der Fläche gezogenen Aenderungsgesetze der Coordinaten parallel zu den Ebenen der xz und yz vorstellen. — Kann demnach v^2 durch die Gleichung (101) als eine Function der drei Veränderlichen x, y, z ausgedrückt werden, so kann man zwei der Gleichungen (102) oder (102ª) als die Differentialgleichungen der Bahn des Bewegten auf der gegebenen Fläche betrachten, obwohl ihrer Integration auch in sehr einfachen Fällen unübersteigliche Hindernisse entgegenstehen. Wir werden übrigens bald auch eine mechanische Bedeutung dieser Gleichungen kennen lernen.

§. 109.

Um nun den Druck zu berechnen, welchen die feste Fläche zu ertragen hat, multiplicire man die Gleichungen (a) der Reihe nach mit $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, also mit den entsprechenden Coeffizienten von N', und nehmen ihre Summe. Man erhält so:

$$N' = \left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\cos\lambda + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\cos\mu + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\cos\nu$$

oder in anderer Zusammenstellung:

$$N' = X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu - m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\cos\lambda + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\mu + \frac{d^2z}{dt^2}\cos\nu\right)$$

und schließt aus der ersten Form, daß N' die nach der Normalen gerichtete Componente einer Kraft ist, welche als Resultirende gedacht werden kann von R und einer der Kraft F, die für sich allein dieselbe Bewegung hervorbringen würde, wie sie die Kraft R mittels der festen Fläche erzeugt, gleichen und entgegengesetzten Kraft. Die zweite Form dagegen drückt aus, daß der Druck N' die nach der Normale gerichtete rechtwinklige Componente von der Resultirenden aus der Kraft R und dem dynamischen Drucke auf die beschriebene Curve, oder aus der Kraft R und einer der zur Richtungsänderung nothwendigen Kraft $m\frac{v^2}{\varrho}$ gleichen und entgegengesetzten Kraft ist. Denn einmal kann man, wie früher, indem man den Winkel zwischen der Richtung der Kraft R und

dem positiven vom Krümmungsmittelpunkte sich entfernenden Theile der Normalen mit ϑ bezeichnet,

$$X \cos\lambda + Y \cos\mu + Z \cos\nu = R \cos\vartheta = N,$$

setzen, und wenn man dann die drei letzten Glieder wieder wie die Gleichungen (100) behandelt, nämlich $v \frac{d. v \frac{dx}{ds}}{ds}$ für $\frac{d^2x}{dt^2}$ u. s. f. einführt, entwickelt und die Bedingungsgleichung (b) beachtet, endlich für $\cos\lambda$, etc., deren obenangegebenen Werthe einführt, so nehmen dieselben die Form:

$$m v^2 \left\{ \frac{dF}{dx} \cdot \frac{d. \frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{d. \frac{dy}{ds}}{ds} + \frac{dF}{dz} \cdot \frac{d. \frac{dz}{ds}}{ds} \right\} V$$

oder

$$m v^2 \left\{ \frac{dz}{dx} \cdot \frac{d. \frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{d. \frac{dy}{ds}}{ds} - \frac{d. \frac{dz}{ds}}{ds} \right\} V'$$

an, worin nun die Veränderliche t eliminirt und der Bogen s wieder der Form nach als unabhängige Veränderliche eingetreten ist. Vergleicht man aber diese Ausdrücke mit den in §. 39 der Einleitung erhaltenen Werthen von $\cos\psi$, d. i. von dem Cosinus des Winkels, welchen die gegen den Krümmungsmittelpunkt gerichtete Hauptnormale der Bahn des Bewegten in dem Punkte xyz mit der Normalen zur Fläche in demselben Punkte bildet, so ergibt sich, daß die vorhergehenden Ausdrücke durch den einfachen:

$$-m \frac{v^2}{\varrho} \cos\psi' = -N \cos\psi'$$

ersetzt werden können, worin ψ' das Supplement von ψ oder den Winkel zwischen dem vom Krümmungsmittelpunkt abgewendeten Theile der Hauptnormalen und der Flächennormalen bezeichnet. Durch diese Umwandlungen hat man demnach

$$103.) \quad \left\{ \begin{aligned} N' &= R \cos\vartheta + m \frac{v^2}{\varrho} \cos\psi' \\ &= N_{\prime} + N \cos\psi' \end{aligned} \right.$$

und schließt daraus übereinstimmend mit dem, was oben behauptet wurde, daß der Druck N′ die Resultirende ist aus dem statischen Drucke N,

oder $R\cos\vartheta$ und der nach der Flächennormalen gerichteten Componenten des dynamischen Druckes $N = m\frac{v^2}{\varrho}$.

Mit diesem Werthe folgt denn auch, daß in dem Falle, wo sich der materielle Punkt mit Reibung auf der Fläche bewegt, die Gleichung (101) die Form annimmt:

$$mv^2 - mv_0^2 = 2\int_{s_0}^{s} ds.\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right) - 2\int_{s_0}^{s} ds.f(R\cos\vartheta + m\frac{v^2}{\varrho}\cos\psi') \quad (104.$$

also nahe dieselbe wie bei der Bewegung in einer ebenen Curve.

In dem angeführten §. der Einleitung ist ferner abgeleitet worden, daß wenn P den Krümmungshalbmesser und K die Krümmung des Normalschnittes der Fläche bezeichnet, welcher die Tangente mit der Bahn des Bewegten gemeinschaftlich hat,

$$\frac{\cos\psi'}{\varrho} = \frac{1}{P} \quad \text{oder} \quad \varkappa\cos\psi' = K$$

ist, woraus denn auch

$$\frac{mv^2}{\varrho}\cos\psi' = \frac{mv^2}{P} = mv^2 K$$

und der Schluß folgt, daß der Druck, welchen die feste Fläche während der Bewegung in irgend einem Punkte zu erleiden hat, derselbe ist, als wenn sich der materielle Punkt in demselben Augenblicke in dem durch seinen Ort gezogenen Normalschnitte bewegte, welcher die Richtung seiner Geschwindigkeit zur Tangente hat.

Zerlegen wir ferner die bewegende Kraft R in drei unter sich rechtwinklige Componenten N, T und T' nach der Flächennormale, nach der Tangente an der Bahn des Bewegten, und nach der Tangente des zu dieser senkrechten Normalschnittes. Dazu bezeichnen wir die Winkel, welche die Tangente an der Bahn mit den drei Coordinaten-Achsen bildet, mit l, m, n, die, welche die Flächennormale mit ihnen einschließt, wie vorher, mit λ, μ, ν, und die, welche die dritte Richtung, die zu den beiden vorhergehenden senkrecht ist, bestimmen, mit l', m', n'. Damit ist zuerst

$$T' = X\cos l' + Y\cos m' + Z\cos n' ,$$

und man hat nach §. 21 der Einleitung

$$\cos l' = \pm(\cos m \cos \nu - \cos n \cos \mu)$$
$$\cos m' = \pm(\cos n \cos \lambda - \cos l \cos \nu)$$
$$\cos n' = \pm(\cos l \cos \mu - \cos m \cos \lambda) ,$$

oder mit den bekannten Werthen von $\cos l$, $\cos \lambda$, etc.

$$\cos l' = V\left(\frac{dy}{ds} \cdot \frac{dF}{dz} - \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dF}{dy}\right)$$
$$\cos m' = V\left(\frac{dz}{ds} \cdot \frac{dF}{dx} - \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dF}{dz}\right)$$
$$\cos n' = V\left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{dF}{dy} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dF}{dx}\right)$$

und diese Werthe zeigen, daß der im vorhergehenden §. mit $T_{,}$ bezeichnete Ausdruck mit V multiplicirt unserer Componenten T' gleich wird, daß man also hat:

$$T' = V T_{,} .$$

Auf der andern Seite kann man auch den dynamischen Druck N in zwei rechtwinklige Componenten zerlegen, von denen die eine, schon vorher betrachtete $N \cos \psi'$ nach der Normale zur Fläche, und die andere $N \sin \psi'$ nach der Tangente des zur Bahn des Bewegten senkrechten Normalschnittes gerichtet ist. Man erhält dann für diese letztere mit dem obigen Ausdrucke für $\cos \psi'$ den Werth:

$$N \sin \psi' = N V \varrho \sqrt{\frac{1}{V^2 \varrho^2} - \left\{\frac{dF}{dx} \cdot \frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds} + \frac{dF}{dz} \cdot \frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds}\right\}^2} ,$$

und wenn man innerhalb des Wurzelzeichens für $\frac{1}{V^2}$ und $\frac{1}{\varrho^2}$ die Ausdrücke:

$$\frac{1}{V^2} = \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2$$

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left\{\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}\right\}^2 + \left\{\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds}\right\}^2 + \left\{\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds}\right\}^2$$

einführt, so nimmt die Wurzelgröße die Form an:

$$\left\{\left(\frac{dF}{dy}\cdot\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}-\frac{dF}{dx}\cdot\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2+\left(\frac{dF}{dx}\cdot\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds}-\frac{dF}{dz}\cdot\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\cdot\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds}-\frac{dF}{dy}\cdot\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Behandelt man aber diese wie den Werth von ϱ in §. 30 der Einleitung, d. h. bringt man das Aenderungsgesetz $\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}$ unter die Form:

$$\frac{d.\frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{ds}{ds}}}{ds}=\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d.\frac{ds}{ds}}{ds}$$

und führt den Ausdruck:

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}\quad\text{für}\quad\frac{d.\frac{ds}{ds}}{ds}$$

ein, so daß sich mit Beachtung der Gleichung:

$$\left(\frac{ds}{ds}\right)^2=1=\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2$$

$$\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}=\frac{dy}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\right)+\frac{dz}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}\right)$$

ergibt, und wenn man ähnliche Formen für $\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds}$ und $\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds}$ ableitet, so gelangt man nach mehrfachen Umwandlungen zu einem rationalen Ausdrucke für $N \sin\psi'$, welcher sich indessen viel leichter auf folgendem Wege ergibt.

Der Winkel $\frac{1}{2}\pi-\psi'$, welchen die Hauptnormale MN, Fig. 89, der Bahn des Bewegten mit der Tangente MT' des zu ihr senkrechten Normalschnittes bildet, ist dem Winkel gleich, welcher von der Normalen MS zur Krümmungsebene der Bahn mit der Flächennormalen MN' eingeschlossen wird, und für diesen Winkel wurde schon in §. 39 der Einleitung der Ausdruck des Cosinus abgeleitet, nämlich

$$\sin\psi'=\cos\lambda\cos\lambda_{,}+\cos\mu\cos\mu_{,}+\cos\nu\cos\nu_{,}\,,$$

deren Wirkung sie vermindert, zusammen, und man hat daher immer noch $T' = 0$, also auch $\psi' = 0$, wodurch die Krümmungscurve bedingt wird. Wenn $R = 0$ ist, so findet man für die Bewegung in dieser Curve dieselben Gleichungen wieder, wie in §. 98 für die Bewegung in einer festen Curve.

§. 110.

Das im vorhergehenden §. erhaltene Ergebniß, wonach der Bewegte einen größten oder kleinsten Weg auf der gegebenen Fläche einschlägt, um von einem Punkte desselben zu einem andern zu gelangen, wenn die bewegende Kraft überall normal zur Fläche gerichtet oder Null ist, bildet in einer besondern Beziehung betrachtet, einen besondern Fall eines allgemeinen Gesetzes der Bewegung eines materiellen Punktes, dessen Bahn nicht unabänderlich vorgeschrieben ist, also sowohl für die freie Bewegung, wie für die Bewegung auf einer festen Fläche.

Sind nämlich die Kräfte, welche an dem Bewegten angreifen, von der Art, daß man hat:

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = \frac{d.f(x,y,z)}{ds},$$

daß also sowohl für die Bewegung auf einer gegebenen Fläche, wie für die freie Bewegung die Gleichung:

$$mv^2 - mv_0^2 = 2f(x,y,z) - 2f(x_0,y_0,z_0)$$

besteht, so besitzt die Curve, welche er beschreibt, die bemerkenswerthe Eigenschaft, daß der Werth des Integrals $\int dx.v\frac{ds}{dx}$, in welchem s und v, da sie nach der vorstehenden Gleichung Functionen der drei veränderlichen Coordinaten sind, mittels der Gleichungen der Bahn des Bewegten in Function von x allein ausgedrückt angenommen werden können, zwischen zwei Punkten A und B dieser Curve genommen, ein kleinster oder größter ist unter denen für die andern Curven, welche man entweder überhaupt durch die beiden Punkte A und B legen kann, wenn der Bewegte ganz frei ist, oder welche, wenn er sich auf einer gegebenen Fläche bewegen muß, auf dieser durch die genannten Punkte gezogen werden können.

Um dies nachzuweisen, muß gezeigt werden, daß das Integral $\int_{a_0}^{a} dx.v\frac{ds}{dx}$ zwischen den Grenzen a und a_0 von x genommen, für

die beschriebene Curve einen größten oder kleinsten Werth erhält, daß also

$$\frac{\delta . \int_{a_0}^{a} dx . v \frac{ds}{dx}}{\delta k} = 0 \qquad (107.$$

ist, wenn k einen von einer Curve zu andern stetig sich ändernden, für jede einzelne Curve aber unveränderlichen Parameter bezeichnet.

Nach §. 43 der Einleitung ist nun zuerst

$$\frac{\delta . \int_{a_0}^{a} dx . v \frac{ds}{dx}}{\delta k} = \int_{a_0}^{a} dx . \frac{\delta . v \frac{ds}{dx}}{\delta k} ;$$

sodann hat man die Beziehung (§. 59):

$$v = u_x \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds} + u_z \frac{dz}{ds} ,$$

aus welcher man leicht den Ausdruck:

$$v \frac{ds}{dx} = u_x + u_y \frac{dy}{dx} + u_z \frac{dz}{dx}$$

und dann das Uebergangsgesetz:

$$\frac{\delta . v \frac{ds}{dx}}{\delta k} = \frac{\delta u_x}{\delta k} + \frac{dy}{dx} . \frac{\delta u_y}{\delta k} + \frac{dz}{dx} . \frac{\delta u_z}{\delta k}$$
$$+ u_x \frac{\delta . \frac{dx}{dx}}{\delta k} + u_y \frac{\delta . \frac{dy}{dx}}{\delta k} + u_z \frac{\delta . \frac{dz}{dx}}{\delta k} ,$$

zieht, worin der Symmetrie wegen das Glied

$$u_x \frac{\delta . \frac{dx}{dx}}{\delta k} = 0$$

eingeschaltet ist. Man hat aber auch

$$\frac{\delta u_x}{\delta k} = \frac{du_x}{dx} . \frac{\delta x}{\delta k} , \quad \frac{\delta u_y}{\delta k} = \frac{du_y}{dy} . \frac{\delta y}{\delta k} , \quad \frac{\delta u_z}{\delta k} = \frac{du_z}{dz} . \frac{\delta z}{\delta k}$$

und damit wird

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{\delta u_y}{\delta k}=\frac{du_y}{dx}\cdot\frac{\delta y}{\delta k}\quad,\quad \frac{dz}{dx}\cdot\frac{\delta u_z}{\delta k}=\frac{du_z}{dx}\cdot\frac{\delta z}{\delta k}.$$

Führt man nun diese Werthe in die erste Zeile des vorhergehenden Uebergangsgesetzes ein, und wechselt in der zweiten Zeile die Ordnung der durch die Zeichen δ und d angedeuteten Uebergänge, so folgt:

$$\frac{\delta . v\frac{ds}{dx}}{\delta k}=\frac{\delta x}{\delta k}\cdot\frac{du_x}{dx}+\frac{\delta y}{\delta k}\cdot\frac{du_y}{dx}+\frac{\delta z}{\delta k}\cdot\frac{du_z}{dx}$$
$$+u_x\frac{d.\frac{\delta x}{\delta k}}{dx}+u_y\frac{d.\frac{\delta y}{\delta k}}{dx}+u_z\frac{d.\frac{\delta z}{\delta k}}{dx}$$

und die zweite Seite bildet nun, wie aus der Vergleichung der übereinanderstehenden Glieder leicht zu ersehen ist, ein vollständiges Aenderungsgesetz; es ist nämlich:

$$\frac{\delta . v\frac{ds}{dx}}{\delta k}=\frac{d.\left(u_x\frac{\delta x}{\delta k}+u_y\frac{\delta y}{\delta k}+u_z\frac{\delta z}{\delta k}\right)}{dx},$$

und wenn man integrirt, folgt demnach

$$\int_{a_0}^{a} dx.\frac{\delta . v\frac{ds}{dx}}{\delta k}=\overset{a}{\underset{a_0}{\Delta_x}}\cdot\left(u_x\frac{\delta x}{\delta k}+u_y\frac{\delta y}{\delta k}+u_z\frac{\delta z}{\delta k}\right).$$

An den beiden Grenzen A und B sind aber die Uebergangsgesetze $\frac{\delta x}{\delta k}$, $\frac{\delta y}{\delta k}$, $\frac{\delta z}{\delta k}$ gleich Null, da alle Curven durch diese Punkte gezogen vorausgesetzt werden; es ist also auch die vorstehende Differenz oder der Werth des Integrals zwischen diesen Grenzen Null, und damit bewiesen, daß für die von dem Bewegten beschriebene Curve der Werth des Integrals $\int_{a_0}^{a} dx.v\frac{ds}{dx}$ ein größter oder kleinster ist.

Dieser Satz, welcher gewöhnlich: Princip der kleinsten Wirkung genannt wird, läßt sich am leichtesten für die besondere Voraussetzung, die dem vorhergehenden §. zu Grunde gelegen ist, anwenden und verständlich machen, da man hier seine Bedeutung in Worte kleiden kann. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich die Geschwindigkeit unveränderlich; es wird demnach

$$\int_{a_0}^{a} dx \, . \, v \frac{ds}{dx} = v_0 \int_{a_0}^{a} dx \, . \, \frac{ds}{dx} = v_0 l \, ,$$

indem man die Länge des Bogens zwischen den Punkten A und B mit l bezeichnet. Nach dem eben bewiesenen Satze wird also der Bewegte eine solche Bahn beschreiben, daß diese Bogenlänge eine kleinste oder größte ist unter den Linien, welche durch die beiden Punkte A und B gehen und dem Bewegten zu beschreiben gestattet sind. Ist er daher ganz frei, so wird diese Bedingung nur durch die gerade Linie erfüllt werden, welche die genannten Punkte verbindet, und es ist dann kein größter Werth denkbar; muß er dagegen auf einer Fläche bleiben, so wird er der durch die Punkte A und B gehenden Krümmungscurve folgen, und es ist in diesem Falle auch ein größter Werth möglich. Nehmen wir z. B. die Kugelfläche als gegeben an, so wird der Bewegte, wie schon bemerkt, einen größten Kreis ACBD, Fig. 90, auf derselben beschreiben, und man sieht hier, daß wenn seine Geschwindigkeit im Anfang von A gegen D gerichtet ist, der Bogen AB der kleinste, wenn sie aber gegen C gerichtet ist, der größte unter allen Kreisbogen sein wird, die auf der Kugel von A nach B gezogen werden können, und ähnliche Fälle werden auf jeder Fläche vorkommen, auf welcher es eine größte geschlossene Linie gibt.

§. 111.

Das Princip der kleinsten Wirkung, dessen Beweis in dem vorhergehenden §. ganz unabhängig von den Gesetzen der Bewegung gegeben wurde, kann dazu dienen, sowohl im Allgemeinen, als in besondern Fällen mit Hülfe des Lehrsatzes (71) für die lebendige Kraft die Gleichungen der Bahn des Bewegten abzuleiten, und obwohl diese Ableitung selten einfacher sein dürfte, als das bisher angewendete Verfahren, so müssen wir doch die Art und Weise dieser Anwendung näher andeuten.

Wenn der Bewegte ganz frei ist, so sind die Variationsgesetze $\frac{\delta y}{\delta k}$, $\frac{\delta z}{\delta k}$, worin y und z noch unbestimmte Functionen von x sind, ganz unabhängig von einander; entwickelt man also das Uebergangsgesetz von $\int dx \, . \, v \frac{ds}{dx}$ für irgend einen Werth von x, so muß der Coefficient einer jeden der beiden Variationen $\frac{\delta y}{\delta k}$ und $\frac{\delta z}{\delta k}$ für sich

Null werden, und man erhält dadurch die beiden nothwendigen Gleichungen zwischen y, z und x für die Bahn des Bewegten.

Setzt man dazu allgemein

$$\Delta . mv^2 = 2\int dx\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right) = \Delta f(x, y, z)$$

und beachtet, daß man für ein bestimmtes x einmal

$$\begin{aligned}\frac{\delta v}{\delta k} &= \frac{dv}{dy}\cdot\frac{\delta y}{\delta k} + \frac{dv}{dz}\cdot\frac{\delta z}{\delta k} \\ &= \frac{1}{mv}\cdot\frac{d.f(x,y,z)}{dy}\cdot\frac{\delta y}{\delta k} + \frac{1}{mv}\cdot\frac{d.f(x,y,z)}{dz}\cdot\frac{\delta z}{\delta k} \\ &= \frac{Y}{mv}\cdot\frac{\delta y}{\delta k} + \frac{Z}{mv}\cdot\frac{\delta z}{\delta k};\end{aligned}$$

hat, und dann wie in §. 45 der Einleitung

$$\begin{aligned}\frac{\delta.\frac{ds}{dx}}{\delta k} &= \frac{\delta.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\delta k} = \frac{dy}{ds}\cdot\frac{\delta.\frac{dy}{dx}}{\delta k} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{\delta.\frac{dz}{dx}}{\delta k}, \\ &= \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d.\frac{\delta y}{\delta k}}{dx} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{d.\frac{\delta z}{\delta k}}{dx},\end{aligned}$$

so findet man nach und nach:

$$\begin{aligned}\frac{\delta.\int_{x_0}^{x} dx.v\frac{ds}{dx}}{\delta k} &= \int_{x_0}^{x} dx.\frac{\delta.v\frac{ds}{dx}}{\delta k} = \int_{x_0}^{x} dx.\left\{\frac{ds}{dx}\cdot\frac{\delta v}{\delta k} + v\frac{\delta.\frac{ds}{dx}}{dk}\right\} \\ &= \int_{x_0}^{x} dx.\left\{\frac{Y}{mv}\cdot\frac{ds}{dx}\cdot\frac{\delta y}{\delta k} + \frac{Z}{mv}\cdot\frac{ds}{dx}\cdot\frac{\delta z}{\delta k}\right\} \\ &+ \int_{x_0}^{x} dx.\left\{v\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d.\frac{\delta y}{\delta k}}{dx} + v\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d.\frac{\delta z}{\delta k}}{dx}\right\}.\end{aligned}$$

Integrirt man dann das letzte Glied theilweise in Bezug auf die Variationen $\frac{\delta y}{\delta k}$ und $\frac{\delta z}{\delta k}$, und beachtet, daß diese Uebergangsgesetz

an beiden Grenzen x_0 und x für x Null werden müssen, so nimmt der vorhergehende Ausdruck die Form an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta.\int_{x_0}^{x} dx.v\frac{ds}{dx}}{\delta k} &= \int_{x_0}^{x} dx.\left\{\frac{Y}{mv}.\frac{ds}{dx} - \frac{d.v\frac{dy}{ds}}{dx}\right\}\frac{\delta y}{\delta k} \\ &+ \int_{x_0}^{x} dx.\left\{\frac{Z}{mv}.\frac{ds}{dx} - \frac{d.v\frac{dz}{ds}}{dx}\right\}\frac{\delta z}{\delta k}, \end{aligned}\right\} \quad (J.$$

und die Bedingung, daß dieser Ausdruck Null werden soll, führt nach der vorhergehenden Bemerkung in Betreff der Unabhängigkeit der Uebergangsgesetze, auf die beiden Gleichungen:

$$\frac{Y}{mv}.\frac{ds}{dx} = \frac{d.v\frac{dy}{ds}}{dx}, \quad \frac{Z}{mv}.\frac{ds}{dx} = \frac{d.v\frac{dz}{ds}}{dx},$$

oder

$$\left.\begin{aligned} Y &= mv\frac{d.v\frac{dy}{ds}}{ds} \\ Z &= mv\frac{d.v\frac{dz}{ds}}{dx} \end{aligned}\right\}, \quad (108.$$

welche die Gleichungen der Bahn des Bewegten vorstellen, wenn man die Größen Y, Z und v als Functionen von x, y, z einführt. Diese Werthe kann man dann auch unter die Form bringen:

$$Y = mv^2\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds} + \frac{dy}{ds}.\frac{\frac{1}{2}d.mv^2}{ds},$$

$$Z = mv^2\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds} + \frac{dz}{ds}.\frac{\frac{1}{2}d.mv^2}{ds},$$

und aus ihnen $\frac{d.mv^2}{ds}$ eliminiren. Man kann aber auch vorher noch einen ähnlichen Werth für X mittels der Gleichung:

$$\frac{d.mv^2}{ds} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}$$

ableiten, indem man die beiden vorhergehenden, die erste mit $2\frac{dy}{ds}$, die zweite mit $2\frac{dz}{ds}$ multiplicirt und die Summe dieser Producte von der letzten Gleichung abzieht; dieses Verfahren gibt mit der Beachtung der Bedingungsgleichungen:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 ,$$

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds} = 0 ,$$

für X den Werth:

$$X = mv^2\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{dx}{ds}\cdot\frac{\frac{1}{2}d.mv^2}{ds} = mv\frac{d.v\frac{dx}{ds}}{ds}\ ^{*)} .$$

Die nach den gewöhnlichen Regeln ausgeführte Elimination von $\frac{d.mv^2}{ds}$ aus diesen drei Werthen von X, Y, Z gibt wieder zwei neue Gleichungen für die Bahn des Bewegten, nämlich

$$\left\{\begin{aligned} Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds} &= mv^2\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}\right) \\ Z\frac{dx}{ds} - X\frac{dz}{ds} &= mv^2\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}\right) \end{aligned}\right.$$

worin nun s als unabhängige Veränderliche auftritt; die Integration dieser Gleichungen, für welche X, Y, Z und v als Functionen von x, y, z eingeführt werden müssen, und welche sich viel einfacher aus den Gleichungen (68) ableiten lassen, wird indessen immer unübersteigliche Schwierigkeiten darbieten.

---

*) Man wird leicht sehen, daß die Gleichungen (108), denen der zuletzt angeführte Werth von X entspricht, auf die Gleichungen (68) zurückkommen, wenn man für $v\frac{dx}{ds}$, $v\frac{dy}{ds}$, $v\frac{dz}{ds}$ die frühere Bezeichnung: u_x, u_y, u_z einführt, v durch $\frac{ds}{dt}$ ersetzt, und t als unabhängige Veränderliche nimmt.

Multiplicirt man noch die vorhergehenden Werthe von X, Y, Z in dieser Ordnung mit:

$$\cos\lambda = \varrho \frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}\,, \qquad \cos\mu = \varrho \frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds}\,, \qquad \cos\nu = \varrho \frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds}\,,$$

so gibt ihre Summe:

$$X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu = N = \frac{mv^2}{\varrho}$$

unsere frühere Gleichung (70) wieder.

Wenn nun der Bewegte auf einer gegebenen festen Fläche bleiben muß, deren Gleichung:

$$F(x, y, z) = 0$$

sei, so sind die Uebergangsgesetze $\frac{\delta y}{\delta k}$ und $\frac{\delta z}{\delta k}$ nicht mehr unabhängig von einander, sondern sind der Bedingung unterworfen, daß der neue Punkt, auf welchen sie überleiten, noch der gegebenen Fläche angehört; sie stehen demnach durch die Bedingungsgleichung:

$$\frac{dF}{dy}\cdot\frac{\delta y}{\delta k} + \frac{dF}{dz}\cdot\frac{\delta z}{\delta k} = 0$$

unter sich in Verbindung. Zieht man daraus den Werth von $\frac{\delta y}{\delta k}$ und führt ihn in den Ausdruck (J) ein, so enthält dieser nur noch die einzige Willkürliche $\frac{\delta z}{\delta k}$, und die Bedingung, daß derselbe Null wird, gibt die Gleichung:

$$Y\frac{dF}{dz} - Z\frac{dF}{dy} = mv\left\{\frac{dF}{dz}\cdot\frac{d.v\frac{dy}{ds}}{ds} - \frac{dF}{dy}\cdot\frac{d.v\frac{dz}{ds}}{ds}\right\},$$

welche offenbar auch dadurch erhalten wird, daß man in die obigen Werthe von Y und Z für die freie Bewegung wieder $Y - N'\cos\mu$, und $Z - N'\cos\nu$ einführt, dann die erste mit $\frac{dF}{dz}V = \cos\nu$, die zweite mit $\frac{dF}{dy}V = \cos\mu$ multiplicirt, und ihre Differenz nimmt, wodurch N′ herausfällt. Entwickelt man, so ergibt sich die Gleichung:

$$Y\frac{dF}{dz}-Z\frac{dF}{dy}=mv^2\left\{\frac{dF}{dz}\cdot\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds}-\frac{dF}{dy}\cdot\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds}\right\}$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{d.mv^2}{ds}\left(\frac{dF}{dz}\cdot\frac{dy}{ds}-\frac{dF}{dy}\cdot\frac{dz}{ds}\right),$$

welche mit der dritten der Gleichungen (c) in §. 108 übereinkommt.

Man wird leicht einsehen, daß man wieder mittels der Gleichung:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d.mv^2}{ds}=X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}$$

und der vorhergehenden zwischen Y und Z ähnliche den Gleichungen (c) entsprechende zwischen X und Y und zwischen X und Z ableiten kann, und wenn man dann aus diesen neuen Gleichungen oder aus einer derselben und der vorhergehenden zwischen Y und Z das Aenderungsgesetz $\frac{d.mv^2}{ds}$ eliminirt, so findet man die Gleichung (105) wieder.

§. 112.

Um nun einige Anwendungen der für die Bewegung auf einer festen Fläche gefundenen analytischen Beziehungen zu geben, werde zuerst die Bewegung eines schweren Punktes auf einer beliebig gegen die Richtung der Schwere geneigten Ebene untersucht.

Das Coordinatensystem werden wir dazu wieder so annehmen, daß die Achse der z zur Richtung der Schwere parallel ist; ihre positive Hälfte soll nach Unten gerichtet, und die Lage der Achse der x noch eine beliebige sein, so daß die Lage unserer Ebene noch allgemein durch die drei Winkel λ, μ, ν bestimmt wird, welche ihre Normale mit den drei Coordinatenachsen einschließt, und ihre Gleichung (Einl. §. 18) die Form:

$$x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu=0$$

erhält, welche voraussetzt, daß der Anfang der Coordinaten in der Ebene selbst liegt. Es wird auch der Allgemeinheit der Untersuchung keinen Eintrag thun, wenn wir für diesen Punkt denjenigen annehmen, in welchem sich der Bewegte am Anfang der Zeit t befindet und die Geschwindigkeit v_0 besitzt, deren Richtung gegen die Coordinatenachsen durch die Winkel α, β, γ bestimmt sei.

Nehmen wir nun von jedem Widerstande Umgang, so haben wir einmal für die Componenten der bewegenden Kraft die Werthe:

$$X=0\quad,\qquad Y=0\quad,\qquad Z=p=mg\;;$$

die Gleichung der Ebene gibt ferner

$$\frac{dF}{dx} = \cos\lambda \quad , \quad \frac{dF}{dy} = \cos\mu \quad , \quad \frac{dF}{dz} = \cos\nu$$

und damit nehmen die Gleichungen (100) die Form an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}\cos\mu - \frac{d^2y}{dt^2}\cos\lambda &= 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2}\cos\lambda - \frac{d^2x}{dt^2}\cos\nu &= g\cos\lambda \end{aligned}\right\} , \qquad (a.$$

unter welcher sie unmittelbar integrirt werden können. — Die erste Integration gibt die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}\cos\mu - \frac{dy}{dt}\cos\lambda &= v_0(\cos\alpha\cos\mu - \cos\beta\cos\lambda) \\ \frac{dz}{dt}\cos\lambda - \frac{dx}{dt}\cos\nu &= v_0(\cos\gamma\cos\lambda - \cos\alpha\cos\nu) + gt\cos\lambda , \end{aligned}\right\} (b.$$

und die zweite Integration führt auf die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} x\cos\mu - y\cos\lambda &= v_0 t(\cos\alpha\cos\mu - \cos\beta\cos\lambda) \\ z\cos\lambda - x\cos\nu &= v_0 t(\cos\gamma\cos\lambda - \cos\alpha\cos\nu) + \frac{1}{2}gt^2\cos\lambda . \end{aligned}\right\} (c.$$

Eliminirt man nun aus diesen letzten Gleichungen die Zeit t, und beachtet, daß die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit jedenfalls in der gegebenen Ebene liegt, also zur Normale derselben senkrecht ist, daß man also einmal die Bedingung:

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0$$

hat, und daß ferner die Cosinus der Winkel l, m, n, welche die zur Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit senkrechte Gerade mit den drei Achsen einschließt, nach §. 21 der Einl. durch die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \cos l &= \cos\beta\cos\nu - \cos\gamma\cos\mu \\ \cos m &= \cos\gamma\cos\lambda - \cos\alpha\cos\nu \\ \cos n &= \cos\alpha\cos\mu - \cos\beta\cos\lambda \end{aligned}$$

bestimmt werden, so findet man zwischen den drei Veränderlichen x, y. z die Beziehung:

$$(x\cos\mu - y\cos\lambda)^2 - \frac{2v_0^2}{g}\cos n\,(x\cos l + y\cos m + z\cos n) = 0 , \quad (d.$$

welche die Gleichung einer Fläche (eines zur Ebene der xy schiefen parabolischen Cylinders) vorstellt, deren Durchschnitt mit der gegebenen Ebene die Bahn des Bewegten sein wird. Eliminirt man daher aus dieser Gleichung mittels der Gleichung der Ebene die Veränderliche z, so erhält man die Gleichung der Projection jener Bahn in der Ebene der xy oder die Gleichung der zu dieser Ebene senkrechten Cylinderfläche, welche die gegebene Ebene längs der Bahn des Bewegten durchschneidet. Mit Beachtung der vorausgehenden Beziehungen findet man dafür die Gleichung:

$$\text{e.)}\quad (x\cos\mu - y\cos\lambda)^2 = \frac{2v_0^2}{g\cos\nu}\cos n\,(x\cos\beta - y\cos\alpha)\ ,$$

welche offenbar einer Parabel oder einem parabolischen Cylinder angehört, und aus welcher zu schließen ist, daß auch die Bahn selbst in der gegebenen Ebene eine Parabel sein muß.

Diese Gleichungen nehmen übrigens eine einfachere Form an, wenn man die Ebene der xz durch die Normale zu der gegebenen Ebene legt, was die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt; man hat dann $\cos\mu = 0$, $\cos\lambda = \sin\nu$, also $\cos n = -\cos\beta\cos\lambda = -\cos\beta\sin\nu$ und damit folgen die Gleichungen:

$$\text{f.)}\quad \left\{\begin{array}{l} x\sin\nu + z\cos\nu = 0 \\ gy^2\sin\nu\cos\nu = 2v_0^2\cos\beta\,(y\cos\alpha - x\cos\beta) \end{array}\right.$$

für die Bahn des Bewegten. Die Achse der Parabel in der Ebene der xy ist demnach immer parallel zur Projection der Normalen der gegebenen Ebene, und ihre Entfernung b von dieser Projection oder von der Achse der x wird bestimmt durch die Gleichung:

$$y = b = \frac{v_0^2\cos\beta\cos\alpha}{g\sin\nu\cos\nu}\ ;$$

für die Entfernung a des Scheitels derselben von der Achse der y hat man daher den Ausdruck:

$$x = a = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{2g\sin\nu\cos\nu} = \frac{1}{2}b\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{1}{2}b\cot\varepsilon\ ,$$

worin dann ε den Winkel zwischen der Projection der anfänglichen Geschwindigkeit und der Achse der x bezeichnet, wie dies nothwendig auch aus der bekannten Eigenschaft der Subtangente der Parabel folgt, da die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit offenbar eine Tangente an der Bahn des Bewegten bildet.

Für $\beta = 0$, d. h. wenn die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit senkrecht ist zur Richtung der Schwere, hat man einfacher

$$y^2 = -\frac{2v_0^2}{g \sin\nu \cos\nu} x = \frac{2v_0^2}{g \sin^2\nu} z ; \qquad (g.$$

für $\beta = \frac{1}{2}\pi$, $\alpha = \nu$ ergibt sich dagegen

$$y = 0 ,$$

wie in dem Falle, wo $v_0 = 0$ ist; die Bewegung wird dann eine geradlinige, und ihre Richtung fällt mit der Projection der Richtung der Schwere auf die gegebene Ebene, d. i. mit der Richtung der größten Neigung oder mit der Wasserlinie zusammen.

Was endlich die Geschwindigkeit und Dauer der Bewegung für irgend eine Lage des Bewegten betrifft, so gibt die Gleichung (101) sogleich das bekannte

$$v^2 = v_0^2 + 2gz \qquad (h.$$

wieder, und aus der ersten unserer Gleichungen (b) zieht man unter der Voraussetzung: $\cos\mu = 0$ den einfacheren Werth:

$$y = v_0 \cos\beta . t ,$$

welcher in die zweite der Gleichungen (f) eingeführt, die Zeit t als Function von x, und mittels der ersten in Function von z gibt, und umgekehrt diese in Function von t; man findet nämlich so die Beziehungen:

$$g \sin\nu . t^2 - 2v_0 \frac{\cos\alpha}{\cos\nu} t = -\frac{2x}{\cos\nu} = \frac{2z}{\sin\nu} , \qquad (i.$$

mit welchen unsere Aufgabe vollständig gelöset ist.

§. 113.

Als zweites Beispiel für die Bewegung auf einer festen Fläche wollen wir die Bewegung eines schweren materiellen Punktes auf einer Kugelfläche betrachten.

Der Mittelpunkt dieser Fläche werde als Anfang der Coordinaten genommen, so daß ihre Gleichung die Form:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

erhält, und die Aenderungsgesetze:

$$\frac{dF}{dx} = x \quad , \quad \frac{dF}{dy} = y \quad , \quad \frac{dF}{dx} = z$$

gibt. Nehmen wir dann wieder die Achse der z parallel zur Richtung der Schwere und die positive Hälfte derselben im Sinne dieser letztern oder abwärts gerichtet an, so sind wie früher die drei Componenten der bewegenden Kraft $p = mg$, welche das Gewicht des Bewegten ausdrückt,

$$X = 0 \quad , \quad Y = 0 \quad , \quad Z = p = mg \; ,$$

und die Gleichung (101) gibt nun

a.) $$v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0) \; ,$$

wo v_0 seine anfängliche Geschwindigkeit und z_0 seine anfängliche Entfernung von der Ebene der xy bezeichnet. Die Geschwindigkeit des Bewegten ist demnach immer dieselbe, sobald er wieder in dieselbe zur Ebene der xy parallele Kreisebene eintritt.

Die erste der Gleichungen (100) wird

$$m\left(y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0$$

und zeigt, daß für die Bewegung der Projection des Bewegten in der Ebene der xy, oder daß für seine horizontale Bewegung das Princip der Flächen gilt. Bezeichnet man also den Winkel zwischen der die Kugelfläche berührenden Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit und der Achse der y mit β_0, und legt die Ebene der xz durch den anfänglichen Ort des Bewegten, so wird $v_0 \cos\beta_0$ die zu dieser Ebene senkrechte Componente der anfänglichen Geschwindigkeit sein, und das allgemeine Integral der obigen Gleichung nach §. 73 die Form annehmen:

b.) $$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\omega}{dt} = r_0 v_0 \cos\beta_0 \; ,$$

worin $r^2 = a^2 - z^2$ die wagrechte Projection des zu dem Bewegten gezogenen Halbmessers a am Ende der Zeit t, und $r_0 = \sqrt{a^2 - z_0^2}$ dieselbe Projection am Anfange der Zeit vorstellt, und ω wie immer der Winkel ist, welchen der Fahrstrahl r mit der positiven Achse der x bildet, und der für die Bewegung von dieser Achse gegen die positive Achse der y positiv genommen wird. Dabei ist es einleuchtend, daß der Werth von z_0 in Verbindung mit dem gegebenen Halbmesser a hin-

reicht, die anfängliche Lage des Bewegten festzustellen. Ebenso genügt der einzige Winkel β_0, von 0 bis 2π genommen, um die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit zu bestimmen; denn die durch den anfänglichen Ort des Bewegten an die Kugelfläche gelegte Tangentialebene, welche jene Richtung enthält, steht auf der Ebene der xz senkrecht, und ihr Riß in dieser Ebene bildet mit der Achse der z einen Winkel δ, für welchen man

$$\cos\delta = -\frac{z_0}{a}$$

hat, und die Winkel α_0, γ_0, welche die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit gegen die Achsen der x und der z bestimmen, werden darnach durch:

$$\cos\alpha_0 = \sin\beta_0 \cos\delta \quad , \qquad \cos\gamma_0 = \sin\beta_0 \sin\delta$$

ausgedrückt.

Bringen wir nun die erste Abgeleitete der Gleichung der Kugelfläche unter die Form:

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = -z\frac{dz}{dt} ,$$

und addiren ihr Quadrat:

$$\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)^2 = z^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

zu dem der Gleichung (b), so folgt

$$(x^2 + y^2)\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = C^2 + z^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 ,$$

worin C^2 zur Abkürzung für $r_0^2 v_0^2 \cos^2\beta_0$ steht. Die Gleichung (a) gibt ferner, wenn $v_0^2 - 2gz_0 = k^2$ gesetzt wird,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = k^2 + 2gz - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 ,$$

und aus der Gleichung der Kugelfläche zieht man

$$x^2 + y^2 = a^2 - z^2 ;$$

werden diese Werthe also in den vorhergehenden Ausdruck eingeführt, so wird derselbe:

$$(a^2 - z^2)\left[k^2 + 2gz - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = C^2 + z^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 , \quad \text{(c.}$$

und gibt für die vertikale Componente der Geschwindigkeit den Werth:

$$\frac{dz}{dt} = \pm \frac{1}{a} \sqrt{(a^2 - z^2)(k^2 + 2gz) - C^2} \,,$$

woraus für die Zeit das allgemeine Integral folgt:

$$\text{d.)} \qquad t = \pm a \int_{z_0}^{z} dz \,.\, \frac{1}{\sqrt{(a^2 - z^2)(k^2 + 2gz) - C^2}} \,.$$

Dieser Ausdruck nimmt nach ausgeführter Integration die Form $t = F(z)$ an, und gibt in Bezug auf z aufgelöset, die Ordinate z in Function der Zeit t, also die Lage des Parallelkreises, in welchem sich der Bewegte am Ende der Zeit t befindet, wenn der in der Ebene der xy liegende größte Kreis als Aequator angenommen wird. Wird endlich der vorhergehende Werth von $\frac{dz}{dt}$ durch die Gleichung (b) unter der Form:

$$(a^2 - z^2) \frac{d\omega}{dt} = C$$

dividirt, so erhält man das neue Aenderungsgesetz:

$$\frac{dz}{d\omega} = \pm \frac{a^2 - z^2}{aC} \sqrt{(a^2 - z^2)(k^2 + 2gz) - C^2}$$

und daraus durch das allgemeine Integral:

$$\text{e.)} \quad \omega = \pm aC \int_{z_0}^{z} dz \,.\, \frac{1}{(a^2 - z^2)\sqrt{(a^2 - z^2)(k^2 + 2gz) - C^2}}$$

den Werth von ω in Function von z, und durch dieses mittels des Vorhergehenden in Function von t. Dadurch ist denn auch die Lage einer lothrechten Ebene bestimmt, welche den materiellen Punkt enthält, und folglich der Ort desselben am Ende der Zeit t vollständig bekannt.

Die Auflösung der Aufgabe ist also von der Ausführung der beiden allgemeinen Integralien (d) und (e) abhängig, welche indessen bis jetzt nur auf dem Wege der Annäherung stattfinden kann.

Wenn die anfängliche Geschwindigkeit Null, oder $\beta_0 = \frac{1}{2}\pi$ ist, so wird $C = 0$, also auch $\omega = 0$, und die Bewegung erfolgt in dem durch die Ebene der xz gebildeten größten Kreise der Kugelfläche, eine Bewegung, die wir schon früher untersucht haben.

Der Druck N', welchen die Kugelfläche zu erleiden hat, wird sehr leicht durch die Gleichung (103) und mittels der darauf folgenden Bemerkung gefunden; denn man hat offenbar

$$\cos\vartheta = \frac{z}{a} \quad , \quad \frac{1}{\varrho}\cos\psi = \frac{1}{P} = \frac{1}{a}$$

und damit wird

$$N' = mg\frac{z}{a} + m\frac{v^2}{a} = mg\left(\frac{3z}{a} + \frac{k^2}{ag}\right) .$$

So lange also z positiv, oder der Bewegte auf der untern Halbkugel ist, bleibt die Richtung des Druckes vom Mittelpunkte abgewendet, und der materielle Punkt muß sich auf der hohlen Seite der Fläche bewegen; ist dagegen z negativ und $k^2 < 3gz$ geworden, so wird sich die Richtung des Druckes dem Mittelpunkte zuwenden, und der Bewegte wird dann nur auf der gewölbten Seite der Kugelfläche bleiben können.

§. 114.

Die Bewegung in einer Kugelfläche kann auch dadurch hervorgerufen werden, daß man den zu bewegenden materiellen Punkt durch einen unausdehnbaren Faden ohne Gewicht mit einem festen Punkte verbindet, ihn aus seiner lothrechten Gleichgewichtslage entfernt, und ihm dann eine Geschwindigkeit ertheilt, deren Richtung nicht in die durch den Faden gelegte Vertikal-Ebene fällt. Man erhält auf diese Weise die allgemeinste Bewegung des einfachen Pendels, und wenn man die Winkel, welche dasselbe mit der Lothlinie bildet, immer nur sehr klein voraussetzt, so können die Integrale des vorhergehenden §. in endlichen Ausdrücken dargestellt werden.

Nehmen wir daher, um diese Betrachtung möglichst einfach zu machen, eine solche Lage des Bewegten als die anfängliche, wo seine Geschwindigkeit eine wagrechte Richtung hat, und ersetzen wieder den Halbmesser a durch die Länge l des Pendels, so wird $\beta_0 = 0$, und $C = r_0 v_0 = v_0\sqrt{l^2 - z_0{}^2}$. Bezeichnen wir ferner wieder die Ausweichung des Pendels aus der Gleichgewichtslage am Ende der Zeit t mit ϑ, seine anfängliche mit α, so erhält man mit Vernachlässigung der höhern Potenzen von α und ϑ, als die zweite,

$$z = l\cos\vartheta = l\left(1 - \frac{1}{2}\vartheta^2\right) \quad , \quad z_0 = l\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right) ,$$

$$k^2 = v_0{}^2 + 2gl - gl\alpha^2 \quad , \quad C^2 = v_0{}^2 l^2 \sin^2\alpha = v_0{}^2 l^2 \alpha^2 ,$$

und der Ausdruck für die Zeit nimmt die Form an:

$$t = \pm \sqrt{\frac{l}{g}} \int_\alpha^\vartheta d\vartheta . \frac{\vartheta}{\sqrt{\vartheta^2\left(\frac{v_0^2}{lg} + \alpha^2 - \vartheta^2\right) - \frac{v_0^2}{lg}\alpha^2}}$$

oder wenn noch $\frac{v_0^2}{lg} = \beta^2$ gesetzt wird,

$$t = \pm \sqrt{\frac{l}{g}} \int_\alpha^\vartheta d\vartheta . \frac{\vartheta}{\sqrt{(\alpha^2 - \vartheta^2)(\vartheta^2 - \beta^2)}} .$$

Hier fällt sogleich in die Augen, daß ϑ immer zwischen den Grenzen α und β eingeschlossen ist, und daß für den Fall, wo $\beta = \alpha$ d. h. $v_0^2 = g l \alpha^2$ wird, wo also die horizontale anfängliche Geschwindigkeit mit derjenigen übereinkömmt, welche der Bewegte durch den Fall längs des Bogens α in der lothrechten Ebene erlangen würde (§. 103), fortwährend $\vartheta = \alpha$ bleiben muß, und der Bewegte einen Parallelkreis beschreibt. Der Ausdruck für die Geschwindigkeit

$$v^2 = v_0^2 + l g (\alpha^2 - \vartheta^2) = v_0^2$$

zeigt dann auch, daß diese für denselben Fall constant, die Bewegung also eine gleichförmige ist.

Um nun den obigen Ausdruck zu integriren, bringt man die Größe unter dem Wurzelzeichen des Nenners unter die Formen:

$$\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}\right)^2 - \left(\vartheta^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2$$

und

$$\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{2\vartheta^2 - \alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}\right)^2\right] ,$$

und setzt dann:

$$\frac{2\vartheta^2 - \alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} = u ;$$

dadurch ergibt sich:

$$\frac{\vartheta}{\frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2)} = \frac{1}{2}\frac{du}{d\vartheta}$$

und

$$t = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_1^u du . \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ arc cos } u ,$$

da die dem Werthe $\vartheta = \alpha$ entsprechende Grenze von u gleich 1, und arc cos 1 = 0 ist. Umgekehrt hat man mit dem obern Zeichen

$$u = \cos 2t\sqrt{\frac{g}{l}}$$

und durch Einführung des obigen Werthes von u wird

$$\vartheta^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}\cos 2t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

oder, wenn für $\cos 2t\sqrt{\frac{g}{l}}$ der Werth: $\cos^2 t\sqrt{\frac{g}{l}} - \sin^2 t\sqrt{\frac{g}{l}}$ gesetzt wird

$$\vartheta^2 = \alpha^2 \cos^2 t\sqrt{\frac{g}{l}} + \beta^2 \sin^2 t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Aus diesem Ausdruck geht hervor, daß die Bewegung in Bezug auf die Achse der z eine wiederkehrende ist; insbesondere hat man für $t = 0$, übereinstimmend mit der Annahme, $\vartheta^2 = \alpha^2$; für $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, $\vartheta^2 = \beta^2$, für $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ wieder $\vartheta^2 = \alpha^2$, für $t = \frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ wieder $\vartheta^2 = \beta^2$, u. s. f. Denkt man sich demnach durch das Pendel eine lothrechte Ebene gelegt, welche sich mit ihm um die Achse der z dreht, so wird sich dasselbe in dieser Ebene zwischen den Lagen CA und Cb, Fig. 91, von denen die erste den Winkel ACO = α, die zweite den Winkel bCO = β mit der Vertikalen CO bildet, auf und abbewegen, und die Dauer einer ganzen Oscillation oder der Bewegung von A nach B und wieder zurück, wird

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

d. h. dieselbe sein, welche ein einfaches Pendel von derselben Länge gebraucht, um in einer vertikalen Ebene schwingend, zu beiden Seiten der Gleichgewichtslage, eine sehr kleine hin- oder hergehende Bewegung zu machen.

Mittels des vorhergehendes Werthes von ϑ^2 kann ferner auch das Gesetz für die drehende Bewegung der Ebene ACO des Pendels durch

die Gleichung (b) in §. 113 ausgedrückt werden. Ersetzt man nämlich in derselben r^2 durch $l^2 \sin^2 \vartheta$ oder $l^2 \vartheta^2$, C^2 durch den obenangegebenen Werth: $\alpha v_0 l$, und $\frac{v_0}{l}$ durch $\beta \sqrt{\frac{g}{l}}$, so gibt sie nach und nach für die Winkelgeschwindigkeit die Werthe:

$$\varphi = \frac{d\omega}{dt} = \frac{C}{r^2} = \frac{v_0}{l} \cdot \frac{\alpha}{\vartheta^2} = \frac{\alpha\beta\sqrt{\frac{g}{l}}}{\vartheta^2},$$

welche zeigen, daß diese Winkelgeschwindigkeit im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Ausweichung steht, und daß sie an einer der beiden Grenzen dieser letztern jedesmal der andern Grenze proportional ist; denn man findet

$$\varphi = \beta\sqrt{\frac{g}{l}}, \text{ wenn } \vartheta = \alpha \quad , \quad \varphi = \alpha\sqrt{\frac{g}{l}}, \text{ wenn } \vartheta = \beta$$

ist. Wird dann in diesem letztern Ausdrucke ϑ^2 durch seinen Werth in Function von t ersetzt, so ergibt sich das Aenderungsgesetz

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha\beta\sqrt{\frac{g}{l}} \frac{1}{\alpha^2 \cos^2 t\sqrt{\frac{g}{l}} + \beta^2 \sin^2 t\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

und daraus in einer andern die Integration vorbereitenden Form:

$$\omega - \omega_0 = \int_0^t dt \, . \, \frac{\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t\sqrt{\frac{g}{l}}}}{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \operatorname{tang}^2 t\sqrt{\frac{g}{l}}};$$

man schließt daraus leicht:

$$\omega = \operatorname{arc\,tang}: \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{tang} t\sqrt{\frac{g}{l}}$$

wenn ω_0 gleich Null angenommen, d. h. der Winkel ω von der anfänglichen Lage des Fahrstrahls r aus gemessen wird. Für den Fall, wo $\beta = \alpha$ ist, folgt aus der vorstehenden Gleichung, welche man auch

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{tang} t \sqrt{\frac{g}{l}}$$

schreiben kann,

$$\omega = t \sqrt{\frac{g}{l}};$$

in diesem Falle ist also, wie wir übrigens schon gesehen haben, die drehende Bewegung eine gleichförmige, und die Zeit 2T für eine Umdrehung wird wieder

$$2T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Ein solches Pendel hat man sonst Centrifugal-Pendel genannt.

In allen übrigen Fällen weicht diese Bewegung der vertikalen Ebene des Pendels um die Achse der z von einer gleichförmigen etwas ab, aber nur sehr wenig, da der Bruch $\frac{\beta}{\alpha}$ dem Werthe: 1 sehr nahe kommt, und man sieht dabei leicht ein, daß in allen Punkten oder Zeitabschnitten, für welche die Function $\operatorname{tang} t \sqrt{\frac{g}{l}}$ durch die Werthe: 0 oder ∞ geht, auch $\operatorname{tang}\omega$ denselben Werth annimmt, daß also für diese wieder $\omega = t \sqrt{\frac{g}{l}}$ ist, und daher jeder Quadrant in derselben Zeit $\frac{1}{2} T = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ zurückgelegt, und in der Zeit $2T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ immer eine ganze Umdrehung gemacht wird. In den dazwischenliegenden Punkten weicht der Werth von ω von dem der Function $t \sqrt{\frac{g}{l}}$ ab; man findet für $t \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{4}\pi$, $\operatorname{tang}\omega = \frac{\beta}{\alpha}$, also kleiner oder größer, als 1, je nachdem β kleiner oder größer als α ist; die drehende Bewegung wird folglich immer in der Nähe der kleinsten Ausweichung die größte Geschwindigkeit haben, wie aus dem Werthe der Winkelgeschwindigkeit oben schon geschlossen wurde. Endlich folgt noch aus dem Vorhergehenden, daß die lothrechte Ebene des Pendels in derselben Zeit einen rechten Winkel durchläuft, in welcher dasselbe in dieser Ebene

den Bogen Ab vor= oder rückwärts zurücklegt, woraus man schließt, daß die Grenzen der Ausweichung immer um einen Quadranten von einander entfernt sind.

Zuletzt kann man noch die Gestalt der Bahn des Bewegten bestimmen, und zwar zuerst deren Projection in der Ebene der xy.

Führt man nämlich in die Gleichung: $r^2 = l^2 \vartheta^2$ den oben erhaltenen Werth von ϑ^2 in Function von t ein, so wird

$$r^2 = l^2 \left(\alpha^2 \cos^2 t \sqrt{\frac{g}{l}} + \beta^2 \sin^2 t \sqrt{\frac{g}{l}} \right) ,$$

und durch Elimination von t mittels des Werthes von ω ergibt sich daraus die Gleichung

$$r^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 l^2}{\alpha^2 \sin^2 \omega + \beta^2 \cos^2 \omega} ,$$

oder in der gewöhnlichen Form

$$r^2 \left(\frac{\sin^2 \omega}{l^2 \beta^2} + \frac{\cos^2 \omega}{l^2 \alpha^2} \right) = 1 .$$

Die genannte Projection ist also eine Ellipse, welche ihren Mittelpunkt im Anfangspunkt hat, und deren Halbachsen durch den größten und kleinsten Abstand $l\alpha$ und $l\beta$ des Bewegten von der Gleichgewichtslage vorgestellt werden.

Mit rechtwinkligen Coordinaten hat man für dieselbe Curve die Gleichung:

$$\frac{y^2}{l^2 \beta^2} + \frac{x^2}{l^2 \alpha^2} = 1 \quad , \quad \alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 = \alpha^2 \beta^2 l^2 ,$$

und wenn man damit aus der Gleichung der Kugelfläche die Veränderliche y eliminirt, so folgt

$$(\alpha^2 - \beta^2) x^2 + \alpha^2 z^2 = \alpha^2 (1 - \beta^2) l^2 \ ;$$

die Projection der Bahn des Bewegten in der Ebene der xz ist mithin ebenfalls eine Ellipse, welche ihren Mittelpunkt im Anfangspunkt hat; ihre halben Achsen sind:

$$l \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}}} \quad \text{und} \quad l \sqrt{1 - \beta^2} \ ;$$

während demnach die lothrechte nur sehr wenig von l verschieden ist, erhält die wagrechte einen um so größern Werth, je näher der Bruch $\frac{\beta}{\alpha}$ der Einheit kommt, so daß die durch den größten Kreis der Kugelfläche begrenzte Projection der Bahn in der Ebene der xz nur unmerklich von einer Geraden abweicht. Sie wird genau eine solche, wenn $\beta = \alpha$ ist.

Will man endlich die Coordinaten x und y noch als Functionen der Zeit darstellen, so geben die Beziehungen:

$$x^2 = r^2 \cos^2 \omega \quad , \quad y^2 = r^2 \sin^2 \omega$$

mit den obengefundenen Werthen von r und ω die Ausdrücke:

$$x^2 = \alpha^2 l^2 \cos^2 t \sqrt{\frac{g}{l}} \quad , \quad y^2 = \beta^2 l^2 \sin^2 t \sqrt{\frac{g}{l}} \, ,$$

welche zeigen, daß die zur Horizontal-Ebene parallele Bewegung in zwei ganz unabhängige geradlinige zerlegt, oder aus diesen zusammengesetzt werden kann, wie in dem Falle, wo die gegen den Anfang der Coordinaten gerichtete Kraft der Entfernung des Bewegten von demselben Punkte proportional ist. Es muß indessen dabei darauf aufmerksam gemacht werden, daß hier nur sehr kleine Ausweichungen vorausgesetzt sind, und zwar so klein, daß die Projectionen der Bogen $l\alpha$ und $l\beta$ auf die Ebene der xy, wo sie die Halbachsen der Ellipse bilden, diesen Bogen selbst gleich werden, und man wird in der Folge sehen, daß die obenbemerkte Zerlegbarkeit in zwei unter sich rechtwinklige, von einander unabhängige Bewegungen nur ein besonderer Fall eines allgemeinen Gesetzes für sehr kleine Bewegungen ist.

§. 115.

In §. 107 wurde die Curve gesucht, auf welcher ein schwerer materieller Punkt herabfallen müsse, um in der kürzesten Zeit von einem gegebenen Orte A zu einem andern B zu gelangen. Wir wollen diese Aufgabe nun noch dahin abändern, daß wir die Curve suchen, längs welcher der Bewegte auf einer gegebenen Fläche herabfallen muß, um, von einem Punkte A dieser Fläche mit der Geschwindigkeit Null ausgehend, einen andern B in möglichst kurzer Zeit zu erreichen.

Im Allgemeinen ist es hier der gegebenen Fläche wegen nicht vortheilhaft, den Anfang der Coordinaten in den obern Punkt A zu verlegen. Wir bezeichnen deßhalb die Entfernung dieses Punktes von

der Ebene der xy mit z_0, und erhalten dann, die positiven z abwärts genommen, wie schon öfter:

$$v^2 = 2g(z - z_0)$$

als Ausdruck für die Geschwindigkeit des Bewegten in einer beliebigen Entfernung z von derselben Ebene. Daraus folgt dann, daß man die zur Bestimmung der gesuchten Curve nothwendige Bedingungsgleichung haben wird, wenn man in der Gleichung (J) in §. 107, $z - z_0$ statt z setzt, wobei der Factor $\sqrt{2g}$ im Nenner wegfallen kann; diese Bedingungsgleichung nimmt daher die Form an:

$$\int_{z_0}^{z_1} dz.\left\{\frac{\partial x}{\partial k}\frac{d.\frac{1}{\sqrt{z-z_0}}\frac{dx}{ds}}{dz} + \frac{\partial y}{\partial k}\frac{d.\frac{1}{\sqrt{z-z_0}}\frac{dy}{ds}}{dz}\right\} = 0\,.$$

Dieses Integral wird auch im jetzigen Falle zwischen den gegebenen Grenzen genommen, nicht für alle beliebigen Formen der Uebergangsgesetze $\frac{\partial x}{dk}$, $\frac{\partial y}{\partial k}$ Null werden können, wenn nicht die Größe unter dem Integralzeichen selbst Null ist. In dem jetzigen Falle sind aber diese Uebergangsgesetze nicht mehr unabhängig von einander, sondern stehen wieder durch die Bedingung in Verbindung, daß der neue Punkt, zu welchem man übergehen will, noch der gegebenen Fläche angehört, und wenn

$$F(x, y, z) = 0$$

die Gleichung dieser Fläche vorstellt, so hat man für denselben Werth von z, oder für den Uebergang in einem zur Ebene der xy parallelen Schnitte, die Bedingung:

$$\frac{dF}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial k} + \frac{dF}{dy}\cdot\frac{\partial y}{\partial k} = 0\,.$$

Daraus folgt sofort

$$\frac{\partial y}{\partial k} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}\cdot\frac{\partial x}{\partial k}\,,$$

und die vorhergehende Bedingungsgleichung wird durch Einführung dieses Werthes, und mit der weitern Beachtung, daß nun der Coeffizient der willkürlichen Größe $\frac{\partial x}{\partial k}$ Null werden muß:

$$\frac{dF}{dy} \frac{d. \frac{1}{\sqrt{z-z_0}} \frac{dx}{ds}}{dz} - \frac{dF}{dx} \frac{d. \frac{1}{\sqrt{z-z_0}} \frac{dy}{ds}}{dz} = 0 . \qquad (d'.$$

Sei zuerst eine Ebene gegeben, welche mit der Richtung der Schwere den Winkel γ bildet, deren Gleichung also die einfache Form:

$$\frac{z}{\cos\gamma} - \frac{x}{\sin\gamma} = 0$$

erhalten kann, wenn man die Ebene der xz senkrecht zu der gegebenen Ebene annimmt. Man zieht daraus

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{1}{\sin\gamma} , \quad \frac{dF}{dy} = 0 , \quad \frac{dx}{dz} = \operatorname{tang}\gamma ,$$

und die Gleichung (d') kommt damit auf die einfachere:

$$\frac{dy}{ds} = \sqrt{\frac{z-z_0}{2a}}$$

oder

$$2ay'^2 = (z-z_0)(1+x'^2+y'^2)$$

zurück, worin $2a$ die Constante der Integration, d. h. den Werth des Ausdruckes:

$$\frac{z-z_0}{\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$$

für einen bestimmten Werth von z bezeichnet, und y' für $\frac{dy}{dz}$, x' für $\frac{dx}{dz}$ steht. Ersetzt man dann den letztern Quotienten durch seinen Werth $\operatorname{tang}\gamma$, und zieht den Werth von y' heraus, so findet man:

$$y' \cos\gamma = \sqrt{\frac{z-z_0}{2a+z_0-z}} ,$$

und das allgemeine Integral:

$$(y-y_0)\cos\gamma = \int_{z_0}^{z} dz . \sqrt{\frac{z-z_0}{2a+z_0-z}} .$$

Die Projection der gesuchten Curve in der Ebene der yz ist also eine der Cycloide ähnliche Linie, bei welcher die zur Achse der z parallelen Ordinaten alle im Verhältnisse $1 : \cos\gamma$ verjüngt sind; die Bahn des

Bewegten in der gegebenen Ebene selbst muß daher wieder eine Cycloide sein, deren erzeugender Kreis die Constante 2a zum Durchmesser hat, und deren Basis zur Achse der y parallel und in der gegebenen Ebene um $\frac{z_0}{\cos\gamma}$ Längeneinheiten von ihr entfernt ist. Die Bedingung, daß diese Curve auch durch den zweiten gegebenen Punkt geht, wird, wie in dem früheren Falle, zur Bestimmung des Durchmessers 2a führen.

Als zweite Anwendung nehme ich die Kugelfläche, deren Mittelpunkt im Anfangspunkte liegt und deren Halbmesser r ist; ihre Gleichung:

$$F(x, y, z) = 0 = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$$

gibt, wie früher

$$\frac{dF}{dx} = x \quad , \qquad \frac{dF}{dy} = y \ ,$$

und verwandelt die Gleichung (d′) in

$$y \frac{d.\frac{1}{\sqrt{z - z_0}} \frac{dx}{ds}}{dz} - x \frac{d.\frac{1}{\sqrt{z - z_0}} \frac{dy}{ds}}{dz} = 0 \ .$$

Integrirt man also, und beachtet, daß man hat:

$$\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{\frac{dx}{dz}}{\frac{ds}{dz}} = \frac{dx}{dz} \cdot \frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{ds}{dz}} = \frac{dx}{dz} \cdot \frac{dy}{ds} \ ,$$

so ergibt sich die Differentialgleichung:

$$y \frac{dx}{ds} - x \frac{dy}{ds} = \sqrt{2a(z - z_0)}$$

worin die Constante $\sqrt{2a}$ nun den Werth von

$$\frac{y \frac{dx}{ds} - x \frac{dz}{ds}}{\sqrt{z - z_0}}$$

für einen gegebenen Werth von z, also z. B. für den Punkt B bezeichnet, wo z = z, ist. Bringt man dann diese Gleichung unter die Form:

$$y\frac{dx}{dz}-x\frac{dy}{dz}=\sqrt{2a(z-z_0)}\,\frac{ds}{dz}$$

$$=\sqrt{2a(z-z_0)}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2} \quad (e.$$

und eliminirt $\frac{dy}{dz}$ mittelst der ersten Abgeleiteten der Kugelgleichung:

$$x\frac{dx}{dz}+y\frac{dy}{dz}+z=0 \;,$$

so erhält man die neue Gleichung

$$(x^2+y^2)\frac{dx}{dz}+xz=\sqrt{y^2+z^2+2xz\frac{dx}{dz}+(x^2+y^2)\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\cdot\sqrt{2a(z-z_0)},$$

welche in Bezug auf $\frac{dx}{dz}$ aufgelöset, und mit Beachtung der Gleichung der Kugelfläche den Werth gibt:

$$\frac{dx}{dz}=-\frac{yz}{x^2+y^2}+\frac{ry}{x^2+y^2}\sqrt{\frac{2a(z-z_0)}{x^2+y^2-2a(z-z_0)}}\,.$$

Ebenso findet man für $\frac{dy}{dz}$ den Werth:

$$\frac{dy}{dz}=-\frac{yz}{x^2+y^2}-\frac{rx}{x^2+y^2}\sqrt{\frac{2a(z-z_0)}{x^2+y^2-2a(z-z_0)}}\,,$$

und wenn man nun den ersten dieser Ausdrücke mit y, den zweiten mit x multiplicirt, ihren Unterschied nimmt, und x^2+y^2 durch r^2-z^2 ersetzt, so findet man für $y\frac{dx}{dz}-x\frac{dy}{dz}$ den neuen Werth:

$$y\frac{dx}{dz}-x\frac{dy}{dz}=r\sqrt{\frac{2a(z-z_0)}{r^2-z^2-2a(z-z_0)}}\,, \qquad (f.$$

welcher als Differentialgleichung zwischen den drei Veränderlichen x, y und z das erste Aenderungsgesetz der Gleichung einer Fläche vorstellt, welche die gegebene Kugelfläche nach der gesuchten Curve schneidet. Dividirt man dieselbe auf der linken Seite durch x^2+y^2, auf der rechten durch r^2-z^2, so kann sie unter die Form gebracht werden:

$$\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{d.\frac{x}{y}}{dz} = \frac{r}{r^2-z^2}\sqrt{\frac{2a(z-z_0)}{r^2-z^2-2a(z-z_0)}},$$

unter welcher die Veränderlichen getrennt erscheinen, und die Integration möglich wird. Das allgemeine Integral nimmt dann die Form an:

$$g.)\ \text{arc tang}\,\frac{x}{y} - \text{arc tang}\,\frac{x_0}{y_0} = \int_{z_0}^{z} dz . \frac{r}{r^2-z^2}\sqrt{\frac{2a(z-z_0)}{r^2-z^2-2a(z-z_0)}}$$

und zeigt, daß die endliche Lösung der Aufgabe noch von der Ausführung des angedeuteten Integrals abhängt, welche indessen wieder nur auf dem Wege der Annäherung stattfinden kann, selbst in dem einfacheren Falle, wo man $z_0 = 0$ setzt, den Punkt A also in der Ebene der xy annimmt.

Bemerkenswerth dürfte es daher noch sein, daß sich der Bogen der gesuchten Curve in einem ziemlich einfachen geschlossenen Ausdrucke darstellen läßt. Vergleicht man nämlich die beiden Werthe (e) und (f) des Aenderungsgesetzes:

$$y\frac{dx}{dz} - z\frac{dy}{dz}$$

mit einander, so wird man daraus das Aenderungsgesetz:

$$\frac{ds}{dz} = \frac{r}{\sqrt{r^2-z^2-2a(z-z_0)}}$$

und das allgemeine Integral

$$s = r\left(\text{arc sin}\,\frac{a+z}{\sqrt{r^2+2az_0+a^2}} - \delta\right)$$

ziehen, wo vorausgesetzt ist, daß der Bogen s in dem obern Punkte A anfängt, und wo δ den Ausdruck:

$$\text{arc sin}\,\frac{a+z_0}{\sqrt{r^2+2az_0+a^2}}$$

vertritt. Dabei ist jedoch zu bemerken, daß die Größe a in diesen Ausdrücken noch unbekannt ist, und daß dieselbe nur aus der vollständig integrirten Gleichung (g) dadurch gefunden werden kann, daß man in

dieselbe die Coordinaten $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ des tieferliegenden Punktes B einführt. Würde man dagegen die Lage des Punktes B durch die Ordinate $z_{,}$ und die Länge l des Weges, welchen er beschreiben soll, bestimmen, so würde man aus dem obigen Werthe von s die Gleichung:

$$a + z_{,} = \sqrt{r^2 + 2 a z_0 + a^2} \sin\left(\frac{l}{r} + \delta\right)$$

ziehen, durch welche der Werth von a unmittelbar gefunden werden kann. Sollte z. B. $l = \frac{1}{2}\pi r$ sein, so würde man

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi + \delta\right) = \cos\delta = \frac{\sqrt{r^2 - z_0^2}}{\sqrt{r^2 + 2 a z_0 + a^2}}$$

und demnach

$$a = \sqrt{r^2 - z_0^2} - z_{,}$$

finden. Für $l = \pi r$ dagegen ergäbe sich $2a = -(z_0 + z_{,})$ was die frühern Ausdrücke im Allgemeinen imaginär macht, und so lange als z_0 nicht negativ ist und größer als $z_{,}$. Man wird sich von diesem Ergebnisse leicht Rechenschaft geben, wenn man beachtet, daß der fallende Punkt, welcher von A mit der Geschwindigkeit Null ausgeht und bis B einen Weg πr zurücklegen soll, jedenfalls eine tiefste Lage und eine größte Geschwindigkeit erhalten, und mit dieser wieder steigen muß, aber der Ebene der xy nicht näher kommen kann, als es der Punkt A ist, weil für eine gleiche Entfernung z_0 seine Geschwindigkeit wieder Null geworden ist. Für ein positives z_0 ist demnach die Bedingung: $l = \pi r$ für ihn unmöglich. Für ein negatives z_0 müßte man aber annehmen, daß der Bewegte anfänglich sich auf der gewölbten Seite der Kugelfläche befinde, und beim Durchgang durch die Ebene der xy in die hohle Seite eintrete.

In dem besondern Falle, daß gerade $z_0 = -z_{,}$ sein soll, hat man $a = 0$, und die Gleichung (g) wird

$$\text{arc tang}\frac{x}{y} = \text{arc tang}\frac{x_0}{y_0}\ ,\qquad y = \frac{y_0}{x_0}x\ ,$$

also die Gleichung einer lothrechten Ebene; der Bewegte muß dem größten lothrechten Kreise folgen, und dabei, wie leicht zu sehen ist, durch den tiefsten Punkt der Kugel kommen, da nur dieser größte Kreis zwischen den gegebenen Punkten die gegebene Länge πr besitzt.

III. Bewegung auf einer beweglichen Fläche oder Curve.

§. 116.

Wenn die Fläche oder Curve, auf welcher sich ein materieller Punkt bewegen soll, nicht fest ist, so wird der Druck, welchen derselbe auf diese Hindernisse ausübt, auch seinen Einfluß auf deren Bewegung äußern, da diese Hindernisse dann aber als materielle und der Wirkung gegebener Kräfte unterworfen angenommen werden müssen, widrigenfalls sie so gut wie nicht vorhanden wären, so haben wir es in diesem Falle nicht mehr mit einem einzelnen materiellen Punkte, sondern mit einem Systeme von solchen Punkten zu thun, und zwar mit einem veränderlichen System, für welches das dritte Buch die Gesetze des Gleichgewichtes und der Bewegung untersuchen wird.

Was ferner die Gesetze der Bewegung betrifft, welche der Bewegte besitzt, wenn man seine Lage und Geschwindigkeit auf Punkte der beweglichen Fläche selbst bezieht, und diese sich als unbeweglich denkt, so ergeben sich dieselben nach denen der bezüglichen oder relativen Bewegung überhaupt, von denen das folgende Kapitel handeln wird.

Viertes Kapitel.

Relative Bewegung des materiellen Punktes.

§. 117.

Die Bewegungen, welche wir bisher betrachtet haben, wurden immer auf ein festes, seiner Lage nach unveränderliches Coordinaten-System bezogen, und demnach als absolute Bewegungen gedacht; solche Bewegungen gibt es aber, streng genommen, für uns in der Wirklichkeit nicht, da wir keine feste Punkte haben, mit denen wir die Bewegungen, welche wir beobachten, vergleichen könnten. So nehmen alle Körper der Erde an der doppelten Bewegung derselben, um ihre Achse und um die Sonne, Theil, und ein materieller Punkt, welchem auf der Erdoberfläche noch eine eigene, von den Punkten dieser Oberfläche unabhängige Bewegung ertheilt wird, hat demnach schon eine dreifache. Es muß deßhalb untersucht werden, welchen Einfluß die dem ganzen Systeme gemeinschaftlichen Bewegungen auf die besondere Bewegung eines Punktes innerhalb des Systems haben, dem auch der Beobachter angehört, oder doch als angehörend gedacht wird, oder mit andern Worten, es sind noch die Gesetze der relativen Bewegung eines materiellen Punktes zu untersuchen, der einem in Bewegung befindlichen Systeme angehört, und zwar für einen Beobachter, welcher ebenfalls Theil an der Bewegung des ganzen Systems nimmt.

Dazu wird es offenbar genügen, einen Punkt des Systems zu wählen, gegen welchen der Beobachter in einer unveränderlichen Lage bleibt, und durch denselben ein Coordinatensystem zu legen, dessen Achsen gegen den Beobachter ebenfalls eine unveränderliche Lage behalten, im Uebrigen aber sich mit dem Systeme sowohl fortschreitend als drehend fortbewegen, und dann die Beziehungen zwischen der Bewegung des betreffenden materiellen Punktes in Bezug auf ein festes Coordinatensystem und seine Bewegung in Bezug auf das nach bekannten Gesetzen bewegliche Achsensystem zu untersuchen.

Seien also am Ende der Zeit t die Coordinaten des Bewegten in Bezug auf ein festes unveränderliches Achsensystem mit x, y, z, in Bezug auf ein bewegliches System dagegen, dessen Anfangspunkt A in

demselben Augenblicke durch die Coordinaten $x_,$, $y_,$, $z_,$ in Bezug auf das feste System bestimmt wird, mit ξ, η, ζ bezeichnet. Die Achsen des beweglichen Systems werden dann mit denen des festen die Winkel: $\widehat{\xi x}$, $\widehat{\xi y}$, $\widehat{\xi z}$, $\widehat{\eta x}$, $\widehat{\eta y}$, $\widehat{\eta z}$, etc. bilden, für welche

$$\text{a.)}\left\{\begin{array}{lll} \cos\widehat{\xi x} = a \; , & \cos\widehat{\xi y} = b \; , & \cos\widehat{\xi z} = c \\ \cos\widehat{\eta x} = a' \; , & \cos\widehat{\eta y} = b' \; , & \cos\widehat{\eta z} = c' \\ \cos\widehat{\zeta x} = a'' \; , & \cos\widehat{\zeta y} = b'' \; , & \cos\widehat{\zeta z} = c'' \end{array}\right.$$

sein soll. Ferner wollen wir uns durch den beweglichen Anfangspunkt A ein zweites Coordinatensystem gelegt denken, dessen Achsen der x', y', z' fortwährend einzeln den entsprechenden festen Achsen der x, y, z parallel bleiben, während sie mit den beweglichen Achsen dieselben Winkel bilden, wie diese. — Man hat dann zwischen den Coordinaten x, y, z des Bewegten in Bezug auf das feste System und seinen Coordinaten x', y', z' in Bezug auf das parallele bewegliche System, die Gleichungen:

$$x = x_, + x' \; , \quad y = y_, + y' \; , \quad z = z_, + z' \; ,$$

aus denen in Bezug auf die Zeit t die ersten Aenderungsgesetze:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_,}{dt} + \frac{dx'}{dt} \; , \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_,}{dt} + \frac{dy'}{dt} \; ,$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz_,}{dt} + \frac{dz'}{dt} \; ,$$

und die Aenderungsgesetze zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_,}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2} \; , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_,}{dt^2} + \frac{d^2y'}{dt^2} \; ,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z_,}{dt^2} + \frac{d^2z'}{dt^2}$$

folgen. Aus den drei ersten schließt man unmittelbar, daß die Componenten:

$$u = \frac{dx}{dt} \; , \quad v = \frac{dy}{dt} \; , \quad w = \frac{dz}{dt}$$

der wahren Geschwindigkeit V in Bezug auf das feste Achsensystem einzeln gleich sind den Resultirenden aus den entsprechenden Componenten:

$$u_{,}=\frac{dx_{,}}{dt}\ ,\quad v_{,}=\frac{dy_{,}}{dt}\ ,\quad w_{,}=\frac{dz_{,}}{dt}$$

der Geschwindigkeit $V_{,}$ des beweglichen Anfangspunktes, und den Componenten:

$$u'=\frac{dx'}{dt}\ ,\quad v'=\frac{dy'}{dt}\ ,\quad w'=\frac{dz'}{dt}$$

der Geschwindigkeit V' des Bewegten in Bezug auf das zum festen parallele bewegliche System; es wird daher auch die Geschwindigkeit V selbst in jedem Augenblicke der Resultirenden aus den Geschwindigkeiten $V_{,}$ und V' der Größe und Richtung nach gleich sein. Umgekehrt hat man auch:

$$u'=u-u_{,}\ ,\quad v'=v-v_{,}\ ,\quad w'=w-w_{,}\quad (109.$$

und es kann demzufolge die relative Geschwindigkeit V' in Bezug auf das parallelbleibende bewegliche System als die Resultirende aus seiner wahren Geschwindigkeit V und der in entgegengesetztem Sinne genommenen Geschwindigkeit $V_{,}$ des beweglichen Coordinatensystems angesehen werden, was auf den Schluß führt, daß die relative Geschwindigkeit zur absoluten würde, wenn dem beweglichen Anfangspunkte in jedem Augenblicke eine der $V_{,}$ gleiche aber entgegengesetzte Geschwindigkeit ertheilt werden könnte.

Aehnliche Beziehungen sprechen die drei letzten Aenderungsgesetze für die Kräfte aus. Denn bezeichnet man die Resultirende aller Kräfte, welche an dem bewegten materiellen Punkte thätig sind, also sowohl derjenigen, welche von außen auf das ganze System wirken, dem derselbe angehört, als derjenigen, welche innerhalb des Systems ihre Thätigkeit äußern, mit R, ihre Componenten mit X, Y, Z; ebenso mit $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$ die diesen parallelen Componenten einer Kraft $R_{,}$, welche als die Ursache der Bewegung des Anfangspunktes A in Bezug auf das feste System angesehen werden kann, so daß man hat:

$$m\frac{d^2x_{,}}{dt^2}=X_{,}\ ,\quad m\frac{d^2y_{,}}{dt^2}=Y_{,}\ ,\quad m\frac{d^2z_{,}}{dt^2}=Z_{,}\ ,$$

so schließt man aus den drei letzten Aenderungsgesetzen, indem man sie mit m multiplicirt, die Gleichungen:

$$m\frac{d^2x'}{dt^2}=X-X_{,}\ ,\quad m\frac{d^2y'}{dt^2}=Y-Y_{,}\ ,\quad m\frac{d^2z'}{dt^2}=Z-Z_{,}\ ,\quad (110.$$

welche aussprechen, daß die Kraft R′, welche die Bewegung des materiellen Punktes in Bezug auf das parallelbleibende bewegliche Coordinatensystem hervorbringen würde, wenn dieses in Ruhe wäre, in jedem Augenblicke der Resultirenden der Kraft R und der in entgegengesetztem Sinne genommenen Kraft R, gleich sein muß, also der Resultirenden aus der wirklich thätigen Kraft R und einer Kraft $R_{,}$, welche dem Anfangspunkte A eine seiner vorhandenen gleiche und entgegengesetzte Bewegung ertheilen, oder welche denselben im Gleichgewichte halten würde.

§. 118.

Gehen wir nun von dem parallel sich bewegenden Coordinaten-System zu dem sich drehenden über, so haben wir zwischen den Coordinaten x', y', z' des Bewegten in Bezug auf das erstere und seinen Coordinaten ξ, η, ζ in Bezug auf das zweite nach §. 32 der Einl. in jedem Augenblicke die Beziehungen:

$$\text{b.)}\quad \left\{ \begin{aligned} x' &= a\xi + a'\eta + a''\zeta \\ y' &= b\xi + b'\eta + b''\zeta \\ z' &= c\xi + c'\eta + c''\zeta, \end{aligned} \right.$$

in denen sowohl die Coordinaten ξ, η, ζ als die Cosinus a, b, c, etc. als Functionen der Zeit t zu betrachten sind. Man zieht deßhalb aus ihnen die Aenderungsgesetze in Bezug auf t:

$$\text{c.)}\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= a\frac{d\xi}{dt} + a'\frac{d\eta}{dt} + a''\frac{d\zeta}{dt} + \xi\frac{da}{dt} + \eta\frac{da'}{dt} + \zeta\frac{da''}{dt}, \\ \frac{dy'}{dt} &= b\frac{d\xi}{dt} + b'\frac{d\eta}{dt} + b''\frac{d\zeta}{dt} + \xi\frac{db}{dt} + \eta\frac{db'}{dt} + \zeta\frac{db''}{dt}, \\ \frac{dz'}{dt} &= c\frac{d\xi}{dt} + c'\frac{d\eta}{dt} + c''\frac{d\zeta}{dt} + \xi\frac{dc}{dt} + \eta\frac{dc'}{dt} + \zeta\frac{dc''}{dt}, \end{aligned} \right.$$

welche zeigen, daß die Componenten der Geschwindigkeit V′ in Bezug auf die parallelbleibenden Achsen wieder aus den Componenten von zwei andern Geschwindigkeiten zusammengesetzt sind, oder in diese zerlegt werden können. Bezeichnet man nämlich die relative Geschwindigkeit des Bewegten in Bezug auf die sich drehenden Achsen der ξ, η, ζ mit V_ξ, ihre Componenten parallel zu denselben Achsen:

$$\frac{d\xi}{dt} \text{ mit } u_\xi, \quad \frac{d\eta}{dt} \text{ mit } v_\xi, \quad \frac{d\zeta}{dt} \text{ mit } w_\xi,$$

und ihre Componenten nach den parallel sich bewegenden oder nach den festen Achsen mit

u_x , v_x , w_x ,

so hat man offenbar

$$\left.\begin{aligned} u_x &= a\,u_\xi + a'\,v_\xi + a''\,w_\xi = a\frac{d\xi}{dt} + a'\frac{d\eta}{dt} + a''\frac{d\zeta}{dt} \\ v_x &= b\,u_\xi + b'\,v_\xi + b''\,w_\xi = b\frac{d\xi}{dt} + b'\frac{d\eta}{dt} + b''\frac{d\zeta}{dt} \\ w_x &= c\,u_\xi + c'\,v_\xi + c''\,w_\xi = c\frac{d\xi}{dt} + c'\frac{d\eta}{dt} + c''\frac{d\zeta}{dt} \end{aligned}\right\} .$$

Denkt man sich ferner einen zweiten Punkt, welcher in Bezug auf das sich drehende System am Ende der Zeit t dieselbe Lage hat, wie der Bewegte, welcher aber mit diesem System von demselben Augenblicke an fest verbunden bleibt, so daß seine Coordinaten ξ, η und ζ unveränderlich werden, und bezeichnet man die Geschwindigkeit dieses Punktes in Bezug auf das parallelbleibende System mit V_2, ihre Componenten nach den drei Achsen der x', y', z' mit u_2, v_2, w_2, so ist aus den vorhergehenden Gleichungen (b) in denen nun ξ, η und ζ unveränderlich sind, leicht zu sehen, daß man haben muß

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= \xi\frac{da}{dt} + \eta\frac{da'}{dt} + \zeta\frac{da''}{dt} , \\ v_2 &= \xi\frac{db}{dt} + \eta\frac{db'}{dt} + \zeta\frac{db''}{dt} , \\ w_2 &= \xi\frac{dc}{dt} + \eta\frac{dc'}{dt} + \zeta\frac{dc''}{dt} . \end{aligned}\right\} \quad (d.$$

Mit diesen Ausdrücken schließt man aber aus den Gleichungen (c)

$$u' = u_x + u_2 \;,\quad v' = v_x + v_2 \;,\quad w' = w_x + w_2 \;;$$

es kann demnach die Geschwindigkeit V' als die Resultirende der beiden Geschwindigkeiten V_ξ und V_2 angesehen werden, und umgekehrt die Geschwindigkeit V_ξ als die Resultirende der Geschwindigkeit V' und einer der V_2 gleichen aber entgegengesetzten, d. h. einer Geschwindigkeit, durch welche die drehende Bewegung des Coordinatensystems der ξ, η, ζ aufgehoben würde.

Beachtet man nun die Bedingungsgleichungen zwischen den Winkelfunctionen a, b, c, a', b', c', etc., nämlich

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} aa' + bb' + cc' = 0 \\ aa'' + bb'' + cc'' = 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 \end{array}\right.$$

und die daraus folgenden Aenderungsgesetze:

$$\left\{\begin{array}{l} a\frac{da}{dt} + b\frac{db}{dt} + c\frac{dc}{dt} = 0 \\ a'\frac{da'}{dt} + b'\frac{db'}{dt} + c'\frac{dc'}{dt} = 0 \\ a''\frac{da''}{dt} + b''\frac{db''}{dt} + c''\frac{dc''}{dt} = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt} + c'\frac{dc}{dt} = -\left(a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + c\frac{dc'}{dt}\right) \\ a\frac{da''}{dt} + b\frac{db''}{dt} + c\frac{dc''}{dt} = -\left(a''\frac{da}{dt} + b''\frac{db}{dt} + c''\frac{dc}{dt}\right) \\ a''\frac{da'}{dt} + b''\frac{db'}{dt} + c''\frac{dc'}{dt} = -\left(a'\frac{da''}{dt} + b'\frac{db''}{dt} + c'\frac{dc''}{dt}\right) \end{array}\right.$$

so wird man die Werthe von u_ξ, v_ξ, w_ξ aus den vorhergehenden Gleichungen (c) ziehen, wenn man diese der Reihe nach zuerst mit a, b, c, dann mit a', b', c', und zuletzt mit a'', b'', c'' multiplicirt, und die drei entsprechenden Producte jedesmal addirt; man findet so die Ausdrücke:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d\xi}{dt} = a\,u' + b\,v' + c\,w' - \left\{\eta\left(a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + c\frac{dc'}{dt}\right) \right. \\ \qquad\qquad \left. -\zeta\left(a''\frac{da}{dt} + b''\frac{db}{dt} + c''\frac{dc}{dt}\right)\right\} \\ \frac{d\eta}{dt} = a'u' + b'v' + c'w' - \left\{\zeta\left(a'\frac{da''}{dt} + b'\frac{db''}{dt} + c'\frac{dc''}{dt}\right) \right. \\ \qquad\qquad \left. -\xi\left(a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + c\frac{dc'}{dt}\right)\right\} \\ \frac{d\zeta}{dt} = a''u' + b''v' + c''w' - \left\{\xi\left(a''\frac{da}{dt} + b''\frac{db}{dt} + c''\frac{dc}{dt}\right) \right. \\ \qquad\qquad \left. -\eta\left(a'\frac{da''}{dt} + b'\frac{db''}{dt} + c'\frac{dc''}{dt}\right)\right\}. \end{array}\right.$$

Bezeichnet man dann die Componenten der Geschwindigkeit V' parallel zu den Achsen der ξ, η, ζ mit u'_ξ, v'_ξ, w'_ξ, so hat man wie leicht zu sehen ist:

$$\left.\begin{aligned} u'_\xi &= a\,u' + b\,v' + c\,w' \\ v'_\xi &= a'u' + b'v' + c'w' \\ w'_\xi &= a''u' + b''v' + c''w' \end{aligned}\right\} ;$$

ferner zeigen die Gleichungen (d), daß man die beiden letzten Glieder der vorhergehenden Gleichungen durch die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} a\,u_2 + b\,v_2 + c\,w_2 &= u''_\xi \\ a'u_2 + b'v_2 + c'w_2 &= v''_\xi \\ a''u_2 + b''v_2 + c''w_2 &= w''_\xi \end{aligned}\right\}$$

ersetzen kann, in welchen u''_ξ, v''_ξ, w''_ξ die drei Componenten der Geschwindigkeit V_2 parallel zu den Achsen der ξ, η, ζ vorstellen; man schließt demnach

$$u_\xi = u'_\xi - u''_\xi\ , \quad v_\xi = v'_\xi - v''_\xi\ , \quad w_\xi = w'_\xi - w''_\xi\ , \quad (111.$$

oder wie vorher ausgesprochen wurde, daß **die relative Geschwindigkeit V_ξ in Bezug auf das sich drehende System die Resultirende ist von der relativen Geschwindigkeit V' in Bezug auf das parallel sich bewegende, und von einer der V_2 gleichen und entgegengesetzten Geschwindigkeit, mit welcher sich ein dem drehenden System angehörender Punkt, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind am Ende der Zeit t, in diesem Augenblicke bewegen müßte, um in Bezug auf das erstere Coordinatensystem in Ruhe zu bleiben.**

Diese letztere Geschwindigkeit wird indessen, da sie einer drehenden Bewegung zukommt, anschaulicher durch die **Winkelgeschwindigkeit** dargestellt. Macht man nämlich

$$\left.\begin{aligned} a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + c\frac{dc'}{dt} &= -\varphi\cos\nu \\ a''\frac{da}{dt} + b''\frac{db}{dt} + c''\frac{dc}{dt} &= -\varphi\cos\mu \\ a'\frac{da''}{dt} + b'\frac{db''}{dt} + c'\frac{dc''}{dt} &= -\varphi\cos\lambda \end{aligned}\right\} ,$$

so kann man die Werthe von u''_ξ, v''_ξ, w''_ξ auf die Form bringen:

$$\begin{cases} u''_\xi = -\varphi(\eta\cos\nu - \zeta\cos\mu) \\ v''_\xi = -\varphi(\zeta\cos\lambda - \xi\cos\nu) \\ w''_\xi = -\varphi(\xi\cos\mu - \eta\cos\lambda), \end{cases}$$

und diese Ausdrücke zeigen durch Vergleichung mit den in §. 23 der Einleitung gefundenen, daß wenn man die von dem Punkte $\xi\eta\zeta$ auf die Gerade, welche die Winkel λ, μ, ν mit den Achsen der ξ, η und ζ bildet, gefällte Senkrechte mit p bezeichnet, so daß man

$$p = \sqrt{(\xi\cos\mu - \eta\cos\lambda)^2 + (\zeta\cos\lambda - \xi\cos\nu)^2 + (\eta\cos\nu - \zeta\cos\mu)^2}$$

hat, die Quotienten:

$$-\frac{\eta\cos\nu - \zeta\cos\mu}{p}, \quad -\frac{\zeta\cos\lambda - \xi\cos\nu}{p}, \quad -\frac{\xi\cos\mu - \eta\cos\lambda}{p}$$

die Cosinus der Winkel l, m, n vorstellen, welche mit den Achsen der ξ, η, ζ von einer Geraden gebildet werden, die zugleich auf dem zu dem Punkte $\xi\eta\zeta$ gezogenen Fahrstrahl und auf der vorgenannten Geraden, welche die Winkel λ, μ, ν mit denselben Achsen einschließt, senkrecht steht; man hat daher auch

$$u''_\xi = p\varphi\cos l, \quad v''_\xi = p\varphi\cos m, \quad w''_\xi = p\varphi\cos n,$$

und dadurch

$$V_2 = p\varphi.$$

Ist demnach A, Fig. 92, der gemeinschaftliche bewegliche Anfang der beiden Coordinatensysteme der x′, y′, z′ und der ξ, η, ζ, und M der bewegte materielle Punkt, also AM der Fahrstrahl $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, und AP die Gerade, welche die Winkel λ, μ, ν mit den Achsen $A\Xi$, AH, AZ bildet, endlich MP die von M auf die AP gefällte Senkrechte p, so ist die Geschwindigkeit V_2 senkrecht zu der Ebene der beiden Geraden AM und AP gerichtet, und ihre Intensität dieselbe, als wenn der Bewegte M mit der Winkelgeschwindigkeit φ um den Punkt P oder um die Achse AP einen Kreis beschreiben würde.

Die Lage dieser Achse AP, um welche sich in irgend einem Augenblicke das ganze System drehen will, dem der Punkt A und der Beobachter angehört, ist natürlich unabhängig von den Coordinaten ξ, η, ζ des innerhalb des Systems sich bewegenden Punktes, und nur

bedingt durch die Functionen a, b, c, etc., welche die Lage des Systems am Ende der Zeit t, oder mit andern Worten, welche die Gesetze der drehenden Bewegung des Systems ausdrücken. Mit den Werthen von a, b, c, etc., ändern sich demnach auch die Winkel λ, μ, ν, welche die Lage der Achse AP des Systems bestimmen; diese ist also in jedem Augenblicke eine andere, und wird deßhalb augenblickliche Drehungsachse des Systems genannt. Wir werden auf diese Betrachtung bei der Untersuchung der Bewegungsgesetze eines festen Systems von materiellen Punkten, welches sich um einen, unverrückbaren Punkt drehen läßt, noch einmal zurückkommen.

§. 119.

Um nun ebenso die Beziehungen zwischen der relativen Bewegung in Bezug auf das sich drehende System und den Kräften, welche an dem letztern überhaupt und an dem bewegten materiellen Punkte insbesondere thätig sind, festzustellen, leite man aus den Gleichungen (c) die zweiten Aenderungsgesetze der Gleichungen (b) ab; diese sind:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x'}{dt^2} &= a\frac{d^2\xi}{dt^2} + a'\frac{d^2\eta}{dt^2} + a''\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \xi\frac{d^2a}{dt^2} + \eta\frac{d^2a'}{dt^2} + \zeta\frac{d^2a''}{dt^2} \\
&\quad + 2\left\{\frac{d\xi}{dt}\cdot\frac{da}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\cdot\frac{da'}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\cdot\frac{da''}{dt}\right\}, \\
\frac{d^2y'}{dt^2} &= b\frac{d^2\xi}{dt^2} + b'\frac{d^2\eta}{dt^2} + b''\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \xi\frac{d^2b}{dt^2} + \eta\frac{d^2b'}{dt^2} + \zeta\frac{d^2b''}{dt^2} \\
&\quad + 2\left\{\frac{d\xi}{dt}\cdot\frac{db}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\cdot\frac{db'}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\cdot\frac{db''}{dt}\right\}, \\
\frac{d^2z'}{dt^2} &= c\frac{d^2\xi}{dt^2} + c'\frac{d^2\eta}{dt^2} + c''\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \xi\frac{d^2c}{dt^2} + \eta\frac{d^2c'}{dt^2} + \zeta\frac{d^2c''}{dt^2} \\
&\quad + 2\left\{\frac{d\xi}{dt}\cdot\frac{dc}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\cdot\frac{dc'}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\cdot\frac{dc''}{dt}\right\}.
\end{aligned}\right\} \text{(e.}$$

Multiplicirt man dann diese Gleichungen mit der Masse des Bewegten, und bezeichnet man wie oben die Kraft, welche die relative Bewegung in Bezug auf das parallelbleibende Coordinatensystem hervorbringen würde, d. i. die Resultirende der Kräfte R und —R, mit R', ihre Componenten parallel zu den Achsen der x', y', z', nämlich:

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = X - X, \text{ mit } X' \quad , \quad m\frac{d^2y'}{dt^2} = Y - Y, \text{ mit } Y' \, ,$$

$$m\frac{d^2z'}{dt^2} = Z - Z, \text{ mit } Z'$$

und ihre Componenten parallel zu den Achsen der ξ, η, ζ mit Ξ', H', Z', so ergeben sich zuerst die Beziehungen:

$$\begin{cases} \Xi' = a\,X' + b\,Y' + c\,Z' \\ H' = a'X' + b'Y' + c'Z' \\ Z' = a''X' + b''Y' + c''Z' \, . \end{cases}$$

Ferner bezeichne ich mit R_2 eine Kraft, welche einem materiellen Punkte von gleicher Masse und Lage, wie die des Bewegten, der aber mit dem sich drehenden Coordinatensystem auf eine unveränderliche Weise verbunden bleibt, dessen Coordinaten ξ, η, ζ also unveränderlich sind, die Geschwindigkeit V_2 ertheilt; die Componenten dieser Kraft nach den parallel sich bewegenden Achsen seien X_2, Y_2, Z_2, oder zufolge der Gleichungen (d)

$$\begin{cases} X_2 = m\dfrac{du_2}{dt} = \xi\dfrac{d^2a}{dt^2} + \eta\dfrac{d^2a'}{dt^2} + \zeta\dfrac{d^2a''}{dt^2} \, , \\ Y_2 = m\dfrac{dv_2}{dt} = \xi\dfrac{d^2b}{dt^2} + \eta\dfrac{d^2b'}{dt^2} + \zeta\dfrac{d^2b''}{dt^2} \, , \\ Z_2 = m\dfrac{dw_2}{dt} = \xi\dfrac{d^2c}{dt^2} + \eta\dfrac{d^2c'}{dt^2} + \zeta\dfrac{d^2c''}{dt^2} \, ; \end{cases}$$

die Componenten derselben Kraft R_2 nach den sich drehenden Achsen dagegen seien

$$\begin{cases} \Xi'' = a\,X_2 + b\,Y_2 + c\,Z_2 \, , \\ H'' = a'X_2 + b'Y_2 + c'Z_2 \, , \\ Z'' = a''X_2 + b''Y_2 + c''Z_2 \, . \end{cases}$$

Nach diesem multiplicire ich die Gleichungen (e) wieder der Reihe nach mit a, b, c und nehme ihre Summe, dann mit a', b', c', und zuletzt mit a'', b'', c'' und summire jedesmal die drei entsprechenden Producte; dadurch ergeben sich mit Berücksichtigung der vorhergehenden Beziehungen und der frühern Bedingungsgleichungen zwischen den Functionen a, b, c, etc. die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
m\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \Xi' - \Xi'' - 2m\left\{\frac{d\eta}{dt}\left(a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + c\frac{dc'}{dt}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \frac{d\zeta}{dt}\left(a''\frac{da}{dt} + b''\frac{db}{dt} + c''\frac{dc}{dt}\right)\right\} \\
m\frac{d^2\eta}{dt^2} &= H' - H'' - 2m\left\{\frac{d\zeta}{dt}\left(a'\frac{da''}{dt} + b'\frac{db''}{dt} + c'\frac{dc''}{dt}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \frac{d\xi}{dt}\left(a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + c\frac{dc'}{dt}\right)\right\} \\
m\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= Z' - Z'' - 2m\left\{\frac{d\xi}{dt}\left(a''\frac{da}{dt} + b''\frac{db}{dt} + c''\frac{dc}{dt}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \frac{d\eta}{dt}\left(a'\frac{da''}{dt} + b'\frac{db''}{dt} + c'\frac{dc''}{dt}\right)\right\}
\end{aligned}\right\}, \text{(f.}$$

und wenn hier die Aenderungsgesetze: $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ durch die relativen Geschwindigkeiten u_ξ, v_ξ, w_ξ, die eingeklammerten dreigliedrigen Factoren durch ihre früheren Werthe: $-\varphi\cos\nu$, $-\varphi\cos\mu$, $-\varphi\cos\lambda$ ersetzt werden, so nehmen die letzten Glieder der vorstehenden Gleichungen die Form an:

$$\left.\begin{aligned}
-2m\varphi(v_\xi\cos\nu - w_\xi\cos\mu)\ , \quad -2m\varphi(w_\xi\cos\lambda - u_\xi\cos\nu) \\
-2m\varphi(u_\xi\cos\mu - v_\xi\cos\lambda)\ ,
\end{aligned}\right\} \text{(g.}$$

und können demnach als die Componenten einer Kraft $F = 2m\varphi q$ angesehen werden, deren Richtung sowohl auf derjenigen der relativen Geschwindigkeit V_ξ, als auf derjenigen der augenblicklichen Drehungsachse senkrecht steht, und mit den Achsen der ξ, η, ζ die Winkel l', m', n' einschließt, für welche man

$$\cos l' = -\frac{v_\xi\cos\nu - w_\xi\cos\mu}{q}\ , \quad \cos m' = -\frac{w_\xi\cos\lambda - u_\xi\cos\nu}{q}\ ,$$

$$\cos n' = -\frac{u_\xi\cos\mu - v_\xi\cos\lambda}{q}$$

hat, und

$$q = \sqrt{(u_\xi\cos\mu - v_\xi\cos\lambda)^2 + (w_\xi\cos\lambda - u_\xi\cos\nu)^2 + (v_\xi\cos\nu - w_\xi\cos\mu)^2}$$

ist. Endlich schließt man aus den in §. 23 der Einleitung abgeleiteten Formen, wenn ϑ den Winkel zwischen der augenblicklichen Drehungsachse und der Richtung der relativen Geschwindigkeit V_ξ bezeichnet, die Beziehung

$$q = \sqrt{u_\xi^2 + v_\xi^2 + w_\xi^2} \cdot \sin\vartheta = V_\xi \sin\vartheta \; ,$$

wonach also q die Projection der relativen Geschwindigkeit V_ξ auf eine zur augenblicklichen Drehungsachse senkrechte Ebene ist, und $F = 2\,m\,\varphi\,V_\xi \sin\vartheta$ wird.

Beachtet man nun weiter, daß die Kräfte: $\Xi' - \Xi''$, $H' - H''$, $Z' - Z''$ die zu den beweglichen Achsen der ξ, η, ζ parallelen Componenten einer Kraft R_ξ sind, welche aus der Resultirenden R aller thätigen Kräfte durch ihre Verbindung mit den in entgegengesetztem Sinne genommenen Kräften: R_1 und R_2 entsteht, durch die der Bewegte dieselbe Bewegung erhalten kann, als wenn er mit dem fortschreitenden und sich drehenden Coordinatensystem fest verbunden wäre, und bezeichnet man jene Componenten von R_ξ einfach mit Ξ, H, Z, so ziehen wir aus dem Vorhergehenden die einfachen Gleichungen:

$$112.)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2\xi}{dt^2} = \Xi - F\cos l' \\[2ex] m\dfrac{d^2\eta}{dt^2} = H - F\cos m' \\[2ex] m\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = Z - F\cos n' \; , \end{cases}$$

welche darthun, daß **die relative Bewegung eines materiellen Punktes in Bezug auf ein in Bewegung begriffenes Coordinatensystem in derselben Weise ausgedrückt wird, wie die Bewegung in Bezug auf ein festes Coordinatensystem, indem man den Componenten der bewegenden Kraft R noch die entgegengesetzten Componenten derjenigen Kräfte hinzufügt, welche dem bewegten Punkt in Bezug auf ein festes Coordinatensystem dieselbe Bewegung ertheilen würden, als wenn er innerhalb des in Bewegung begriffenen Systems in Ruhe wäre, und noch die einer Kraft F, welche von der Winkelgeschwindigkeit des bewegten Systems und von der relativen Geschwindigkeit des bewegten Punktes selbst wieder abhängt, welche nämlich im Stande**

ist, die Bewegungsgröße $-2m\varphi V_\xi \sin\vartheta$ in der Einheit der Zeit zu erzeugen.

Vergleicht man ferner die Gleichungen (112) mit den Gleichungen (a) in §. 108, und beachtet, daß die Richtung der Kraft F immer senkrecht ist zu der der relativen Geschwindigkeit V_ξ, so kann man sich diese Kraft F auch als den Widerstand einer Fläche vorstellen, auf welcher der Bewegte bleiben muß; die Winkel l', m', n' werden dann diejenigen sein, welche die Normale zu dieser Fläche in dem Punkte $\xi\eta\zeta$ mit den beweglichen Achsen bildet, und die Untersuchung der relativen Bewegung kommt darnach auf die der gezwungenen Bewegung auf einer festen Fläche zurück, für welche aber die Gleichung nicht gegeben, deren Gestalt nicht bekannt ist.

§. 120.

Die strenge Auflösung der Aufgabe, die Gesetze der relativen Bewegung eines freien materiellen Punktes zu finden, setzt also nicht nur voraus, daß man die Bewegung des Beobachters oder die des Coordinatensystems kennt, auf welches man die Bewegung des materiellen Punktes beziehen will, weil davon die Intensitäten und Richtungen der beiden Kräfte R_1 und R_2 abhängen, sie wird auch insbesondere durch die Richtung der Kraft F erschwert, da diese nicht blos von der Lage des Bewegten, sondern auch von seiner relativen Geschwindigkeit abhängt und nicht mit Vortheil eliminirt werden kann, und es dürfte deßhalb in den meisten Fällen leichter sein, die Bewegung des betreffenden materiellen Punktes zuerst in Bezug auf ein festes Coordinatensystem zu suchen, und dann durch Vergleichung dieser Bewegung mit der Bewegung des Systems, welchem jener Punkt angehört, dessen relative Bewegung abzuleiten, wie dies in §. 88 für einen materiellen Punkt geschehen ist, welcher auf der sich drehenden Erde von einer gegebenen Höhe herabfällt. — Unsere obengefundenen Gleichungen können uns indessen dazu dienen, einige bemerkenswerthe allgemeine Eigenschaften der relativen Bewegung kennen zu lernen.

Aus der vorhergehenden Vergleichung der relativen Bewegung mit derjenigen auf einer festen Fläche folgt nämlich sogleich, daß die relative Geschwindigkeit V_ξ selbst von der normalen Kraft F unabhängig ist, daß also das Princip von der lebendigen Kraft des Bewegten und von der Arbeit der Kraft R_ξ geradeso besteht, als wenn das System in Ruhe, und an dem Bewegten nur die Kraft R_ξ thätig wäre. In der That findet man, wenn die Gleichungen (112) der Reihe nach mit

$$2\frac{d\xi}{dt}\ ,\qquad 2\frac{d\eta}{dt}\ ,\qquad 2\frac{d\zeta}{dt}$$

multiplicirt, und die Producte addirt werden, mit Beachtung der Werthe von $\cos l'$, $\cos m'$, $\cos n'$, daß der Coeffizient von F Null wird und sich die Gleichung ergibt:

$$m V_\xi^2 - m U_\xi^2 = 2\int_{\varsigma_0}^{\varsigma} d\varsigma . \left(\Xi\frac{d\xi}{d\varsigma} + H\frac{d\eta}{d\varsigma} + Z\frac{d\zeta}{d\varsigma}\right)$$

$$= 2\int_{\varsigma_0}^{\varsigma} d\varsigma . R_\xi \frac{dr_\xi}{d\varsigma}\ ,$$

worin U_ξ die anfängliche relative Geschwindigkeit vorstellt, und ς den Bogen der relativen Bahn bezeichnet. Ersetzt man dann die Kraft R_ξ durch die Kräfte R, $-R_1$ und $-R_2$, von denen sie die Resultirende ist, so nimmt der vorstehende Ausdruck die Form an:

113.) $$m V_\xi^2 - m U_\xi^2 = 2\int_{\varsigma_0}^{\varsigma} d\varsigma . R\frac{dr}{d\varsigma} - 2\int_{\varsigma_0}^{\varsigma} d\varsigma . R_1\frac{dr_1}{d\varsigma} - 2\int_{\varsigma_0}^{\varsigma} d\varsigma . R_2\frac{dr_2}{d\varsigma}$$

und wenn die Kräfte R, R_1, R_2 Functionen von r, r_1 und r_2 sind, so kann man auch schreiben:

114.) $$m V_\xi^2 - m U_\xi^2 = 2\int_{r_0}^{r} dr . R - 2\int_{r'_0}^{r_1} dr_1 . R_1 - 2\int_{r''_0}^{r_2} dr_2 . R_2\ ,$$

wo dann r_0, r'_0 und r''_0 die anfänglichen Werthe von r, r_1 und r_2 bezeichnen.

Hat das bewegliche Coordinatensystem z. B. eine gleichförmige Bewegung um eine feste Achse, so wird man diese als eine der Achsen des beweglichen Systems nehmen; die Kraft R_1, welche den Anfangspunkt im Gleichgewicht halten kann, wird Null sein; die Kraft R_2 dagegen, welche die Bewegung des am Ende der Zeit t mit dem System fest verbundenen Punktes hervorbringen könnte, müßte offenbar in jedem Augenblicke gegen den Mittelpunkt der Bewegung oder gegen die feste Achse gerichtet und dem dynamischen Drucke gleich und entgegengesetzt sein. Bezeichnet also r die Entfernung des Bewegten am Ende der Zeit t von der festen Achse, φ die constante Winkelgeschwindigkeit des drehenden Systems, so hat man

$$R_2 = - m\varphi^2 r \quad , \quad -2\int_{r_0}^{r} dr_2 . R_2 = m\varphi^2 (r^2 - r_0^2) \ ,$$

und wenn man die senkrecht zur Drehungsachse gerichtete Geschwindigkeit eines in den Abständen r und r_0 von derselben mit den Achsen der ξ, η, ζ fest verbundenen Punktes durch v_r und v_0 vorstellt, so hat man die Gleichung:

$$m V_\xi^2 - m U_\xi^2 = 2\int_{\varsigma_0}^{\varsigma} d\varsigma . R \frac{dr}{d\varsigma} + m(v_r^2 - v_0^2) \ ; \quad (114^a.$$

Der Zuwachs der relativen lebendigen Kraft eines materiellen Punktes in Bezug auf ein in gleichförmiger drehender Bewegung um eine feste Achse begriffenes System ist demnach um den Unterschied der lebendigen Kräfte zweier mit dem System fest verbundenen Punkte von gleicher Masse, von denen sich der erste in der anfänglichen, der zweite in der endlichen Entfernung des Bewegten von der Drehungsachse befindet, größer, als die doppelte Arbeit der Resultirenden aller an dem Bewegten angreifenden Kräfte.

Bleibt der Bewegte während seiner Bewegung in gleicher Entfernung von der Achse, so ist seine relative lebendige Kraft und Geschwindigkeit dieselbe, als wenn das System fest wäre.

§. 121.

In dem eben betrachteten Falle, wo das bewegliche System nur eine gleichförmige Bewegung um eine feste Achse besitzt, wollen wir nun ferner voraussetzen, daß die Kraft R fortwährend gegen einen bestimmten Punkt dieser Drehungsachse gerichtet sei, und dann diesen Punkt als Anfang, die Drehungsachse als eine der Achsen der beweglichen Coordinaten, und zwar als die der ζ annehmen. Die Winkel λ, μ, ν, welche die nun constante Drehungsachse mit den Coordinatenachsen bildet, sind unveränderlich:

$$\lambda = \frac{1}{2}\pi \quad , \quad \mu = \frac{1}{2}\pi \quad , \quad \nu = 0 \ ,$$

und die Componenten der Kraft F kommen dadurch auf

$$-2m\varphi v_\xi \quad . \quad +2m\varphi u_\xi \quad , \quad 0$$

zurück; ebenso ist die zur Achse der ζ parallele Componente der Kraft $R_2 = -m\varphi^2 r$ gleich Null, während die zu den Achsen der ξ und η parallelen, wie leicht zu sehen ist, durch

$$-m\varphi^2\xi \quad , \quad -m\varphi^2\eta$$

ausgedrückt werden. Die Gleichungen (112) werden auf diese Weise:

$$115.) \quad \begin{cases} m\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Xi' + m\varphi^2\xi + 2m\varphi v_\xi \\ m\frac{d^2\eta}{dt^2} = H' + m\varphi^2\eta - 2m\varphi u_\xi \\ m\frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z' , \end{cases}$$

und wenn dann die erste derselben mit η, die zweite mit ξ multiplicirt und die Differenz der erhaltenen Producte genommen wird, so findet man mit der Beachtung, daß die Differenz:

$$\xi H' - \eta \Xi'$$

Null wird, weil die Kraft R immer gegen den Anfangspunkt gerichtet ist, die Gleichung:

$$\xi\frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\frac{d^2\xi}{dt^2} = -2\varphi\left(\xi\frac{d\xi}{dt} + \eta\frac{d\eta}{dt}\right),$$

und daraus unter der Voraussetzung, daß der Ausdruck:

$$\xi\frac{d\eta}{dt} + \eta\frac{d\xi}{dt}$$

für $t=0$, den Werth C^2 erhalte, durch die erste Integration:

$$\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt} - C^2 = \varphi(\xi_0^2 + \eta_0^2) - \varphi(\xi^2 + \eta^2) .$$

Bezeichnet man dann die Entfernung des Bewegten von der Drehungsachse, d. i. die von demselben auf die Achse der ζ gefällte Senkrechte wieder mit r, den Winkel, welchen diese Senkrechte mit der Ebene der $\xi\zeta$ einschließt, mit ω, so wird, wie in §. 71

$$\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}=r^2\frac{d\omega}{dt}\quad,\quad \xi^2+\eta^2=r^2\quad,\quad \xi_0{}^2+\eta_0{}^2=r_0{}^2\;,$$

und die obige Gleichung dadurch

$$r^2\frac{d\omega}{dt}=C^2-\varphi\,(r^2-r_0{}^2)\;. \tag{116}$$

Setzt man zuletzt noch v_0 für $r_0\,\varphi$, v_r für $r\varphi$, und für C seinen Werth $r_0\,u_0\sin\alpha_0$, worin u_0 die Projection der anfänglichen relativen Geschwindigkeit U_ξ in der Ebene der $\xi\eta$, und α_0 den Winkel zwischen dieser Projection und der Verlängerung des Fahrstrahls r_0 vorstellt, so erhält man noch den Ausdruck:

$$r^2\frac{d\omega}{dt}=r_0\,u_0\sin\alpha_0+r_0\,v_0-r\,v_r\;.$$

Man schließt aus diesen Ausdrücken, daß das Product $r\,.\,r\frac{d\omega}{dt}$ aus dem Fahrstrahl in die dazu senkrechte Componente der projicirten Geschwindigkeit des Bewegten bei der relativen Bewegung in Bezug auf ein System, das sich gleichförmig um eine feste Achse dreht, nur constant ist, wenn der Bewegte in derselben Entfernung von der Achse bleibt; es wächst, wenn sich der Bewegte der Achse nähert, und wird kleiner, wenn er sich von ihr entfernt, und zwar um den Unterschied der ähnlichen Producte, welche der drehenden Bewegung um die feste Achse entsprechen.

Machen wir endlich noch die Voraussetzung, daß die dritte der Gleichungen (115) für sich allein integrirt werden kann, entweder genau, oder auf dem Wege der Annäherung, so wird auch der Werth des Integrals:

$$\int ds\left(\Xi'\frac{d\xi}{ds}+H'\frac{d\eta}{ds}\right)=\int ds\left(\Xi'\frac{d\xi}{ds}+H'\frac{d\eta}{ds}+Z'\frac{d\zeta}{ds}\right)-\int ds\,.\,Z'\frac{d\zeta}{ds}$$

in ähnlicher Weise gefunden werden können. Multiplicirt man dann die beiden ersten der Gleichungen (115) nach einander mit $2\frac{d\xi}{ds}$ und $2\frac{d\eta}{ds}$ und nimmt die Summe der erschienenen Producte, so ergibt sich durch die erste Integration derselben die Gleichung:

$$m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right]=mu_0^2+2\int_{\varsigma_0}^{\varsigma}d\varsigma\left(\Xi'\frac{d\xi}{d\varsigma}+H'\frac{d\eta}{d\varsigma}\right)+m\varphi^2(r^2-r_0^2),$$

worin u_0 wieder dieselbe Bedeutung hat, wie kurz vorher. Man hat aber auch (§. 73)

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\omega}{dt}\right)^2,$$

und wenn noch das angedeutete Integral in der vorhergehenden Gleichung durch $\int_{r_0}^{r}dr'.R'$ ersetzt wird, so kann man dieser zuerst die Form geben:

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\left[\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2+r^2\right]=u_0^2+\varphi^2(r^2-r_0^2)+2\int_{r_0}^{r}dr'.\frac{R'}{m}$$

und erhält dann mit dem aus (116) gezogenen Werthe von $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$ die Gleichung:

117.) $$[C^2-\varphi(r^2-r_0^2)]^2\left[\left(\frac{d.\frac{1}{r^2}}{d\omega}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right]=u_0^2+\varphi^2(r^2-r_0^2)+2\int_{r_0}^{r}dr'.\frac{R'}{m},$$

für die von der Projection des Bewegten auf der Ebene der $\xi\eta$ beschriebene Curve. Die Verbindung der Gleichungen (116) und (117) wird ferner die Ausdrücke für die Aenderungsgesetze $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{d\omega}{dt}$ in Function von r oder ω geben, wodurch die Gesetze der relativen Bewegung, parallel zur Ebene der $\xi\eta$, als gefunden zu betrachten sind.

Die Gesetze für die zur Achse der ζ parallele Bewegung ergeben sich nach unserer Voraussetzung aus der dritten der Gleichungen (115) allein.

§. 122.

Die einfachste Anwendung der vorhergehenden Untersuchung bietet der freie Fall eines schweren materiellen Punktes dar in Bezug auf ein System, das sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit um eine lothrechte Achse dreht. In dieser Voraussetzung sind nämlich, wie leicht zu sehen ist, die Componenten Ξ' und H' Null, und es läßt sich deßhalb

sowohl die Gleichung (116) als die Gleichung (117), in welcher das angedeutete Integral Null wird, leicht anwenden.

Denken wir uns also das in Bewegung begriffene System aus einer ebenen Scheibe MN bestehend, welche senkrecht auf der lothrechten Drehungsachse CG, Fig. 93, befestigt ist, und in der Entfernung h über derselben an der Achse einen Arm FG angebracht, von dessen Ende der schwere Punkt während der Bewegung zu fallen anfängt; die anfängliche relative Geschwindigkeit wird dann Null sein, und in Folge dessen auch das Product C^2; die Gleichung (117), welche die Differential-Gleichung der Projection der Bahn des Bewegten in Bezug auf ein in der Ebene CD gezogenes Achsenpaar, dessen Achse der ξ zu dem Arme FG parallel sei, vorstellt, nimmt daher die Form an:

$$(r^2 - r_0^2)\left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\omega} + \frac{1}{r^2}\right) = 1$$

und wird von der Winkelgeschwindigkeit ganz unabhängig. In Bezug auf $\frac{d\omega}{dr}$ aufgelöset, gibt sie den Werth:

$$\frac{d\omega}{dr} = \pm\frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{rr_0}, \qquad \text{(a.}$$

und das allgemeine Integral dieser Gleichung wird

$$r_0\,\omega = \pm\int_{r_0}^{r} dr\,.\frac{\sqrt{r^2-r_0^2}}{r} = \pm\int_{r_0}^{r} dr\,.\frac{r}{\sqrt{r^2-r_0^2}} \mp \int_{r_0}^{r} dr\,.\frac{r_0^2}{r\sqrt{r^2-r_0^2}}\,.$$

Wird also das obere Zeichen genommen, und das zweite Integral dadurch rational gemacht, daß man $r^2 - r_0^2 = x^2$ setzt, wodurch es die Form:

$$\int_{x_0}^{x} dx\,.\frac{1}{r_0^2 + x^2}$$

annimmt, so folgt

$$r_0\,\omega = \sqrt{r^2 - r_0^2} - r_0 \text{ arc tang}\frac{\sqrt{r - r_0^2}}{r_0}$$

oder in anderer Zusammenstellung:

$$r_0\left(\omega + \text{arc tang}\frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0}\right) = \sqrt{r^2 - r_0^2}\,. \qquad \text{(b.}$$

Diese letzte Gleichung ist die einer Kreisevolvente AB, Fig. 9 durch welche der Kreis AED, dessen Halbmesser r_0 ist, abgewickelt wird; denn die bezeichnende Eigenschaft dieser Curve besteht darin, daß die Gerade BD, welche Normale zu AB in B, und Tangente zu AE in C ist, dieselbe Länge hat, wie der Bogen AED; bezeichnet man also den Winkel BCD mit ψ, so ergibt sich mit der Beachtung, daß AC der anfängliche Fahrstrahl r_0, BC der veränderliche r und AC der Winkel ω ist, auf der einen Seite

$$BD = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{r^2 - r_0^2} = AED = r_0(\omega + \psi) ,$$

und auf der andern

$$BD = r_0 \operatorname{tang} \psi \quad \text{oder} \quad \psi = \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0} ,$$

also auch

$$r\left(\omega + \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0}\right) = \sqrt{r^2 - r_0^2}$$

wie oben.

Aus der Gleichung (116) zieht man ferner durch ihre Verbindung mit der Gleichung (a) das Aenderungsgesetz:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dr} = \mp \frac{r}{r_0 \varphi \sqrt{r^2 - r_0^2}} ,$$

woraus sofort

$$t = \mp \int_{r_0}^{r} dr . \frac{r}{r_0 \varphi \sqrt{r^2 - r_0^2}} = \mp \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0 \varphi}$$

und mit dem untern Zeichen

$$r_0 \varphi t = \sqrt{r^2 - r_0^2} = BD \quad , \quad r = r_0 \sqrt{1 + \varphi^2 t^2}$$

folgt. Die Zeit ist demnach dem Bogen AED oder der Tangente BD proportional, wie dies von selbst einleuchtet, da diese letztere die Projection der wirklichen Bahn des Bewegten auf einer festen Horizontal-Ebene ist, und offenbar mit einer gleichförmigen Bewegung beschrieben wird. — Die Gleichung (b) gibt zuletzt noch durch Elimination von $\sqrt{r^2 - r_0^2}$ den Werth von ω

$$\omega = \varphi t - \operatorname{arc\,tang} \varphi t$$

in Function der Zeit.

Die Bewegung parallel zur Achse der ζ oder zur Drehungsachse
Scheibe ist natürlich die des freien Falles, und man hat daher die
eichung:

$$h - \zeta = \frac{1}{2} g t^2 ,$$

rin h den Abstand des Armes FG, Fig. 93, von der Scheibe be-
chnet. Eliminirt man aus diesem Werthe mittels desjenigen von r
e Veränderliche t, so wird

$$r^2 = 2 \frac{r_0^2}{g} \left(\frac{1}{2} g + \varphi^2 h - \varphi^2 \zeta \right) ;$$

n einer durch die Drehungsachse gelegten Ebene, welche sich fortwäh-
nd mit dem Fahrstrahl CB rückwärts dreht, zeigt sich demnach die
ahn des Bewegten als eine Parabel, deren Achse mit der Drehungs-
chse zusammenfällt, und deren Scheitel in einer Entfernung

$$\zeta = h + \frac{g}{2 \varphi^2}$$

ber der Scheibe liegt.

Wollte man dagegen die relative Bewegung eines schweren Atoms
n Bezug auf dieselbe Scheibe kennen lernen, wenn dasselbe von einem
festen Punkte gegen die Scheibe zu fallen anfängt, so müßte man für
die anfängliche relative Geschwindigkeit u_0 die dem anfänglichen Abstande r_0 von der Drehungsachse entsprechende Umdrehungsgeschwindigkeit φr_0, aber in entgegengesetztem Sinne nehmen. Dadurch ergibt sich

$$C^2 = - \varphi r_0^2 \quad , \quad r^2 \frac{d\omega}{dt} = - \varphi r^2 ,$$

und die Gleichung (117) wird

$$\varphi^2 r^4 \left\{ \left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\omega} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right\} = \varphi^2 r^2 \quad , \quad \frac{d.\frac{1}{r}}{d\omega} = 0 ;$$

sie gibt demnach

$$r - r_0 = 0 ,$$

während aus der vorhergehenden

$$\omega = - \varphi t$$

folgt, wie zu erwarten war.

§. 123.

Die in §. 121 abgeleiteten allgemeinen Gleichungen mögen uns noch dazu dienen, die relative Bewegung eines schweren materiellen Punktes zu untersuchen, welcher auf der um ihre Achse sich drehenden Erde unter einer geographischen Breite β von einer gegebenen Höhe h ohne anfängliche Geschwindigkeit frei herabfällt.

Nehmen wir dazu den Mittelpunkt C der kugelförmigen Erde, Fig. 79, als Anfang der Coordinaten, die Drehungsachse NS derselben als Achse der ζ, die Ebene des Aequators als Ebene der $\xi\eta$ oder $r\omega$, und die durch den Fußpunkt E der Lothlinie DE, in welcher der Bewegte zu fallen anfängt, gelegte Meridian-Ebene als die der $\xi\zeta$. Setzen wir dann die Wirkung der Schwere innerhalb der engen Grenzen der Bewegung als unveränderlich voraus, so haben wir zuerst als Intensität der bewegenden Kraft:

$$P = -mg_{,} ,$$

wenn $g_{,}$ die Beschleunigung der Schwere für die ruhende Erde, also ohne Verminderung durch den Bewegungsdruck, vorstellt, und als ihre Componenten, parallel zu den Achsen der ξ, η, ζ:

$$\Xi' = -mg_{,}\frac{\xi}{r_{,}} \quad , \quad H' = -mg_{,}\frac{\eta}{r_{,}} \quad , \quad Z' = -mg_{,}\frac{\zeta}{r_{,}} \quad ,$$

wo dann $r_{,} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ den Abstand des Bewegten vom Mittelpunkt C bezeichnet. Dieser Abstand kann aber auch durch $R + z$ ausgedrückt werden, wenn R den Halbmesser der Erde bedeutet, und man hat dann wegen der jedenfalls sehr kleinen Abweichung des Bewegten von der Lothlinie FH, immer sehr nahe die Beziehungen:

$$\frac{\zeta}{r_{,}} = \frac{\zeta}{R+z}\sin\beta \quad , \quad \frac{\xi^2}{r_{,}^2} + \frac{\eta^2}{r_{,}^2} = \frac{r^2}{r_{,}^2} = 1 - \frac{\zeta^2}{r_{,}^2} = \cos^2\beta \quad ,$$

in welchen r den Abstand des Bewegten von der Drehungsachse ausdrückt.

Bezeichnet man ferner den anfänglichen Werth von r, nämlich $R + h$ einen Augenblick mit R_0, und beachtet, daß die anfängliche relative Geschwindigkeit U_ξ Null ist, so wird die Gleichung (114) die Form annehmen:

$$V_\xi^2 = \varphi^2(r^2 - r_0^2) - 2g_, \int_{R_0}^{r_,} dr_, .1 \; .$$

Man kann dann mit hinreichender Annäherung, weil die Schwere als constant angenommen wurde,

$$r^2 = R(R + 2z)\cos^2\beta \quad , \qquad r_0^2 = R(R + 2h)\cos^2\beta \; ,$$
$$r^2 - r_0^2 = 2R(z - h)\cos^2\beta$$

nehmen, und erhält damit

$$V_\xi^2 = 2(g_, - R\varphi^2\cos^2\beta)(h - z)$$
$$= 2g_,(1 - \delta^2)(h - z) = 2g(h - z) \; ,$$

worin δ^2 wieder das Verhältniß $\frac{R\varphi^2\cos^2\beta}{g}$, und g die durch die Pendelversuche gegebene wirkliche Intensität der Schwere bei bewegter Erde bezeichnet. Man kann ferner den Bogen ς sehr nahe durch z ersetzen und dann mit der Beachtung, daß z abnimmt, wenn t wächst, aus der vorhergehenden Gleichung den Ausdruck:

$$\sqrt{g_,(1 - \delta^2)} \, . \, t = -\int_h^z dz \, . \, \frac{1}{\sqrt{2(h - z)}} = \sqrt{2(h - z)}$$

ziehen, woraus übereinstimmend mit dem gewöhnlichen Werthe für die Zeit beim freien Falle:

$$t = \sqrt{\frac{2(h - z)}{g_,(1 - \delta^2)}} = \sqrt{\frac{2(h - z)}{g}}$$

folgt, und für die Zeit T des ganzen Falles

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} \; .$$

Unter denselben Voraussetzungen wird das Integral:

$$\int_{\varsigma_0}^{\varsigma} d\varsigma \, . \left(\Xi' \frac{d\xi}{d\varsigma} + H' \frac{d\eta}{d\varsigma} \right)$$

in den einfachen Ausdruck:

$$-mg\int_{R_0}^{r_,} dr_, \cdot \cos^2\beta = mg(h-z)\cos^2\beta$$

übergehen, und die Gleichung (117) dadurch die Form annehmen:

$$\varphi^2(r^2-r_0^2)\left\{\left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\omega}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right\}=\varphi^2(r^2-r_0^2)+2g(h-z)\cos^2\beta;$$

sie gibt dann in Bezug auf $\frac{d\omega}{dr}$ aufgelöset, den Ausdruck:

$$\frac{d\omega}{dr}=\pm\frac{\varphi(r^2-r_0^2)}{r\sqrt{r_0^2\varphi^2(r^2-r_0^2)+2g_,r^2(h-z)\cos^2\beta}},$$

welcher durch den obigen Werth von $h-z$ in Function von r:

$$h-z=\frac{r_0^2-r^2}{2R\cos^2\beta}$$

sich auf

$$\frac{d\omega}{dr}=\mp\varphi\sqrt{\frac{R}{g_,}}\cdot\frac{\sqrt{r_0^2-r^2}}{r\sqrt{r^2-\frac{R\varphi^2}{g_,}r_0^2}}$$

zurückführen läßt.

Ich setze nun $r_0^2-r^2=u^2$, bezeichne den kleinen Bruch $\frac{R\varphi^2}{g_,}$ mit $\delta_,^2$, und nehme das obere Zeichen, so daß ω wächst, wenn r kleiner wird; dadurch ergibt sich

$$\frac{d\omega}{du}=\varphi\sqrt{\frac{R}{g_,(1-\delta_,^2)}}\cdot\frac{u^2}{(r_0^2-u^2)\sqrt{r_0^2-\frac{u^2}{1-\delta_,^2}}},$$

und mit Vernachlässigung des kleinen Bruches $\delta_,^2$ unter dem Wurzelzeichen des Nenners

$$\frac{d\omega}{du}=\varphi\sqrt{\frac{R}{g_,(1-\delta_,^2)}}\cdot\frac{u^2}{\sqrt{(r_0^2-u^2)^3}}.$$

Wird ferner ω gleich Null, wenn $r=r_0$ oder $u=0$ ist, so hat man

$$\omega = \varphi \sqrt{\frac{R}{g_{,}(1-\delta_{,}^{2})}} \int_{0}^{u} du \,.\, \frac{u^{2}}{\sqrt{(r_{0}^{2}-u^{2})^{3}}}$$

$$= \varphi \sqrt{\frac{R}{g_{,}(1-\delta_{,}^{2})}} \left(\frac{u}{\sqrt{r_{0}^{2}-u^{2}}} - \text{arc sin} \frac{u}{r_{0}} \right),$$

und wenn man beachtet, daß hier mit hinlänglicher Genauigkeit

$$\text{arc sin} \frac{u}{r_{0}} = \frac{u}{r_{0}}$$

gesetzt werden darf, so ergibt sich nach einigen Reductionen zuerst

$$\omega = \varphi \sqrt{\frac{R}{g_{,}(1-\delta_{,}^{2})}} \sqrt{r_{0}^{2}-r^{2}} \,.\, \frac{r_{0}-r}{r_{0}\, r},$$

und dann mit den oben angesetzten Werthen von r_0 und r, indem man die Glieder mit den Producten und Quadraten von $\frac{h}{R}$ und $\frac{z}{R}$ vernachläſſigt

$$\omega = \varphi \sqrt{\frac{2(R-z)}{g_{,}(1-\delta_{,}^{2})} \,.\, \frac{h-z}{R+h-z}} \,.$$

Wenn der Bewegte an der Oberfläche der Erde ankommt, wird $z=0$, und demnach hat man für den größten oder Endwerth $\omega_{,}$ von ω

$$\omega_{,} = \varphi \sqrt{\frac{2h}{g_{,}(1-\delta_{,}^{2})} \,.\, \frac{h}{R+h}},$$

oder noch einfacher, da $\frac{h}{R+h}$ für sehr kleine Werthe von h im Verhältniß zu R von $\frac{h}{R}$ nur sehr wenig verschieden ist

$$\omega_{,} = \varphi \frac{h}{R} \sqrt{\frac{2h}{g_{,}(1-\delta_{,}^{2})}} = \varphi \frac{h}{R} \sqrt{\frac{2h}{g}} \,.$$

Dieser Winkel $\omega_{,}$, ist aber offenbar derselbe, wie der, welcher in §. 88 mit $\Delta\lambda$ bezeichnet wurde, nämlich die östliche Abweichung des Bewegten von der Lothlinie, und er hat in der That bis auf sehr kleine Unterschiede denselben Werth, wie er dort gefunden wurde.

Die Gleichung (116) gibt

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dr} = \frac{r^2}{\varphi(r_0^2 - r^2)} \cdot \frac{d\omega}{dr},$$

und mit dem vorhergehenden Werthe von $\frac{d\omega}{dr}$ folgt

$$\frac{dt}{dr} = -\sqrt{\frac{R}{g_{,}}} \cdot \frac{r}{\sqrt{r_0^2 - r^2} \cdot \sqrt{r^2 - \delta_{,}^2 r_0^2}};$$

führt man also wieder u^2 für $r_0^2 - r^2$ ein, so erhält man auf ähnliche Weise wie vorher

$$t = \sqrt{\frac{R}{g_{,}(1-\delta_{,}^2)}} \int_0^u du \cdot \frac{1}{\sqrt{r_0^2 - u^2}} = \sqrt{\frac{R}{g}} \arcsin \frac{u}{r_0},$$

oder umgekehrt

$$u = \sqrt{r_0^2 - r^2} = r_0 \sin t \sqrt{\frac{g}{R}};$$

mit dem obengefundenen Werthe von t, und wenn man den kleinen Bogen $t\sqrt{\frac{g}{R}}$ selbst für seinen Sinus setzt, findet man weiter

$$\frac{\sqrt{r_0^2 - r^2}}{r_0} = \sqrt{\frac{2(h-z)}{R}},$$

woraus wir indessen nichts Neues lernen, da diese Gleichung auf

$$r^2 = r_0^2\left(1 - \frac{2(h-z)}{R}\right) = (R + 2h)(R - 2h + 2z)\cos^2\beta$$

oder auf

$$r^2 = (R^2 + 2Rz)\cos^2\beta$$

zurückkommt.

Greifen wir daher nach den Gleichungen (115) zurück und beachten, daß nicht nur die Coordinate η, sondern auch die zu derselben parallele Componente v_ξ der relativen Geschwindigkeit immer sehr klein ist, daß also innerhalb der Grenzen unserer Annäherung das sehr kleine Glied $2\varphi v_\xi$ in der ersten jener Gleichungen vernachlässigt werden kann; drehen wir ferner das Coordinatensystem um die Achse der η, bis die

der ζ mit der Lothlinie CD zusammenfällt, und die der ξ zu der Tangente in E parallel geworden ist, also um den Winkel $\frac{1}{2}\pi - \beta$, und bezeichnen die Coordinaten des Bewegten bei dieser Lage der Achsen mit x, y, $z_{,}$, so haben wir einmal $z_{,} = R + z$ und dann die Beziehungen:

$$x = \xi \sin\beta - \zeta \cos\beta \quad , \qquad \xi = x \sin\beta + z_{,} \cos\beta \ ,$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 \xi}{dt^2} \sin\beta - \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \cos\beta \ ,$$

von denen die letzte mittels der Gleichungen (115) und der angenäherten Werthe:

$$\Xi' = - mg \cos\beta \quad , \qquad Z' = - mg \sin\beta$$

zu der neuen Gleichung:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \varphi^2 \xi \sin\beta$$

führt. Aus dieser folgt dann sofort mit dem obenstehenden Werthe von ξ und mit Vernachlässigung des kleinen Gliedes $\varphi^2 x \sin^2\beta$ neben $\varphi^2 (R + z) \sin\beta \cos\beta$ der Ausdruck:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \varphi^2 (R + z) \sin\beta \cos\beta \ ,$$

in welchen noch, um integriren zu können, für z dessen Werth in Function von t einzuführen ist. Man erhält dadurch

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = (R + h - \frac{1}{2} g t^2)\, \varphi^2 \sin\beta \cos\beta \ ,$$

und durch zweimalige Integration, da x mit t Null wird,

$$x = \left(\frac{1}{2}(R + h)\, t^2 - \frac{1}{24} g t^4\right) \varphi^2 \sin\beta \cos\beta$$

oder nach Wiedereinführung des Werthes von t, und mit Vernachlässigung der Quadrate und Producte von h und z:

$$x = R\,\frac{h - z}{g}\, \varphi^2 \sin\beta \cos\beta \ .$$

Für $z = 0$, oder wenn der Bewegte an der Oberfläche der Erde ankommt, ergibt sich daraus übereinstimmend mit dem Werthe von Δb in §. 88:

$$x = \frac{1}{2} \varphi^2 R \frac{h}{g} \sin 2\beta$$

als südliche Abweichung von der Normalen zur Kugelfläche der Erde.

Es geht aus diesen Untersuchungen hervor, daß die Bewegung der Erde um ihre Achse nur einen sehr geringen Einfluß auf die Bewegungen ausübt, welche auf ihrer Oberfläche vor sich gehen, und es ist leicht zu schließen, daß ihre Bewegung um die Sonne wegen des sehr kleinen Verhältnisses $\frac{1}{24096}$, in welchem der Erdhalbmesser zu der Entfernung ihres Mittelpunktes von der Sonne steht, eine noch weniger bemerkbare Wirkung auf die Bewegungen an der Erdoberfläche äußern wird, so daß man diese letztern in der Anwendung mit hinlänglicher Genauigkeit wie absolute Bewegungen betrachten kann.

§. 124.

Es bleibt nun schließlich noch ein Wort über die relative gezwungene Bewegung zu sagen, d. h. über die Bewegung, welche ein materieller Punkt in Bezug auf eine Fläche oder Curve zu haben scheint, die selbst in Bewegung begriffen, und auf welche derselbe in seiner Bewegung beschränkt ist.

In diesem Falle wird man das in Bewegung begriffene Coordinatensystem der ξ, η, ζ mit der Fläche oder Curve auf eine unveränderliche Weise verbunden voraussetzen und die Gleichungen dieser letztern durch die genannten Coordinaten ausdrücken, wodurch die Gleichung der Fläche die Formen:

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0 \quad \text{oder} \quad \zeta = f(\xi, \eta) \,,$$

annimmt, und die Gleichungen für die gegebene Curve die Formen:

$$f_1(\xi, \eta) = 0 \quad , \quad f_2(\xi, \zeta) = 0 \,.$$

Bezeichnet man dann den unbekannten Druck, welchen der Bewegte auf die Curve oder Fläche ausübt, wieder mit N', und die Winkel zwischen den Achsen der ξ, η, ζ und seiner Richtung, deren Cosinus Functionen dieser Veränderlichen sind, mit λ', μ', ν', so wird man die Gleichungen der relativen Bewegung erhalten, wenn man der in §. 119 mit R_ξ bezeichneten Resultirenden der Kräfte R, $-R_1$ und $-R_2$ noch eine der N' gleiche und entgegengesetzte Kraft verbindet, wodurch die Gleichungen (112) die Form annehmen:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \Xi - N'\cos\lambda' - F\cos l' \\ m\frac{d^2\eta}{dt^2} &= H - N'\cos\mu' - F\cos m' \\ m\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= Z - N'\cos\nu' - F\cos n' \end{aligned}\right\}, \qquad (118.$$

und nun für beide Fälle die Gesetze der relativen gezwungenen Bewegung ausdrücken. Wenn die gezwungene Bewegung durch die Gestalt der relativen Bahn im Voraus näher bestimmt ist, so lassen sich diese Gleichungen wie bei der absoluten gezwungenen Bewegung im Allgemeinen leichter behandeln, und können in der technischen Mechanik beachtenswerthe Anwendungen finden.

§. 125.

Das einfachste Beispiel für eine Bewegung dieser Art ist die (schon in §. 98 untersuchte) Bewegung eines materiellen Punktes längs einer festen Geraden, welche sich in einer Ebene gleichförmig um einen ihrer Punkte dreht und jenen vor sich herschiebt, wobei entweder vorausgesetzt wird, daß keine Schwere vorhanden sei, oder daß die ganze Bewegung in einer horizontalen Ebene ohne Reibung vor sich gehe. — Nimmt man demnach die Gerade selbst als Achse der ξ, die der ζ senkrecht zur Ebene der Bewegung, so hat man offenbar $\cos\lambda' = \cos\nu' = 0$, $\cos\mu' = -1$ und ebenso $\cos l' = \cos n' = 0$, $\cos m' = 1$, ferner wird $\eta = 0$, $\zeta = 0$; auch die bewegende Kraft R ist Null, sowie die Kraft R_1; die Kraft R_2 wird mit ihrer Componenten $\Xi'' = -m\varphi^2\xi$ parallel zur Achse der ξ gleichbedeutend, ebenso wie die Kraft F mit ihrer Componenten $F\cos m' = 2m\varphi u_\xi = 2m\varphi\frac{d\xi}{dt}$. Die dritte der Gleichungen (118) fällt sonach ganz weg, und die beiden ersten reduziren sich auf die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2\xi}{dt^2} &= m\varphi^2\xi\,, \\ 0 &= N' - 2m\varphi\frac{d\xi}{dt}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (a.$$

welche mit den Gleichungen (c) in §. 95 gleichbedeutend sind. Aus der ersten derselben zieht man nach §. 83 das unbestimmte Integral und dessen erstes Aenderungsgesetz in Bezug auf t:

$$\text{A.)}\quad \begin{cases} \xi = A e^{\varphi t} + B e^{-\varphi t} \\ \frac{d\xi}{dt} = A\varphi e^{\varphi t} - B\varphi e^{-\varphi t} \end{cases}$$

und findet mit der Beachtung, daß für $t = 0$, $\xi = r_0$, $\frac{d\xi}{dt} = 0$ wird, daß also $A = B = \frac{1}{2} r_0$ ist, die Gleichungen:

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2} r_0 \left(e^{\varphi t} + e^{-\varphi t}\right) \\ v_\xi = \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{2} r_0 \varphi \left(e^{\varphi t} - e^{-\varphi t}\right) \end{cases}$$

für die Bewegung des materiellen Punktes längs der beweglichen Geraden. Für sehr kleine Werthe von t kann die erste auch die Form

$$\xi = r_0 \left(1 + \frac{1}{2} \varphi^2 t^2\right) = r_0 \sec \varphi t$$

erhalten, wie in §. 95 angenommen wurde, und die zweite gibt allgemein mittels der zweiten der Gleichungen (a) den Druck auf die Gerade, nämlich:

$$N' = m \varphi^2 r_0 \left(e^{\varphi t} - e^{-\varphi t}\right).$$

In Bezug auf die festen Achsen der x und y, deren Ebene noch die der Bewegung ist, und von denen die erstere mit der anfänglichen Lage der Achse der ξ zusammenfällt, hat man für den Winkel ω, welchen der Fahrstrahl $r = \xi$ mit der Achse der x bildet, die Beziehung: $\omega = \varphi t$, wodurch die Gleichung:

$$r = \frac{1}{2} r_0 \left(e^{\omega} + e^{-\omega}\right)$$

für die Bahn des Bewegten in der festen Ebene zum Vorschein kommt. Man könnte diese Curve, welche in Fig. 94 durch die krumme Linie ABC dargestellt ist, wegen der Aehnlichkeit ihrer Gleichung mit jener der Kettenlinie, Kettenspirale nennen.

Ebenso ergeben sich die Geschwindigkeits-Componenten längs des Fahrstrahls und senkrecht dazu (§. 73)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} r_0 \varphi \left(e^{\omega} - e^{-\omega}\right), \quad r\frac{d\omega}{dt} = r\varphi = \frac{1}{2} r_0 \varphi \left(e^{\omega} + e^{-\omega}\right),$$

und daraus folgt für die Geschwindigkeit längs der Tangente selbst der Ausdruck:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2} = r_0\varphi\sqrt{\frac{e^{2\omega} + e^{-2\omega}}{2}},$$

während man für den Druck N' den Werth:

$$N' = m\varphi^2 r_0 \left(e^{\omega} - e^{-\omega}\right)$$

findet. Wenn die bewegliche Gerade eine begrenzte Länge $OD = l$ hat, so wird der materielle Punkt dieselbe verlassen, wenn sie sich um einen Winkel $DOE = \alpha$ gedreht hat, welcher durch die Gleichung:

$$2l = r_0\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right) \quad \text{oder} \quad e^{2\alpha} - \frac{2l}{r_0}e^{\alpha} + 1 = 0$$

bestimmt wird, und dann mit der constanten Geschwindigkeit:

$$v = r_0\varphi\sqrt{\frac{e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}}{2}} = \varphi\sqrt{2l^2 - r_0^2}$$

längs der Tangente in E fortgehen, die Richtung dieser Geraden gegen den verlängerten Fahrstrahl OE wird durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang}\varrho = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - r_0^2}}$$

bestimmt, welche zeigt, daß der Winkel ϱ nie kleiner werden kann, als ein halber Rechter oder als $\frac{1}{4}\pi$. Die lebendige Kraft des Bewegten im Punkte E ist

$$mv^2 = m\varphi^2(2l^2 - r_0^2),$$

und die Arbeit Ph, welche die bewegende Kraft zu leisten hat, um den materiellen Punkt von A bis E zu bewegen

$$Ph = \int_0^{\alpha} d\omega . rN' = \frac{1}{4} m r_0^2 \varphi^2 \left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right)^2 = m\varphi^2(l^2 - r_0^2).$$

Nimmt man z. B. $l = 2r_0$, so hat man nach einander

$$e^{\alpha} = 2 + \sqrt{3}\ ,\quad \alpha = \text{logn.}(2 + \sqrt{3}) = 1{,}3169 = 75^{\circ}27',4$$

$$v = \frac{1}{2}\varphi l \sqrt{7} = 1{,}3229\ \varphi\ l^{m}$$

$$\text{tang}\,\varrho = \frac{2}{3}\sqrt{3} = 1{,}15470\ ,\quad \varrho = 49^{\circ}6',4\ ,$$

$$Ph = \frac{3}{4}\, m\,\varphi^2 l^{2\ \text{M Kgr}}\ .$$

Nimmt man dagegen an, daß der Bewegte sich mit der Geschwindigkeit v_0 vom Drehungspunkte aus längs der beweglichen Geraden zu bewegen anfange, so hat man zur Bestimmung der Coeffizienten A und B in den Gleichungen (A) die Bedingungen:

$$A + B = 0\ ,\quad v_0 = (A - B)\,\varphi$$

und demnach für die relative Bewegung längs der beweglichen Geraden die beiden Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{v_0}{2\varphi}\left(e^{\varphi t} - e^{-\varphi t}\right) \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{2}v_0\left(e^{\varphi t} + e^{-\varphi t}\right), \end{aligned}\right.$$

deren erste in die der absoluten Bewegung übergeht, wenn man ξ durch r, φt durch ω ersetzt. Der Druck auf die Gerade wird nun

$$N' = m v_0 \varphi \left(e^{\omega} + e^{-\omega}\right),$$

und die Arbeit der bewegenden Kraft für den Drehungswinkel α

$$Ph = \int_0^{\alpha} d\omega . rN' = \frac{1}{4} m v_0^2 \left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right)^2 .$$

Ist demnach wieder l die dem Winkel α entsprechende Länge der Geraden, so daß man hat

$$2\varphi l = v_0\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right)\ ,\quad e^{2\alpha} - \frac{2l\varphi}{v_0}e^{\alpha} - 1 = 0\ ,$$

so ergibt sich die relative Endgeschwindigkeit v_ξ

$$v_\xi = \sqrt{v_0^2 + \varphi^2 l^2}\ ,$$

und die absolute Endgeschwindigkeit v wird

$$v = \sqrt{v_\xi^2 + \varphi^2 l^2} = \sqrt{v_0^2 + 2\varphi^2 l^2} .$$

Die lebendige Kraft, mit welcher der Bewegte die Gerade verläßt, ist daher

$$m v^2 = m (v_0^2 + 2\varphi^2 l^2)$$

und die Arbeit der bewegenden Kraft, um den Zuwachs $2m\varphi^2 l^2$ derselben zu erzeugen

$$Ph = m\varphi^2 l^2 ,$$

übereinstimmend mit dem allgemeinen Princip.

§. 126.

Bei der vorhergehenden Betrachtung wurde von der Reibung gänzlich Umgang genommen; die Untersuchung läßt sich indessen auch noch durchführen, wenn man annimmt, daß sich der materielle Punkt längs der unbiegsamen Geraden mit Reibung bewege, und selbst in dem Falle, wo er, als schwer angenommen, sich längs der Geraden und auf einer horizontalen Ebene mit Reibung bewegt, und die Betrachtung dieser beiden Fälle dürfte als eine Anwendung für die Integration der Differentialgleichungen nicht ohne Nutzen sein.

Setzen wir also dabei voraus, daß die Reibung des materiellen Punktes auf der Ebene die gleichförmige Bewegung der Geraden nicht störe, und bezeichnen wir den Coeffizient für die Reibung längs der Geraden mit f, für die Reibung auf der Ebene mit f', so haben wir in unsern obigen Gleichungen (118) für die Componente Ξ den Werth:

$$\Xi = -fN' - f'mg + m\varphi^2\xi ,$$

für H den Werth:

$$H = -f'mg$$

einzuführen. Aus der zweiten dieser Gleichungen zieht man dann

$$N' = 2m\varphi\frac{d\xi}{dt} + f'mg$$

und die erste der Gleichungen (118) wird damit

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \varphi^2\xi - 2f\varphi\frac{d\xi}{dt} - f'g(1+f) . \qquad (b.$$

Nehmen wir, um diese Gleichung zu integriren, zuerst noch $f' = 0$, so daß die Reibung auf der Ebene wegfällt, so wird dieselbe in Bezug auf die Veränderliche ξ homogen, und läßt sich in eine Differential-Gleichung der ersten Ordnung umwandeln, wenn man

$$\xi = e^{\int dt \cdot u}$$

setzt; sie wird dadurch

$$\frac{du}{dt} + u^2 - \varphi^2 + 2 f \varphi u = 0$$

und zeigt, daß weil die drei letzten Glieder nur constante Coeffizienten haben, u selbst constant, $\frac{du}{dt} = 0$ genommen werden kann, und man findet aus der dadurch sich ergebenden Gleichung die Werthe:

$$u = \varphi\left(-f \pm \sqrt{1 + f^2}\right) .$$

oder getrennt:

$$u_1 = \varphi\left(\sqrt{1+f^2} - f\right) , \quad u_2 = -\varphi\left(\sqrt{1+f^2} + f\right) ,$$
$$= f_1 \varphi , \quad = - f_2 \varphi .$$

Man hat demnach als besondere Integrale der Gleichung (b), worin $f' = 0$ ist, die Werthe:

$$\xi_1 = A e^{f_1 \varphi t} , \quad \xi_2 = B e^{-f_2 \varphi t} ;$$

als vollständiges Integral also die Gleichung:

$$\xi = A e^{f_1 \varphi t} + B e^{-f_2 \varphi t} .$$

Das Aenderungsgesetz dieser letztern in Bezug auf t wird

$$\frac{d\xi}{dt} = A f_1 \varphi e^{f_1 \varphi t} - B f_2 \varphi e^{-f_2 \varphi t}$$

und gibt mit der Gleichung selbst und mit den anfänglichen Werthen: $= r_0$, $\frac{d\xi}{dt} = 0$ die Werthe von A und B, nämlich:

$$A = \frac{f_2}{f_1 + f_2} , \quad B = \frac{f_1}{f_1 + f_2} .$$

Die Gleichung der relativen Bewegung ist demnach:

$$\xi = \frac{r_0}{f_1 + f_2}\left(f_2 e^{f_1 \varphi t} + f_1 e^{-f_2 \varphi t}\right),$$

und die Gleichung der auf der festen Ebene beschriebenen Curve wird

$$r = \frac{r_0}{f_1 + f_2}\left(f_2 e^{f_1 \omega} + f_1 e^{-f_2 \omega}\right).$$

Man sieht, daß beide für $f = 0$, $f_1 = f_2 = 1$, auf die früher gefundenen zurückkommen.

In Fig. 94 ist die letztere Curve für die Werthe:

$$f_1 = 0{,}6 \quad , \qquad f_2 = 1{,}5$$

woraus sich

$$\sqrt{1 + f^2} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) = 1{,}05 \quad , \quad f = 0{,}32$$

berechnet, zur Vergleichung mit der frühern, ohne Reibung beschriebenen Spirale ABC in AB′C′ dargestellt.

Schreiben wir nun die vollständige Gleichung (b) wie folgt:

$$\frac{d^2 \xi_,}{dt^2} - \varphi^2 \xi_, + 2 f \varphi \frac{d\xi_,}{dt} + f'' g = 0,$$

so daß f'' für $f'(1+f)$ steht, und setzen darin $\xi_, = \xi \int dt \,.\, u_,$, indem wir mit ξ den Werth des Integrals der Gleichung (b) ohne deren letztes Glied bezeichnen, so daß wir

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \varphi^2 \xi + 2 f \varphi \frac{d\xi}{dt} = 0$$

haben, so wird die vorhergehende Gleichung die Form annehmen:

$$\xi \frac{du_,}{dt} + 2\left(\frac{d\xi}{dt} + f \varphi \xi\right) u_, + f'' g = 0,$$

und demnach auf eine der ersten Ordnung zurückkommen; diese selbst läßt sich aber durch eine ähnliche Substitution, indem man $u_, = u \int dt \,.\, v$ setzt, auf die beiden Gleichungen:

$$\xi \frac{du}{dt} + 2\left(\frac{d\xi}{dt} + f \varphi \xi\right) u = 0$$

und

$$uv = - f'' g$$

zurückführen, von denen die erste unmittelbar integrirt werden kann, wenn ξ in Function von t bekannt ist; die zweite gibt damit den Werth von v, und man hat endlich durch zwei neue Integrationen:

$$\xi_{,} = \xi \int_0^t dt \,.\, u \int_0^t dt \,.\, \frac{-f'' g}{u} \,.$$

Man gelangt aber zu dem Werthe von $\xi_{,}$ einfacher auf folgendem Wege. Die Form $\xi_{,} = \xi u$ kommt offenbar auf

$$\xi_{,} = u_1 \xi' + u_2 \xi''$$

zurück, wenn man für ξ die besondern Integrale ξ' und ξ'' einführt, und man zieht daraus:

$$\frac{d\xi_{,}}{dt} = u_1 \frac{d\xi'}{dt} + u_2 \frac{d\xi''}{dt} + \xi' \frac{du_1}{dt} + \xi'' \frac{du_2}{dt} \,.$$

In dieser Gleichung kann man aber die Veränderlichen u_1 und u_2 so annehmen, daß

$$\xi' \frac{du_1}{dt} + \xi'' \frac{du_2}{dt} = 0$$

wird, und nur noch

$$\frac{d\xi_{,}}{dt} = u_1 \frac{d\xi'}{dt} + u_2 \frac{d\xi''}{dt}$$

bleibt. Die zweite Ableitung gibt demnach

$$\frac{d^2\xi_{,}}{dt^2} = u_1 \frac{d^2\xi'}{dt^2} + u_2 \frac{d^2\xi''}{dt^2} + \frac{d\xi'}{dt} \cdot \frac{du_1}{dt} + \frac{d\xi''}{dt} \cdot \frac{du_2}{dt} \,,$$

und die Vergleichung dieses Werthes mit der Gleichung (b) führt mittels der vorangehenden Werthe auf den Ausdruck:

$$u_1 \left(\frac{d^2\xi'}{dt^2} - \varphi^2 \xi' + 2f\varphi \frac{d\xi'}{dt} \right)$$
$$+ u_2 \left(\frac{d^2\xi''}{dt^2} - \varphi^2 \xi'' + 2f\varphi \frac{d\xi''}{dt} \right)$$
$$+ \frac{d\xi'}{dt} \cdot \frac{du_1}{dt} + \frac{d\xi''}{dt} \cdot \frac{du_2}{dt} + f'' g = 0 \,,$$

welcher sich mit der Beachtung, daß auch die besondern Integrale ξ' und ξ'' der Gleichung:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - \varphi^2 \xi + 2f\varphi \frac{d\xi}{dt} = 0$$

Genüge leisten, sich auf die letzte Zeile reduzirt. Man hat also zur Bestimmung von u_1 und u_2 die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\xi' \frac{du_1}{dt} + \xi'' \frac{du_2}{dt} \\ &\frac{d\xi'}{dt}\cdot\frac{du_1}{dt} + \frac{d\xi''}{dt}\cdot\frac{du_2}{dt} + f'' g = 0 \end{aligned}\right\} ;$$

wenn man daraus die Werthe von $\frac{du_1}{dt}$ und $\frac{du_2}{dt}$ durch Elimination bestimmt, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\xi' \frac{d\xi''}{dt} - \xi'' \frac{d\xi'}{dt}\right) \frac{du_1}{dt} - f'' g \xi'' = 0 \\ &\left(\xi'' \frac{d\xi'}{dt} - \xi' \frac{d\xi''}{dt}\right) \frac{du_2}{dt} - f'' g \xi' = 0 \end{aligned}\right\} .$$

und mit den Werthen:

$$\xi' = A e^{f_1 \varphi t} , \qquad \xi'' = B e^{-f_2 \varphi t} ,$$

$$\frac{d\xi'}{dt} = A f_1 \varphi e^{f_1 \varphi t} , \qquad \frac{d\xi''}{dt} = - B f_2 \varphi e^{-f_2 \varphi t} ,$$

findet man nach einigen Reductionen die Aenderungsgesetze:

$$\frac{du_1}{dt} = - \frac{f'' g}{A\varphi (f_1 + f_2)} e^{-f_1 \varphi t} , \quad \frac{du_2}{dt} = \frac{f'' g}{B\varphi (f_1 + f_2)} e^{f_2 \varphi t} ,$$

aus welchen sich die unbestimmten Integrale:

$$u_1 - a_1 = \frac{f'' g}{A \varphi^2 f_1 (f_1 + f_2)} e^{-f_1 \varphi t} ,$$

$$u_2 - a_2 = \frac{f'' g}{B \varphi^2 f_2 (f_1 + f_2)} e^{f_2 \varphi t}$$

ergeben, worin a_1 und a_2 die noch unbekannten Werthe von u_1 und u_2 für $t = 0$ vorstellen. Damit hat man sofort, wenn A' für Aa_1, B' für Ba_2 gesetzt wird, da $f_1 f_2 = 1$ ist, das vollständige Integral:

$$\xi_{,} = A' e^{f_1 \varphi t} + B' e^{-f_2 \varphi t} + \frac{f'' g}{\varphi^2} .$$

Daraus und aus der ersten Ableitung können für die Annahme $\xi_{,}=r_{0}$, $\frac{d\xi_{,}}{dt}=0$ für $t=0$ wie vorher die Constanten A' und B' leicht bestimmt werden, womit dann die Aufgabe ihre Lösung erhalten hat.

§. 127.

Nehmen wir nun statt der Geraden eine unbiegsame Curve von einfacher Krümmung, welche sich um eine zu ihrer Ebene senkrechte Achse mit gleichförmiger Geschwindigkeit dreht, und die entweder dabei einen materiellen Punkt ohne Reibung vor sich herschiebt, oder längs welcher ein solcher Punkt mit einer anfänglichen relativen Geschwindigkeit U_{ξ} hingleitet, ohne jedoch durch seinen Druck die gleichförmige Bewegung der Curve zu stören. Die Ebene der Curve wollen wir uns als die horizontale Ebene der xy denken, und ihre Gestalt in Bezug auf ein mit ihr festverbundenes Achsenpaar der ξ und η durch die Gleichung:

$$\eta = f(\xi)$$

ausgedrückt voraussetzen, wobei wie bisher die Drehungsachse als gemeinschaftliche dritte Achse der beiden Coordinatensysteme, des festen der x und y, und des beweglichen der ξ und η angenommen sei. Die Winkelgeschwindigkeit sei wieder φ, und ψ der veränderliche Winkel zwischen den positiven Hälften der Achsen der ξ und der x, so daß man am Ende der Zeit t für einen Punkt $\xi\eta$ der Curve die Beziehungen hat:

$$a). \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \xi \cos\psi - \eta \sin\psi \\ y = \eta \cos\psi + \xi \sin\psi \end{array} \right. , \quad \psi = \varphi t .$$

Manche Ausdrücke werden sich übrigens wieder einfacher mittels der Polar-Coordinaten r und ω darstellen, von denen der Fahrstrahl r derselbe bleibt für das bewegliche, wie für das feste Coordinatensystem, so daß man hat

$$r^2 = x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2 ,$$

während der Winkel ω wie gewöhnlich von der Achse der ξ anfängt, und einerseits mit r durch die Polar-Gleichung der Curve, und mit dem Winkel $\omega_{,}$ zwischen dem Fahrstrahl r und der Achse der x durch die Beziehung:

$$\omega_{,} = \omega + \psi = \omega + \varphi t$$

verbunden ist.

Um nun die Gleichungen (118) auf diesen Fall anzuwenden, wird man beachten, daß wie im vorhergehenden Falle (§. 124) die Kräfte R und R_1 Null sind, daß dagegen die Kräfte R_2 und F zwei Componenten nach den Achsen der ξ und η geben, und zwar

R_2 die Componenten: $-m\varphi^2\xi$, $-m\varphi^2\eta$,

F " " $-2m\varphi\frac{d\eta}{dt}$, $2m\varphi\frac{d\xi}{dt}$.

Bezeichnen dann λ' und μ' die Winkel, welche der vom Krümmungsmittelpunkte abgewendete Theil der Normale zu der gegebenen Curve mit den Achsen der ξ und η einschließt, so hat man

$$\cos\lambda' = \frac{d\eta}{d\varsigma} , \quad \cos\mu' = -\frac{d\xi}{d\varsigma} ,$$

wenn die Curve den materiellen Punkt vor sich herschiebt, und

$$\cos\lambda' = -\frac{d\eta}{d\varsigma} , \quad \cos\mu' = +\frac{d\xi}{d\varsigma}$$

wenn der Punkt seinerseits in der Richtung der drehenden Bewegung einen Druck auf die Curve ausübt.

Betrachten wir also den ersten Fall als allgemeinen, so nehmen die beiden ersten der genannten Gleichungen, deren dritte hier entbehrlich wird, die Form an:

$$\left.\begin{aligned} -N'\frac{d\eta}{d\varsigma} &= m\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - \varphi^2\xi - 2\varphi\frac{d\eta}{dt}\right) , \\ N'\frac{d\xi}{d\varsigma} &= m\left(\frac{d^2\eta}{dt^2} - \varphi^2\eta + 2\varphi\frac{d\xi}{dt}\right) , \end{aligned}\right\} \quad (b.$$

und geben auf dem gewöhnlichen Wege durch Elimination von N' den Ausdruck für die relative lebendige Kraft des Bewegten:

$$m(V_\xi^2 - U_\xi^2) = \varphi^2(r^2 - r_0^2) ,$$

welcher demnach derselbe ist, wie bei der freien relativen Bewegung, und wie leicht zu sehen, auch derselbe bleibt in unserem zweiten Falle, wo der materielle Punkt der Curve folgt, und deren Bewegung zu beschleunigen strebt. Man zieht daraus

$$V_\xi^2 = U_\xi^2 + \varphi^2(r^2 - r_0^2) , \quad (c.$$

und wenn dann V_ξ durch das Aenderungsgesetz $\frac{d\varsigma}{dt}$ ersetzt wird,

$$\frac{dt}{d\varsigma} = \pm \frac{1}{\sqrt{U_\xi^2 + \varphi^2 (r^2 - r_0^2)}} .$$

Man hat aber auch wieder auf der einen Seite

$$\frac{dt}{d\varsigma} = \frac{dt}{dr} \cdot \frac{dr}{d\varsigma} = \frac{dt}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{d\varsigma} ,$$

und auf der andern

$$\frac{dr}{d\varsigma} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(r \frac{d\omega}{dr}\right)^2}} , \quad \frac{d\omega}{d\varsigma} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}} ;$$

damit ergeben sich dann zur Bestimmung der Zeitdauer der Bewegung die Ausdrücke:

$$\text{d.)} \left\{ \begin{aligned} t &= \int_{r_0}^{r} dr . \frac{1}{\sqrt{U_\xi^2 + \varphi^2 (r^2 - r_0^2)}} . \sqrt{1 + \left(r \frac{d\omega}{dr}\right)^2} \\ t &= \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega . \frac{1}{\sqrt{U_\xi + \varphi^2 (r^2 - r_0^2)}} . \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2} \end{aligned} \right.$$

je nachdem sich r besser in Function von ω, oder dieses in Function von s ausdrücken, und das für t sich ergebende Aenderungsgesetz integriren läßt. Auf diese Weise findet man t in Function von r oder ω, und umgekehrt diese Coordinaten, also auch die absoluten x und y in Function von t, wodurch alle Gesetze der Bewegung bekannt sind.

Die absolute Geschwindigkeit des Bewegten am Ende der Zeit ergibt sich übrigens unmittelbar aus der relativen; denn man hat offenbar

$$\text{e.)} \qquad V^2 = V_\xi^2 + \varphi^2 r^2 + 2\varphi V_\xi r^2 \frac{d\omega}{d\varsigma} ,$$

da die Richtungen der beiden Geschwindigkeiten V_ξ und φr einen Winkel unter sich einschließen, dessen Cosinus $r \frac{d\omega}{d\varsigma}$ ist. Dieser Werth

von V^2 kann aber auch leicht dadurch gefunden werden, daß man die Aenderungsgesetze der Gleichungen (a) zum Quadrat erhebt und dann addirt; er gilt in dieser Form insbesondere für den Fall, daß die Curve der Achse der ξ ihre convexe Seite zuwendet, während für den entgegengesetzten Fall $r\frac{d\omega}{d\varsigma}$ negativ wird. Hat man also am Ende der Curve $r\frac{d\omega}{ds} = \pm 1$, so wird im ersten Falle

$$V = V_\xi + r\varphi ,$$

im zweiten dagegen

$$V = V_\xi - r\varphi .$$

Um nun den Druck zu bestimmen, welchen der materielle Punkt auf die Curve ausübt, multiplicire man die Gleichungen (b) die erste mit $\frac{d\eta}{d\varsigma}$ die zweite mit $\frac{d\xi}{d\varsigma}$, und nehme ihre Differenz; man findet so für den ersten Fall mit der Beachtung, daß $\frac{d\xi}{dt} = V_\xi \frac{d\xi}{d\varsigma}$, $\frac{d\eta}{dt} = V_\xi \frac{d\eta}{d\varsigma}$ ist, zuerst

$$N' = m\left(\frac{d\xi}{d\varsigma}\cdot\frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{d\eta}{d\varsigma}\cdot\frac{d^2\xi}{dt^2}\right) + m\varphi^2\left(\xi\frac{d\eta}{d\varsigma} - \eta\frac{d\xi}{d\varsigma}\right) + 2m\varphi V_\xi .$$

Man wird sich ferner leicht überzeugen, daß das erste Glied dieses Werthes auf $\frac{V_\xi^2}{\varrho}$ zurückkommt, wenn $\frac{1}{\varrho}$ die Krümmung in einem Punkte $\xi\eta$ der gegebenen Curve ausdrückt, und demnach den Druck vorstellt, welcher aus der Richtungsänderung der Bewegung längs dieser Curve hervorgeht, und dessen Wirkung immer nach der Verlängerung des Krümmungshalbmessers gerichtet ist. Das zweite Glied nimmt in Bezug auf Polar-Coordinaten die einfachere Form $= m\varphi^2 r^2 \frac{d\omega}{d\varsigma}$ an, und der ganze Werth von N' wird demnach

$$N' = m\left(\frac{V_\xi^2}{\varrho} + \varphi^2 r^2 \frac{d\omega}{d\varsigma} + 2\varphi V_\xi\right) . \qquad (f.$$

Für den zweiten Fall dagegen ist N' im entgegengesetzten Sinne gerichtet, und man findet dann den Werth:

$$N' = -m\left(\frac{V_\xi^2}{\varrho} + \varphi^2 r^2 \frac{d\omega}{d\varsigma} + 2\varphi V_\xi\right) . \qquad (g.$$

Diese Werthe können einerseits dazu dienen, je nach Umständen die Bedingungen zu bestimmen, unter welchen der Bewegte noch einen Druck auf die Curve ausübt, also wirklich auf ihr bleibt; denn dieses wird nur so lange der Fall sein, als N' einen positiven Werth erhält, und zwar wird man dabei unterscheiden müssen, ob der materielle Punkt auf der gewölbten oder auf der hohlen Seite der Curve bleiben soll. Wird derselbe von der hohlen Curve fortgeschoben, so sind alle Glieder des Werthes (f) positiv, und N' hat unter sonst gleichen Umständen den größten Werth; wendet dagegen die Curve ihre hohle Seite der Achse der ξ zu und schiebt den Punkt auf der gewölbten vor sich her, so wird ϱ und $\frac{d\omega}{d\varsigma}$ negativ, und man hat

$$\text{f.)} \qquad N' = m\left(2\varphi V_\xi - \varphi^2 r^2 \frac{d\omega}{d\varsigma} - \frac{V_\xi^2}{\varrho}\right);$$

der Bewegte wird daher in diesem Falle sich von der Curve entfernen, sobald die beiden letzten Glieder das erste übertreffen; er wird sich dagegen in seiner anfänglichen Richtung fortbewegen, als wenn er frei wäre, wenn N' für alle Punkte der Curve Null ist. — Der Werth (g) wird immer negativ bleiben, wenn die Curve ihre convexe Seite der Achse der ξ und dem auf sie drückenden Punkte zuwendet, und es leuchtet ein, daß in diesem Falle der letztere nicht auf der Curve bleiben kann; man hat dagegen

$$\text{g.)} \qquad N' = m\left(\frac{V_\xi^2}{\varrho} + \varphi^2 r^2 \frac{d\omega}{d\varsigma} - 2\varphi V_\xi\right)$$

wenn der materielle Punkt sich längs der concaven Seite der Curve fortbewegt und deren Bewegung zu beschleunigen sucht. Es wird demnach die Gestalt der Curve auch hier gewisse Bedingungen erfüllen müssen, damit der Bewegte immer auf sie drückt, wozu namentlich die gehört, daß ϱ nicht zu groß, die Curve also nicht zu wenig gekrümmt ist, so daß $\frac{V_\xi}{\varrho}$ nicht viel kleiner wird als 2φ. Ebenso wird sich immer eine Curve finden lassen, für welche der vorhergehende Werth in allen Punkten Null ist, durch welche also die anfängliche absolute Bewegung des materiellen Punktes weder der Richtung, noch der Geschwindigkeit nach geändert wird.

Auf der andern Seite werden die Ausdrücke (f) und (g) für N' auch dazu dienen, die Größe der Arbeit zu bestimmen, welche erfordert wird, um den materiellen Punkt mittels der Curve fortzubewegen, oder

welche dieser selbst leistet, indem er längs derselben hingleitet, und seine anfängliche Geschwindigkeit an diese abgibt. Dazu wird man zuerst die zum Fahrstrahl senkrechte Componente von N', nämlich $N' \frac{dr}{d\varsigma}$ ausdrücken, und hat dann als Aenderungsgesetz der Arbeit A in Bezug auf die absolute Winkelbewegung des Fahrstrahls

$$\frac{dA}{d\omega_{,}} = r N' \frac{dr}{d\varsigma} ,$$

und demnach für die Arbeit selbst das Integral:

$$A = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega_{,} . r \frac{dr}{d\varsigma} N' , \qquad \text{(h.}$$

worin alle Veränderlichen in Function von ω, ausgedrückt vorausgesetzt werden, und α und α_0 die Grenzen dieses Winkels für die Bewegung auf der gegebenen Curve sind.

Wir werden auf diese Untersuchungen in der technischen Mechanik bei der Theorie der Turbinen und Ventilatoren ausführlich zurückkommen, weßwegen ich mich darauf beschränke, das Vorhergehende auf den nachfolgenden besondern Fall anzuwenden.

Die gegebene Curve sei ein Halbkreis, dessen Durchmesser $= 2a$, der die Achse der ξ im Anfangspunkte berührt und in der negativen Achse der η endigt, so daß seine Gleichung die Form erhält:

$$\xi^2 + 2a\eta + \eta^2 = 0$$

oder

$$r + 2a \sin\omega = 0 ,$$

und der Bewegte beginne die Bewegung im Anfangspunkte mit einer im Sinne der positiven ξ gerichteten anfänglichen Geschwindigkeit U_ξ. Man hat dann $r_0 = 0$ und daher einfach

$$V_\xi^2 = U_\xi^2 + r^2 \varphi^2 ;$$

ferner findet man, wenn der materielle Punkt von der Curve geschoben wird, mit der Beachtung, daß $\varrho = -a$, und

$$-\frac{d\omega}{d\varsigma} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4a^2\cos^2\omega}} = \frac{1}{2a}$$

ist, nach (f) den Werth des Druckes

$$N' = \frac{m}{2a} (4\varphi a V_\xi - 2V_\xi^2 - \varphi^2 r^2) .$$

Die Bedingung, daß der Bewegte auf der Curve bleibt, wird demnach

$$16\varphi^2 a^2 (U_\xi^2 + \varphi^2 r^2) > 4U_\xi^4 + 12\varphi^2 r^2 U_\xi^2 + 9\varphi^4 r^4$$

oder in anderer Zusammenstellung

$$4U_\xi^4 - 4\varphi^2 U_\xi^2 (4a^2 - 3r^2) - \varphi^4 r^2 (16a^2 - 9r^2) < 0 \; .$$

Diese Bedingung wird also niemals für alle Punkte der Curve erfüllt werden können, denn setzt man z. B. nur $r = a\sqrt{2}$, so daß der Bewegte nur bis zur Mitte auf der Curve bleiben soll, so findet man noch die Bedingung:

$$4U_\xi^4 + 8\varphi^2 a^2 U_\xi^2 + 2\varphi^4 a^4 < 0 \; ,$$

welcher durch keinen Werth von U_ξ oder $a\varphi$ zu genügen ist. Wenn U_ξ sehr klein ist, so wird der Bewegte noch, bis r nahe $= \frac{4}{3}a$ geworden, auf der Curve bleiben. Nimmt man aber als größten Werth von r nur $\frac{2}{3}a\sqrt{3}$, so daß $3r^2 = 4a^2$ wird, so kann $U_\xi = 1{,}074..\varphi a$ werden. Den größtmöglichen Werth von U_ξ findet man, wenn man $r = 0$ setzt; er ist $U_\xi = 2\varphi a$; mit dieser anfänglichen Geschwindigkeit wird also der Bewegte die Curve gleich im Anfangspunkte verlassen, und nie mehr von ihr erreicht werden.

Diese Bedingungen gestalten sich dagegen umgekehrt, wenn der Bewegte auf der hohlen Seite der Curve bleiben soll; denn man hat dann nach (g′) dem Ausdrucke:

$$4U_\xi^4 + 4\varphi^2 U_\xi^2 (3r^2 - 4a^2) + \varphi^4 r^2 (9r^2 - 16a^2) > 0$$

Genüge zu leisten, und dieser zeigt, daß wenn r einmal größer als $\frac{4}{3}a$ geworden ist, der Punkt fernerhin immer auf der Curve bleibt, daß aber im Anfange der Bewegung oder wenn $r = 0$ ist, U_ξ wenigstens gleich $2\varphi a$ sein muß oder gleich der Geschwindigkeit, welche der Endpunkt des Durchmessers besitzt, wenn der gestellten Bedingung genügt werden soll.

Nehmen wir also zur fernern Untersuchung der Bewegung des materiellen Punktes auf der hohlen Seite des Halbkreises $U_\xi = 2\varphi a$ an, so wird $V_\xi = \varphi\sqrt{4a^2 + r^2}$; die relative Geschwindigkeit, mit welcher der Bewegte die Curve verläßt, ist daher $2\varphi a\sqrt{2}$, und seine absolute

Geschwindigkeit gleich $V_\xi - 2\varphi a = 2\varphi a\left(\sqrt{2}-1\right) = 0{,}414..2\varphi a$.
Für die Dauer der Bewegung ergibt sich das Integral:

$$\varphi = t\int_0^\omega d\omega.\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\omega}} = \int_0^r dr.\frac{2a}{\sqrt{(4a^2+r^2)(4a^2-r^2)}},$$

welches sich indessen nicht in einem einfachen geschlossenen Ausdrucke darstellen läßt, aus welchem also auch der Werth von ω und r nicht einfach in Function von t gezogen werden kann, um die Gleichungen der absoluten Bewegung zu erhalten.

Es mag deßhalb genügen, diese Beziehungen angedeutet zu haben, und für das Weitere auf die technische Mechanik zu verweisen.

§. 128.

Um endlich auch einige Beispiele für die relative gezwungene Bewegung auf einer in Bewegung begriffenen Fläche zu geben, wollen wir unsere Gleichungen (118) zuerst auf den Fall anwenden, wo ein schwerer materieller Punkt ohne Reibung auf einer gegen die Richtung der Schwere geneigten Ebene, welche eine gleichförmige drehende Bewegung um eine zu dieser Richtung parallele Achse besitzt, herabfällt.

Ich nehme diese Achse wieder als Achse der ζ, lege die Coordinaten-Ebene der $\xi\zeta$ senkrecht auf die gegebene Ebene, und so, daß die Achse der η durch die anfängliche Lage des Bewegten geht, daß man also $\xi = 0$, $\eta = r_0$, $\zeta = 0$ für $t = 0$ hat, und nehme die ζ abwärts positiv an; ferner bezeichne ich den Winkel, welchen die Normale zur beweglichen Ebene mit der Achse der ζ bildet, durch γ, so daß die Gleichung dieser Ebene einfach

$$\zeta = \xi \operatorname{tang}\gamma$$

wird. Dadurch hat man $\cos\lambda' = -\sin\gamma$, $\cos\mu' = 0$, $\cos\nu' = \cos\gamma$; die bewegende Kraft R wird gleich ihrer Componenten $Z' = mg$, und die Componenten Ξ' und H' sind folglich Null; die Componenten der Kräfte R_2 und F dagegen bleiben dieselben, wie in §. 121, und die Gleichungen (118) nehmen damit die Form an:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2\xi}{dt^2} &= m\varphi^2\xi + 2m\varphi\frac{d\eta}{dt} + N'\sin\gamma \\ m\frac{d^2\eta}{dt^2} &= m\varphi^2\eta - 2m\varphi\frac{d\xi}{dt} \\ m\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= mg - N'\cos\gamma \end{aligned}\right\} . \qquad (a.$$

Man zieht aus ihnen den Ausdruck für die relative Geschwindigkeit:

$$V_\xi^2 = U_\xi^2 + 2g\zeta + \varphi^2(r^2 - r_0^2) ,$$

da wieder wie leicht zu sehen

$$N' \cos\gamma \frac{d\zeta}{d\varsigma} - N' \sin\gamma \frac{d\xi}{d\varsigma} = 0 \quad , \qquad \xi^2 + \eta^2 = r^2$$

ist, und U_ξ die anfängliche relative Geschwindigkeit bedeutet.

Multiplicirt man dann die erste der Gleichungen (a) mit $\sin\gamma$, die dritte mit $\cos\gamma$, und zieht die letztere von der ersteren ab, so ergibt sich mit Beachtung der Gleichung der Ebene und ihres zweiten Aenderungsgesetzes:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}\cos\gamma - \frac{d^2\xi}{dt^2}\sin\gamma = 0$$

als Werth des Druckes N' auf die Ebene

$$N' = m(g\cos\gamma - \varphi^2\xi\sin\gamma - 2\varphi v_\xi \sin\gamma) .$$

Wenn der Bewegte auf der Ebene bleiben soll, so muß N' immer einen positiven Werth haben; ist also die Bewegung eine positive, d. h. für ein Auge in der positiven Achse der ζ eine in demselben Sinne, wie die Bewegung eines Uhrzeigers vor sich gehende, und befindet sich der Bewegte auf der positiven Seite der η, so daß auch $v_\xi = \frac{d\eta}{dt}$ positiv ist, so wird ein Druck auf die Ebene nur so lange stattfinden, als

$$g > (\varphi^2\xi + 2\varphi v_\xi)\,\mathrm{tang}\,\gamma$$

ist, und die drehende Bewegung darf dann eine gewisse Größe der Winkelgeschwindigkeit nicht überschreiten. Ist dagegen φ negativ, so wird N' positiv sein, so lange

$$g + 2\varphi v_\xi\,\mathrm{tang}\,\gamma > \varphi^2\xi\,\mathrm{tang}\,\gamma$$

ist, was immer stattfinden wird, wenn der anfängliche Werth r_0 von η nicht zu klein ist. In den Fällen übrigens, in denen N' negativ wird, gelten die obigen Gleichungen alle unter der Voraussetzung, daß sich der Bewegte unterhalb der geneigten Ebene befindet.

Führt man nun den vorhergehenden Werth von N' in die erste der Gleichungen (a) ein, so ergeben sich zur Auflösung der gestellten Aufgabe die beiden Differential-Gleichungen zweiter Ordnung:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= g\sin\gamma\cos\gamma + \left(\varphi^2\xi + 2\varphi\frac{d\eta}{dt}\right)\cos^2\gamma\,,\\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \varphi^2\eta - 2\varphi\frac{d\xi}{dt}\,,\end{aligned}\right\}\qquad (b.$$

welche die Gesetze für die Bewegung der Projection des materiellen Punktes in der Ebene der $\xi\eta$ ausdrücken, und in Verbindung mit der Gleichung der gegebenen Ebene:

$$\zeta = \xi\,\mathrm{tang}\,\gamma$$

auch die Art der Bewegung parallel zu den andern Coordinaten-Ebenen bestimmen werden.

Man wird sich indessen leicht überzeugen, daß die beiden Gleichungen (b) auf directem Wege nicht vollständig integrirt werden, und nur angenäherte Resultate liefern können, namentlich in den Fällen, wo φ einen sehr großen oder sehr kleinen Werth hat. Sie geben übrigens in zwei Fällen auch genaue Gesetze, nämlich wenn $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, oder wenn $\gamma = 0$ ist, die gegebene Ebene also entweder eine lothrechte oder eine wagrechte Lage hat.

Für den letztern dieser beiden Fälle ist die Gleichung der Ebene

$$\zeta = 0$$

und die Gleichungen (b) werden

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \varphi^2\xi + 2\varphi\frac{d\eta}{dt}\\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \varphi^2\eta - 2\varphi\frac{d\xi}{dt}\end{aligned}\right\},\qquad (c.$$

also dieselben, wie die beiden ersten der Gleichungen (115) für den in §. 122 betrachteten Fall, was in der That auch stattfinden muß, da keine Reibung vorhanden ist, und der Bewegte bis zum Anfang der Zeit t an der drehenden Bewegung um die Achse der ζ Theil genommen hat.

Ist die gegebene Ebene dagegen lothrecht, also $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, so wird ihre Gleichung

$$\xi = 0\,,$$

übereinstimmend mit der ersten der Gleichungen (b); die zweite derselben gibt daher, da auch $u_\xi = \frac{d\xi}{dt} = 0$ ist, einfach

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \varphi^2 \eta ,$$

und damit wie in §§. 83 und 124 die Gleichungen:

d.) $$\eta = \frac{1}{2} r_0 \left(e^{\varphi t} + e^{-\varphi t}\right)$$

und

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{2} r_0 \varphi \left(e^{\varphi t} - e^{-\varphi t}\right) .$$

Die dritte der Gleichungen (a) kommt durch die vorangehenden Voraussetzungen auf

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = g$$

zurück und gibt wie gewöhnlich

$$t = \sqrt{\frac{2\zeta}{g}}$$

für die Zeit der Bewegung parallel zur Achse der ζ, welche offenbar die des freien Falles ist. Eliminirt man nun mittels dieses Werthes die Zeit t aus der Gleichung (d), so erhält man

$$\eta = \frac{1}{2} r_0 \left(e^{\varphi\sqrt{\frac{2\zeta}{g}}} + e^{-\varphi\sqrt{\frac{2\zeta}{g}}}\right)$$

für die Gleichung der Curve, welche der Bewegte in der sich drehenden Ebene beschreibt.

Nehmen wir zuletzt noch die bemerkten Fälle, wo φ einen sehr kleinen oder einen sehr großen Werth hat, γ aber einen beliebigen Winkel bedeutet, so werden wir in der ersten dieser Voraussetzungen aus der zweiten der Gleichungen (b) schließen, daß $\frac{d\eta}{dt}$ einen sehr kleinen Werth behält, und η selbst sich nur sehr wenig von seinem anfänglichen Werthe r_0 entfernt, vorausgesetzt, daß dieses r_0 nicht sehr groß ist und die Bewegung nicht für große Werthe von t untersucht wird. Multi-

plicirt man dann die erste der Gleichungen (b) mit $2\frac{d\xi}{dt}$, die zweite mit $2\frac{d\eta}{dt}\cos^2\gamma$, und nimmt das erste Integral ihrer Summe, so folgt:

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\cos^2\gamma=2g\xi\sin\gamma\cos\gamma+\varphi^2\xi^2\cos^2\gamma$$
$$+\varphi^2(\eta^2-r_0^2)\cos^2\gamma$$

und wenn wir die kleinen Glieder $\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\cos^2\gamma$ und $\varphi^2(\eta^2-r_0^2)\cos^2\gamma$ vernachlässigen, so bleibt noch

$$\frac{d\xi}{dt}=\pm\sqrt{2g\xi\sin\gamma\cos\gamma+\varphi^2\xi^2\cos^2\gamma}$$

woraus t in Function von ξ und umgekehrt dieses in Function von t erhalten werden kann. Leitet man dann daraus den Werth von $\frac{d\xi}{dt}$ in Function von t ab, und führt ihn in die zweite der Gleichungen (d) ein, so nimmt diese die Form an:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=\varphi^2\eta-2\varphi f(t),$$

und läßt sich auf eine Differential-Gleichung erster Ordnung zurückführen, wenn man darin $\eta=u\int dt.v$ substituirt.

Ist endlich φ sehr groß, so wird ξ und $\frac{d\xi}{dt}$ verhältnißmäßig sehr klein bleiben; man kann dann in der zweiten der Gleichungen (b) das Glied $2\varphi\frac{d\xi}{dt}$ neben $\varphi^2\eta$ vernachlässigen, und diese Gleichung gibt dann, wie in dem Falle, wo $\gamma=\frac{1}{2}\pi$, ist

$$\eta=\frac{1}{2}r_0\left(e^{\varphi t}+e^{-\varphi t}\right);$$

daraus zieht man wieder

$$v_\xi=\frac{d\eta}{dt}=\frac{1}{2}r_0\varphi\left(e^{\varphi t}+e^{-\varphi t}\right)$$

und wenn dieser Werth in die erste der Gleichungen (b) gesetzt, und

das Glied $\varphi^2 \xi$ neben $r_0 \varphi^2 \left(e^{\varphi t} - e^{-\varphi t}\right)$ vernachlässigt wird, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = g \sin\gamma \cos\gamma + r_0 \varphi^2 \left(e^{\varphi t} - e^{-\varphi t}\right) \cos^2\gamma$$

und gibt auf einfache Weise den Werth von ξ in Function von t, womit auch jener von ζ bekannt, und die Lösung der Aufgabe erreicht ist.

§. 129.

Zuletzt soll noch die relative Bewegung eines schweren materiellen Punktes auf einer Kugelfläche, welche an der Umdrehung der Erde Theil nimmt, oder mit andern Worten die relative Bewegung des nach allen Seiten hin beweglichen Pendels untersucht werden, da diese Untersuchung in der neuesten Zeit durch die Versuche von Foucault einer besondern Beachtung werth geworden ist.

Nehmen wir dazu den Anfang der Coordinaten der ξ, η, ζ im Mittelpunkte der Kugel oder im Anfhängepunkte des Pendels an, und bestimmen wir die Lage der Coordinatenachsen so, daß die der ζ parallel zur eigentlichen Richtung der Schwere, aber im entgegengesetzten Sinne gerichtet ist, daß die Ebene der $\xi\zeta$ mit dem Meridian des Aufhängepunktes zusammenfällt, und die positiven η nach Westen genommen werden; die geographische Breite des Aufhängepunktes sei wieder mit β, die Länge des Pendels mit l bezeichnet. Unter diesen Voraussetzungen finden wir zuerst für die Kraft R, welche dem Gewichte mg, des materiellen Punktes bei ruhender Erde gleich ist, und mit der Beachtung, daß die Kraft R_1 Null wird, wenn man von der Bewegung der Erde um die Sonne Umgang nimmt, die zu den Achsen parallelen Componenten:

$$\Xi' = 0 \quad , \quad H' = 0 \quad , \quad Z' = mg_{\prime} \, ;$$

die Kraft R_2 stellt den dynamischen Druck vor, und gibt die Componenten:

$$\Xi'' = mR\varphi^2 \cos\beta \sin\beta \quad , \quad H'' = 0 \quad , \quad Z'' = mR\varphi^2 \cos\beta \, .$$

Wir werden dann aber einfacher die Achse der ζ mit der Gleichgewichtslage unseres Pendels auf der sich drehenden Erde zusammenfallen lassen, und dann

$$\Xi'' = 0 \quad , \quad Z = Z' - Z'' = -mg$$

erhalten.

Die Gleichung der Kugelfläche, auf welcher der Bewegte bleiben muß, ist ferner

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = l^2 \qquad (a.$$

und gibt für die Winkel λ', μ', ν', welche die Richtung des Normal-Druckes N' mit den Achsen bildet, die Functionen:

$$\cos\lambda' = \frac{\xi}{l} \quad , \quad \cos\mu' = \frac{\eta}{l} \quad , \quad \cos\nu' = \frac{\zeta}{l} ,$$

worin ζ negativ zu nehmen ist, wenn man die Bewegung nur in der untern Hälfte der Kugelfläche stattfindend voraussetzt.

Beachtet man endlich, daß die Bewegung der Erde vom Südpol aus angesehen werden muß, um als eine in positivem Sinne (eines Uhrzeigers) vor sich gehende zu erscheinen, so findet man für die Winkel λ, μ, ν, welche die Drehungsachse mit den Coordinaten-Achsen der ξ, η, ζ einschließt, die Werthe:

$$\lambda = \beta \quad , \quad \mu = \frac{1}{2}\pi \quad , \quad \nu = \frac{1}{2}\pi + \alpha ,$$

und die Componenten der Kraft F werden nach §. 119 (g) folgende Werthe erhalten:

$$F\cos l' = 2m\varphi\frac{d\eta}{dt}\sin\beta \quad , \quad F\cos n' = 2m\varphi\frac{d\eta}{dt}\cos\beta ,$$

$$F\cos m' = -2m\varphi\left(\frac{d\xi}{dt}\sin\beta + \frac{d\zeta}{dt}\cos\beta\right) .$$

Damit nehmen dann die Gleichungen (118) die Form an:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2\xi}{dt^2} + N'\frac{\xi}{l} &= -2m\varphi\frac{d\eta}{dt}\sin\beta , \\ m\frac{d^2\eta}{dt^2} + N'\frac{\eta}{l} &= +2m\varphi\left(\frac{d\xi}{dt}\sin\beta + \frac{d\zeta}{dt}\cos\beta\right) , \\ m\frac{d^2\zeta}{dt^2} + N'\frac{\zeta}{l} &= -2m\varphi\frac{d\eta}{dt}\cos\beta - mg , \end{aligned}\right\} \quad (A.$$

und geben durch Elimination von N', indem man sie der Reihe nach mit $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ multiplicirt, ihre Summe nimmt, und das Aenderungsgesetz der Gleichung (a) beachtet, den Werth von V_ξ^2, nämlich:

$$V_\xi^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = U_\xi^2 + 2g(z_0 - z), \quad (b.$$

welche demnach dieselbe ist, wie bei einer feststehenden Kugelfläche. Weniger einfach wird der Werth von N', welcher sich durch die Summe der Gleichungen (A) ergibt, nachdem dieselben der Reihe nach mit ξ, η, ζ multiplicirt worden sind; man findet so mit der Beachtung des zweiten Aenderungsgesetzes der Gleichung (a) und des vorstehenden Werthes von V_ξ^2 den Ausdruck:

$$c.)\quad \left\{ \begin{aligned} N'l = mg(2z_0 - 3z) &+ 2m\varphi \sin\beta \left(\eta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\eta}{dt}\right) \\ &+ 2m\varphi \cos\beta \left(\eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt}\right) . \end{aligned} \right.$$

Weitere Ergebnisse und somit die eigentlichen Gesetze der Bewegung lassen sich aus den Gleichungen (A) nur annäherungsweise ableiten. Dazu begnügen wir uns, wieder sehr kleine Schwingungen zu betrachten und demnach vorauszusetzen, daß die Coordinaten ξ und η immer sehr klein gegen l bleiben, ζ also immer sehr nahe gleich $-l$ ist, so daß man die Geschwindigkeit $\frac{d\zeta}{dt}$ parallel zur Achse der ζ neben den Geschwindigkeiten $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$ vernachlässigen, und umsomehr das Aenderungsgesetz derselben $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ gleich Null annehmen kann, da die Gleichung der Kugelfläche die Beziehung liefert:

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\xi}{\zeta} \cdot \frac{d\xi}{dt} - \frac{\eta}{\zeta} \cdot \frac{d\eta}{dt} ,$$

und nach unserer Voraussetzung die Verhältnisse $\frac{\xi}{\zeta}$ und $\frac{\eta}{\zeta}$ sehr klein werden. Beachtet man dann ferner, daß auch, wie bereits in §. 88 angegeben wurde, die Winkelgeschwindigkeit φ der Erde sehr klein ist, daß also das Glied $2m\varphi \frac{d\eta}{dt} \cos\beta$ in der dritten der Gleichungen (A) neben mg verschwindet, so kommen diese Gleichungen auf folgende zurück:

$$B.)\quad \left\{ \begin{aligned} m\frac{d^2\xi}{dt^2} + N\frac{\xi}{l} &= -2m\varphi \frac{d\eta}{dt} \sin\beta , \\ m\frac{d^2\eta}{dt^2} + N\frac{\eta}{l} &= +2m\varphi \frac{d\xi}{dt} \sin\beta , \\ -N &= -mg . \end{aligned} \right.$$

Multiplicirt man nun die erste dieser Gleichungen mit η, die zweite mit ξ und zieht die erste von der zweiten ab, so ergibt sich

$$\xi \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2\xi}{dt^2} = \varphi \sin\beta \frac{d.(\xi^2+\eta^2)}{dt},$$

oder wenn man r^2 für $\xi^2 + \eta^2$ einführt, und den Winkel dieses Fahrstrahles r mit einer festen Geraden wieder durch ω bezeichnet

$$\frac{d.r^2\frac{d\omega}{dt}}{dt} = \varphi \sin\beta \frac{d.r^2}{dt}. \qquad (C.$$

Ferner kann man die beiden ersten Gleichungen (B) mit $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$ multipliciren, und ihre Summe nehmen; dadurch und mit der Beachtung, daß man hat

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\omega}{dt}\right)^2, \quad N = mg$$

findet man nach einmaliger Integration die neue Gleichung:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = v_0^2 + \frac{g}{l}(r_0^2 - r^2), \qquad (D.$$

worin r_0 den sehr kleinen anfänglichen Abstand des Pendels von der Gleichgewichtslage und v_0 die ebenfalls sehr kleine horizontal gerichtete anfängliche relative Geschwindigkeit bedeutet.

Vor Allem müssen wir nun über diese anfängliche relative Geschwindigkeit die richtigen Begriffe feststellen; denn es könnte scheinen, als ob der materielle Punkt, wenn er aus der Gleichgewichtslage entfernt und sich dann selbst überlassen wird, keine anfängliche relative Geschwindigkeit habe. Dem ist aber nicht so, und die Gleichung (C) wird uns darauf hinweisen. Nehmen wir nämlich an, dem Pendel werde am Anfange der Zeit t in seiner Gleichgewichtslage eine anfängliche Geschwindigkeit v'_0 ertheilt, so hat man $r_0 = 0$; findet also auch Null für den anfänglichen Werth von $r^2 \frac{d\omega}{dt}$ oder $r_0 v_0 \sin\alpha_0$ (§. 73) und die Gleichung (C) gibt integrirt den Ausdruck:

$$r^2\frac{d\omega}{dt} = \varphi \sin\beta . r^2, \quad \frac{d\omega}{dt} = \varphi \sin\beta, \qquad (d.$$

welcher zeigt, daß die Projection des Pendels (die Schwingungs-Ebene) eine in positivem Sinne (von Osten über Süden nach Westen) gerichtete

constante relative Winkelgeschwindigkeit besitzt, daß diese Winkelgeschwindigkeit also auch in den Wendepunkten des Pendels vorhanden ist, und folglich auch, wenn man die Bewegung außerhalb der Gleichgewichtslage beginnen läßt, für den Anfang der Zeit. Denn diese relative Winkelgeschwindigkeit rührt von der Umdrehung der Erde her, welche sich unter dem Pendel wegdreht, wie es Foucault zuerst für das Pendel am Pol geschlossen, und durch den Versuch auch für eine Breite β bestätigt hat. In dem Augenblicke also, wo das aus der Gleichgewichtslage gebrachte Pendel sich selbst überlassen wird, besitzt es auch schon jene relative Winkelgeschwindigkeit $\varphi \sin\beta$; der anfängliche Werth von $r^2 \frac{d\omega}{dt}$ ist deßhalb in diesem Falle nicht Null, sondern $r_0^2 \varphi \sin\beta$, und die Integration der Gleichung (C) gibt vollständig

$$r^2 \frac{d\omega}{dt} - r_0 \varphi \sin\beta = (r^2 - r_0^2) \varphi \sin\beta$$

oder wie vorher

$$\frac{d\omega}{dt} = \varphi \sin\beta .$$

Mit diesem Werthe erhält man $v_0^2 = r_0^2 \varphi^2 \sin^2\beta$; die Gleichung (D) wird

$$\text{e.)} \qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{g}{l} + \varphi^2 \sin^2\beta\right)(r_0^2 - r^2)$$

und gibt für die Zeit der Bewegung den Ausdruck:

$$\sqrt{\frac{g}{l} + \varphi^2 \sin^2\beta} \,.\, t = \int_r^{r_0} dr \,.\, \frac{1}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} = \arccos \frac{r}{r_0} ,$$

welcher zeigt, daß die Dauer einer Schwingung dieselbe ist, wie bei dem Pendel mit unbeweglichem Aufhängepunkte, da die Größe $\varphi^2 \sin^2\beta$ gänzlich verschwindet gegen $\frac{g}{l}$, welches nicht leicht kleiner als 1 vorkommen dürfte.

Betrachten wir endlich noch den allgemeinern Fall, wo dem Pendel in der Entfernung r_0 von seiner Gleichgewichtslage von dem Beobachter eine zu dem Fahrstrahl senkrecht gerichtete Geschwindigkeit v'_0 ertheilt wird. Seine anfänglich relative Geschwindigkeit v_0 ist dann

$$v_0 = v'_0 + r_0 \varphi \sin\beta ;$$

die Integration der Gleichung (C) gibt daher zuerst vollständig

$$r^2 \frac{d\omega}{dt} - r_0 v'_0 - r_0^2 \varphi \sin\beta = \varphi \sin\beta \, (r^2 - r_0^2)$$

oder einfacher

$$r^2 \frac{d\omega}{dt} = r_0 v'_0 + r^2 \varphi \sin\beta \, . \qquad (f.$$

Damit nimmt sodann die Gleichung (D) die Form an:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = v'^2_0 + \left(\frac{g}{l} + \varphi^2 \sin^2\beta\right)(r_0^2 - r^2) - \frac{r_0^2 v'^2_0}{r^2} \qquad (g.$$

und gibt mit Vernachlässigung der sehr kleinen Größe $\varphi^2 \sin^2\beta$ und unter der Voraussetzung, daß r_0 der größte Werth von r ist, für t das Aenderungsgesetz:

$$\frac{dt}{dr} = - \frac{1}{\sqrt{v'^2_0 + \frac{g}{l}(r_0^2 - r^2) - \frac{r_0^2 v'^2_0}{r^2}}} \, . \qquad (i.$$

Ferner hat man

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{dt}{dr} = - \frac{r_0 v'_0 + r^2 \varphi \sin\beta}{r^2 \sqrt{v'^2_0 + \frac{g}{l}(r_0^2 - r^2) - \frac{r_0^2 v'^2_0}{r^2}}} \, ,$$

und wenn man

$$\int_r^{r_0} dr \, . \, \frac{r_0 v'_0}{r^2 \sqrt{v'^2_0 + \frac{g}{l}(r_0^2 - r^2) - \frac{r_0 v'^2_0}{r^2}}} = \omega, \qquad (k.$$

setzt und beachtet, daß man nach dem Aenderungsgesetze (i)

$$\int_r^{r_0} dr \, . \, \frac{\varphi \sin\beta}{\sqrt{v'^2_0 + \frac{g}{l}(r_0^2 - r^2) - \frac{r_0^2 v'^2_0}{r^2}}} = \varphi \sin\beta \, . \, t$$

erhält, so folgt

$$\omega = \omega, + \varphi \sin\beta \, . \, t \; . \qquad (l.$$

Man wird sich aber leicht überzeugen, daß die Gleichung (k) ganz mit dem Ausdrucke für $\omega - \omega_0$ in §. 82 übereinstimmt, wenn dort g

negativ genommen wird, daß sie also die Polar-Gleichung einer Ellipse, auf Mittelpunkt und Achse bezogen, vorstellt, und wird daraus schließen, daß $\varphi \sin\beta . t$ den Winkel ausdrückt, welchen die Achse dieser Ellipse am Ende der Zeit t mit ihrer anfänglichen Lage einschließt. Während demnach das Pendel bei einem unbeweglichen Aufhängepunkte nach §. 114 eine unveränderliche Ellipse beschreibt, folgt dasselbe in seiner relativen Bewegung in Bezug auf die sich drehende Erde einer ganz gleichen Ellipse, deren Achse aber eine gleichförmige positive Drehung um ihren Mittelpunkt besitzt, und mit der Winkelgeschwindigkeit $\varphi \sin\beta$ in

$$T_1 = \frac{2\pi}{\varphi \sin\beta} = \frac{T}{\sin\beta} \text{ Zeiteinheiten}$$

eine Umdrehung vollendet, wenn $T = \frac{2\pi}{\varphi}$ die Umdrehungszeit der Erde bedeutet. Unter einer Breite von 45 bis 50° beträgt diese Zeit demnach ohngefähr 1,5 T oder 36 Stunden; unter dem Pol dagegen würde $\sin\beta = 1$, also $T_1 = T = 24$ Stunden oder genauer 86164 Sekunden.

Für $v'_0 = 0$, wird auch ω' Null, die Ellipse geht also in ihre sich gleichförmig drehende Achse selbst über, in welcher sich nun das Pendel bewegt, wie wir es bereits aus den Gleichungen (d) und (e) geschlossen haben.

Druck von J. P. Himmer in Augsburg.

Fig. 1.

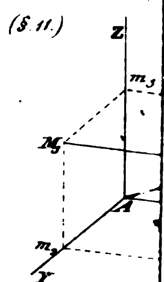


Fig. 6

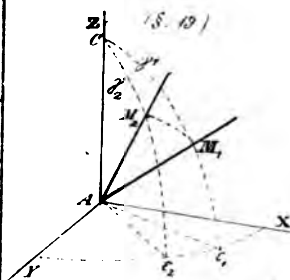


Fig. 8

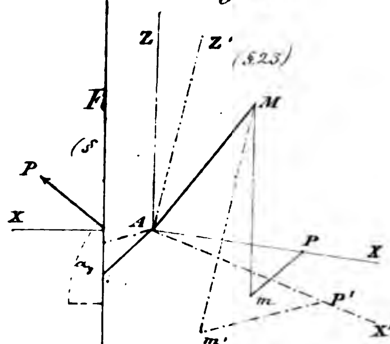
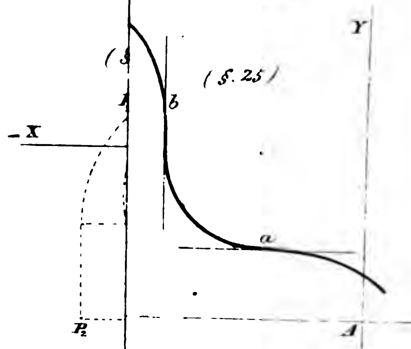
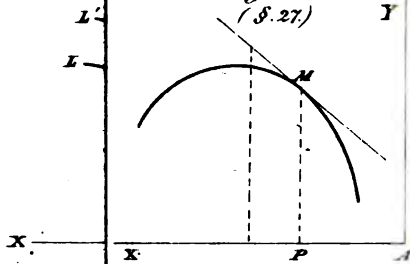
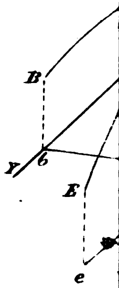


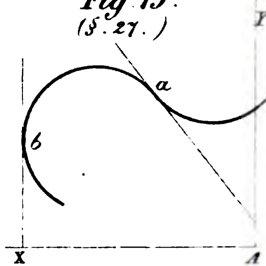
Fig. 10.

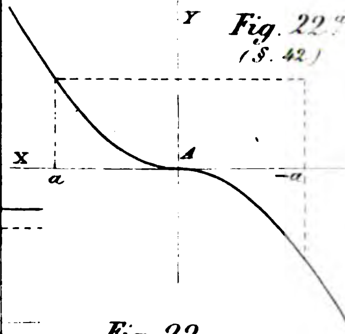


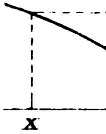
Taf. 2.

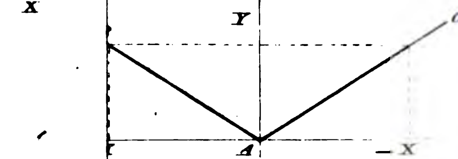

Fig. 14.
(§. 27.)
Y
M
X
P
A
L
L


Fig. 18.
(§. 33.)
B
Y
b
E
e


Fig. 15.
(§. 27.)
Y
a
b
X
A

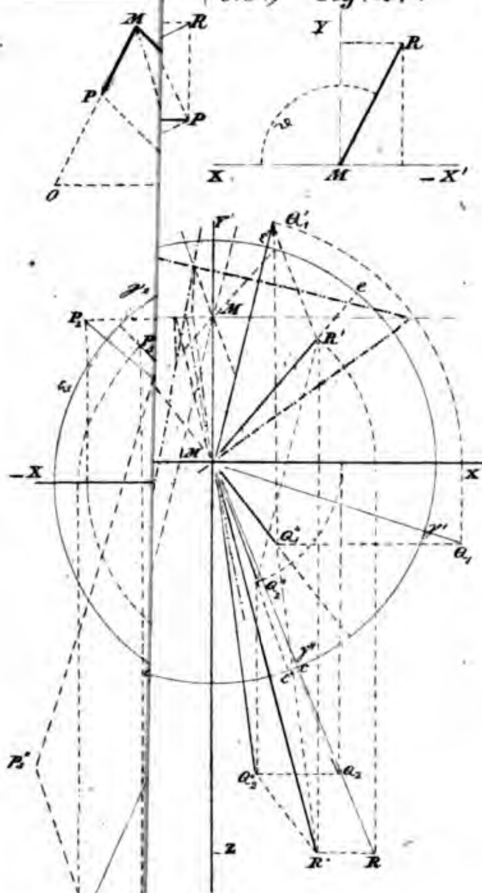

Y
Fig. 22.a
(§. 42.)
X
A
a
−a


(§. 42
X


Fig. 22.
(§. 42.)
Y
C
A
X

Taf. 3.

(§. 5.) Fig. 27.



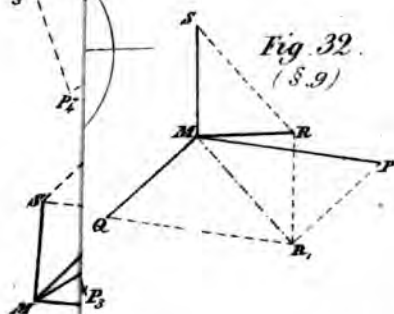


Fig. 32.
(§. 9)



Fig. 36.
(§. 16)

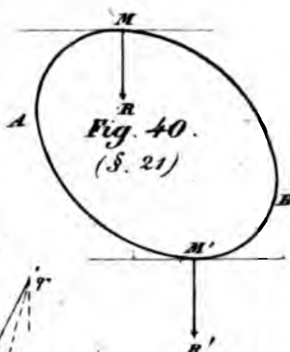


Fig. 40.
(§. 21)

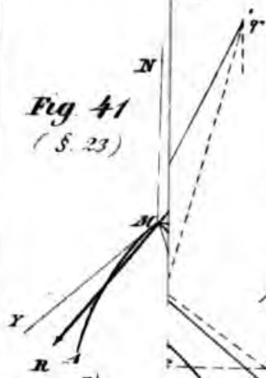


Fig. 41
(§. 23)



Fig. 48.
(§. 34)

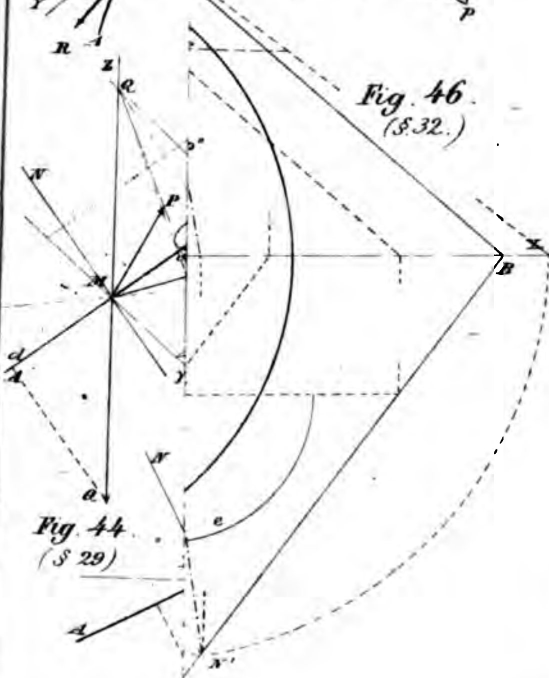
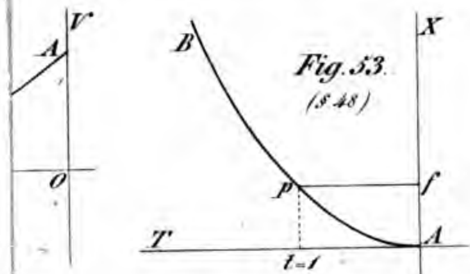
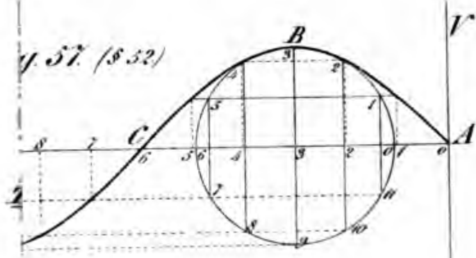


Fig. 46.
(§. 32.)

Fig. 44.
(§. 29)


V
A
O
B
Fig. 53.
(§ 48)
X
p
f
T
A
t=1


y. 57. (§ 52)
B
V
C
A

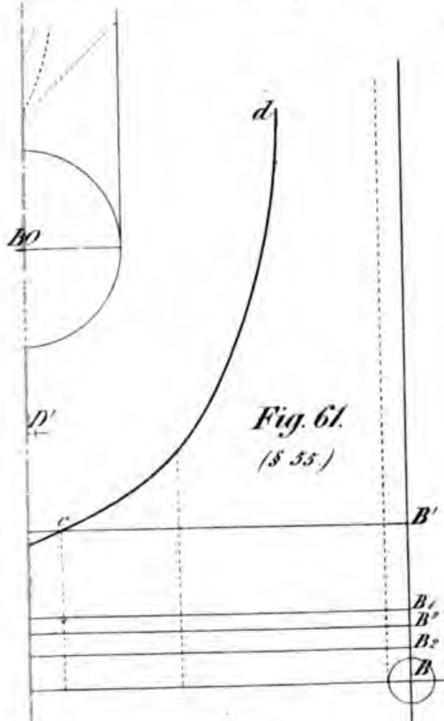

d
BO
D'
Fig. 61.
(§ 55.)
c
B'
B₁
B'
B₂
B

Fig. 65.
(§ 73.)

Y N v C P M v₀ r m α₀ ω X B r₀ b A

H F H′ C′ K C E X

Fig. 72.
(§ 82.)

X M v₀ R ε r₀ B A Y −Y

s, 3.

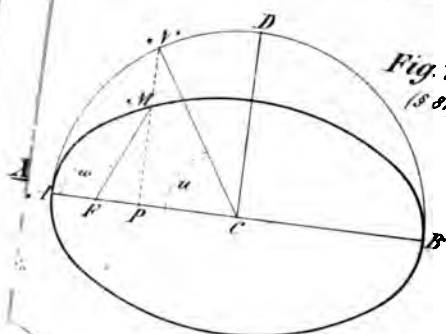


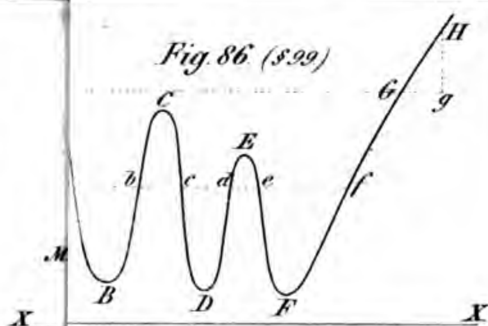
Fig. 76. (§ 87.)

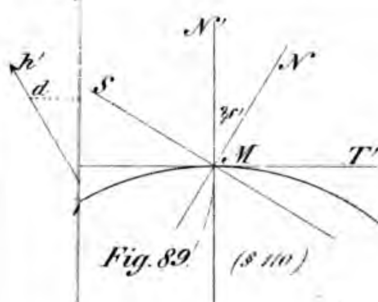
Fig. 82. (§ 89)

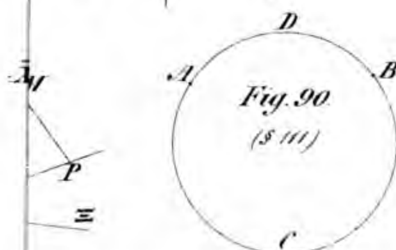
D
M
P
v_0
ω_1
α_0
A
B
C
M'
ω_2
E

u_1
u_2
u_3
u_4
u_5
M_0
F
T_0
T_2
T_1
M_6
M_5
M_4
M_3
M_1
M_2

De


Fig. 86. (§ 99.)
H
G
g
C
E
b
c
d
e
f
M
B
D
F
X
X


N'
h'
N'
d
S
M
T'
Fig. 89. (§ 110.)


D
A
B
Fig. 90.
(§ 111.)
P
C


B
C
Fig. 94.
(§ 124.)
A
C'